DOI: 10.7511/jslx20211119002

基于 GPU 加速的三阶有限体积格式管道 瞬变流求解模型

莫铁祥, 李国栋*, 李海潮

(西安理工大学省部共建西北旱区生态水利国家重点实验室,西安710048)

摘 要:为高效和高精度求解长距离输水系统瞬变流变化过程,应用三阶 ENO 有限体积格式求解一维管道非恒定流方程组,基于 Lax-Friedrichs 通量裂分法重构界面通量,上下游界面采用虚拟网格技术并结合交叉管网边界条件建立了一套高效和高精度求解管道瞬变流水锤波的数值模型。引入 GPU 加速技术,实现对大型输水系统的高效计算。通过特征线法、一阶及二阶 Godunov 有限体积格式对模型进行验证,结果表明,三阶 ENO 格式在极低的 Courant 数时也能保持较好的间断捕捉性能且无非物理振荡。同时,对 Courant 数的高度不敏感性,使得模型划分网格时具有高度的灵活性并能显著提高计算速度。应用 GPU 加速技术,发现模型在较多网格数时有明显的加速效果,且加速效果随网格数增多而显著。本文模型可为长距离输水系统非恒定瞬变过程的高效精准快速模 拟预测提供理论支撑。

关键词:GPU 加速;有限体积法;瞬变流;ENO 格式;长距离输水 **中图分类号**:TV134;O242.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2023)04-0559-09

1 引 言

近些年,随着南水北调等大型输水工程的建设 运行,长距离输水系统的水锤现象成为水力学领域 的热点研究问题之一[1]。数值模拟是解决一维、二 维及三维水流运动过程问题的主要方法之一[2]。 目前,商业软件对水锤问题的模拟计算以稳态方式 处理居多,对瞬变过程的模拟计算相对较少。传统 的瞬变流计算方法较多,离散格式有特征线法 (MOC)^[3]、数值方法包括有限差分法^[4]及有限体积 法等。特征线法需要采取规则的网格,空间步长及 时间步长受到特征线的严格约束,很大程度上限制 了特征线法的适用范围。Chaudhry等^[5]采用 MacCormack 格式构建了求解管道水锤的显式有 限差分格式,并验证了二阶有限差分格式相比特征 线法可以取得更高的计算精度。刘韩生等[6]将 Sweby TVD 格式应用于瞬变流求解,验证了格式 具有低耗散和无虚假振荡等优点。万五一等[7]将 变网格的 MacCormack 格式应用于瞬变流模拟, 该数值方法通过预测-校正二步法求解时间层,实

收稿日期:2021-11-19;修改稿收到日期:2021-12-28.

基金项目:国家自然科学基金(52079107);陕西省自然科学 基础研究计划-企业-引汉济渭联合基金(2022JC-LHJJ-10)资助项目.

作者简介:李国栋*(1967-),男,博士,教授 (E-mail:gdli2008@xaut.edu.cn). 现了对空间网格的灵活划分。然而,特征线法及有限差分法受 Courant 数约束及复杂的边界通量求 解过程导致计算效率低下。守恒性强且计算效率 高的有限体积法受到众多学者采纳推广。Guinot^[8] 采用有限体积法构建了二阶近似黎曼求解器用于 捕捉管道水锤波的变化过程,数值结果表明近似黎 曼解相比黎曼精确解既有较高的计算精度,又有数 十倍的计算速度。Zhao等^[9]基于 Godunov 数值格 式,采用 MUSCL-Hancock 方法构造了一阶和二阶 有限体积法水锤求解格式,并验证了二阶格式在低 Courant 数下具有较好的守恒性。Waagan^[10]提出 预测-校正型 MUSCL-Hancock 方法,该方法保证 格式精度的同时,具有较好的稳定性。Zhou等^[11] 应用二阶 Godunov 有限体积法模拟了管道内液柱 分离现象。

相较于二阶格式,三阶格式的计算精度及间断 捕捉性能更加优越。赵雅甜等^[12]通过求解一维黎 曼问题,得出三阶限制器在获得较高尖端分辨率的 同时兼顾良好的稳定性等结论。Cheng等^[13]应用 本质无振荡(ENO)格式,建立了求解可压缩气体 动力学的一类拉格朗日格式,格式在空间和时间上 至少拥有二阶精度。Guo等^[14]通过局部优化形状 参数提高了平滑区域的精度,得到的 RBF-ENO 数 值格式比经典 ENO 数值格式精度更高。

当模拟计算大型工况时,CPU 程序的计算时

间相对较长,突发紧急事故难以及时预警,一定程度上影响了数值模型的应用前景。近些年,部分学者开始引入 GPU(Graphic Processing Unit)并行加速技术,如许栋等^[15]基于 GPU并行技术建立了浅水运动高效模拟方法,采用先进的硬件设备并简化计算流程获得高达上百倍的加速效果。Meng等^[16]将 GPU 技术与一维明渠特征线法相结合,表明 GPU 技术在网格数较多时可大幅提升计算效率。胡斌星等^[17]提出了基于 GPU 共享内存的非零项组装策略算法,算法的求解效率较高,针对一定计算规模内的模型可满足快速计算与诊断的实时性要求。

将三阶 ENO 有限体积格式应用到一维管道 非恒定流系统,并建立基于 GPU 加速技术的管道 水锤波求解模型。对于提高复杂管路系统非恒定 流过程的准确预测具有重要的意义,并可为复杂管 网系统的智慧化管理及事故应急调度的快速预测 提供技术支撑。

2 控制方程

计算管道水锤波的动量方程和连续性方程为[3]

$$g\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda}{2D}v|v| - g\sin\theta = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
⁽²⁾

式(1,2)可用拟线性形式表示,

$$\partial \boldsymbol{u}/\partial t + \mathbf{A}(\partial \boldsymbol{u}/\partial x) = \mathbf{s}$$
 (3)

式中
$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} v & c^2/g \\ g & v \end{bmatrix}, \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ g\sin\theta - \frac{\lambda|v|v}{2D} \end{bmatrix}.$$

h为管道压力水头, v为管道断面平均流速, $\lambda = 8gn^2(4/D)^{1/3}$, 为管道沿程阻力系数, n为糙率, D 为管道直径, x为沿管轴线距离, c为管道内波速。

式(3)采用 Riemann 问题的求解方法^[18],近似 写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}) \tag{4}$$

式中 $f(u)_x = \overline{A}u, \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{v} & c^2/g \\ g & \overline{v} \end{bmatrix}, \overline{v}$ 为平均流速,当忽略对流项的影响时,可取 $\overline{v} = 0;$ 本文采用 Toro^[19] 提出的算术平均取值,即 $\overline{v} = (v_i + v_{i+1})/2$ 。系数 矩阵 \overline{A} 的特征向量 $\lambda^{\pm} = \overline{v} \pm c_o$

管道网格划分如图 1 所示,采用有限体积法进 行离散求解; *f_{i-1/2}* 为 *i*-1/2 界面通量值, *U_i* 为 *i* 单元内 *u*的均值。以控制单元 *i*为例,将式(4)沿 *x* 方向从控制单元界面 *i*-1/2 到界面 *i*+1/2 积分为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \boldsymbol{u} dx + \boldsymbol{f}_{i+1/2} - \boldsymbol{f}_{i-1/2} = \int_{i-1/2}^{i+1/2} \boldsymbol{s} dx \quad (5)$$

式(5)即为控制单元 *i*内动量方程及连续性方程的守恒形式。令 $\mathbf{U}_i = \frac{1}{dx} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \mathbf{u} \, dx$,方程两边同除以 Δx ,式(5)可写成 $\mathbf{U}_{i,n+1} = \mathbf{U}_{i,n} + \frac{\Delta t}{dx} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \mathbf{s} \, dx - \frac{\Delta t}{dx} (\mathbf{f}_{i+1/2} - \mathbf{f}_{i-1/2})$

$$J_{i,n+1} = \mathbf{U}_{i,n} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \int_{i-1/2}^{1-1/2} \mathbf{s} dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2} - \mathbf{f}_{i-1/2})$$
(6)



3 数值计算方法

3.1 数值通量分解

使用 Lax-Friedrichs^[20]通量裂分法,求解单元 边界通量值,

$$f_{i+1/2}^{n+1}(\mathbf{U}_{i}) = f^{+}(\mathbf{U}_{i}) + f^{-}(\mathbf{U}_{i}) = \frac{1}{2}(f^{n}(\mathbf{U}_{i}) + \alpha \mathbf{U}_{i}) + \frac{1}{2}(f^{n}(\mathbf{U}_{i+1}) - \alpha \mathbf{U}_{i+1})$$
(7)

式中 $\alpha = \max(|f'(\mathbf{U}_i)|) = \max(|\overline{v} \pm c|)$,为雅可比 矩阵 $\mathbf{A} = \partial f / \partial u$ 的最大特征值。通过重构正负通量 向量 $f^{\pm}(\mathbf{U}_i)$,即可得到 3 阶精度 ENO 格式通量 求解方法。

3.2 三阶 ENO 格式通量重构

由式(7)可知,数值通量由正负部相加所得,正 部通量 $f^{\pm}(\mathbf{U}_i)$ 选取计算模板为 $S_0 = \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}, S_1 = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}, S_2 = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}, 模 板位置如图 2 所示。$



Fig. 2 Computational stencils of ENO

相应模板对应的通量表达式为

$$\mathbf{F}_{i+1/2,0}^{n} = \frac{1}{3} \mathbf{f}_{i-2}^{n} - \frac{7}{6} \mathbf{f}_{i-1}^{n} + \frac{11}{6} \mathbf{f}_{i}^{n}$$
(8)

$$\mathbf{F}_{i+1/2,1}^{n} = -\frac{1}{6} \mathbf{f}_{i-2}^{n} + \frac{5}{6} \mathbf{f}_{i-1}^{n} + \frac{1}{3} \mathbf{f}_{i}^{n}$$
(9)

$$\mathbf{F}_{i+1/2,2}^{n} = \frac{1}{3} \mathbf{f}_{i-2}^{n} + \frac{5}{6} \mathbf{f}_{i-1}^{n} - \frac{1}{6} \mathbf{f}_{i}^{n}$$
(10)

实际计算时,需从以上三个模板中选择最光滑的一 个模板,可通过文献^[21]的模板光滑度函数进行权 重判断,

$$IS_{0} = \frac{13}{12} (f_{i-2}^{n} - 2f_{i-1}^{n} + f_{i}^{n})^{2} + \frac{1}{4} (f_{i-2}^{n} - 4f_{i-1}^{n} + 3f_{i}^{n})^{2}$$
(11)

$$IS_{1} = \frac{13}{12} (f_{i-1}^{n} - 2f_{i}^{n} + f_{i+1}^{n})^{2} + \frac{1}{4} (f_{i-1}^{n} + 0f_{i}^{n} - f_{i+1}^{n})^{2}$$
(12)

$$IS_{2} = \frac{13}{12} (f_{i}^{n} - 2f_{i+1}^{n} + f_{i+2}^{n})^{2} + \frac{1}{4} (3f_{i}^{n} - 4f_{i+1}^{n} + f_{i+2}^{n})^{2}$$
(13)

结合模板光滑度函数,即可得出正向量通量表达式 为

$$f_{i+1/2}^+(\mathbf{U}_i) = \min \mod(\mathbf{F}_{i+1/2,0}^n, \mathbf{F}_{i+1/2,1}^n,$$

 $\mathbf{F}_{i+1/2,2}^{n}$, IS_{0} , IS_{1} , IS_{2}) (14) 同理,由网格界面 i + 1/2 对称分布可得负向通量 表达式 $f_{i+1/2}^{-}$ (\mathbf{U}_{i}),由式(7)可得出 n+1时刻的界 面通量值 $f_{i+1/2}^{n+1}$ (\mathbf{U}_{i})。

3.3 源项离散

通过以上步骤只能求得 n+1 时刻的界面通量 值,还需求解源项 s(u) 的值方可计算 n+1 时刻 U_i^{n+1} ;通过二阶龙格库塔法求解此初值问题。

(1) 对流项更新

$$\overline{\mathbf{U}}_{i}^{n+1} = \mathbf{U}_{i}^{n} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(\mathbf{U}_{iL}) - f(\mathbf{U}_{iR}))$$
(15)

(2) 源项时间步更新

$$\mathbf{U}_{i,n+1} = \overline{\mathbf{U}}_i^{n+1} + \Delta t \, \mathbf{s} \Big(\overline{\mathbf{U}}_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{s} (\overline{\mathbf{U}}_i^{n+1}) \Big) \quad (16)$$

3.4 边界条件处理

3.4.1 上游边界条件

实际工程中管道上游边界多为恒压边界条件, 如压力前池和恒定库水位等。根据特征线理论,上 游沿 C⁻ 特征线,处理方式如下。

$$v_{(1,1)}^{n} = \frac{g}{c} (h_{(1,1)}^{n} - h_{(1,0)}) + v_{(1,0)} (1 + \frac{g \Delta t \sin \theta}{c} - \frac{\lambda \Delta t}{2 D_{1}} |v_{(1,0)}|)$$
(17)

$$h_{(1,0)} = h_0 \tag{18}$$

式中 ho 为上游恒定水压。

3.4.2 下游边界条件

下游边界通常为流速边界、流量边界或阀门边界。若为流速边界或流量边界,可在计算时给定下游流速 v_{(i,N(i)})或流量(v_{(i,N(i)})=Q_{(i,N(i)})/A_i);则管道末端水头可由式(19)计算

$$h_{(i,N(i))} = h_{(i,N(i)-1)}^{n-1} - v_{(i,N(i))} \frac{c_i}{g} + v_{(i,N(i)-1)}^{n-1} \left(\frac{c_i}{g} + \Delta t \sin\theta - \frac{\lambda \Delta x |v_{(i,N(i)-1)}^{n-1}|}{2 g D_i}\right)$$
(19)

若下游边界为阀门边界条件,可由特征线理论 及孔口出流规律(式(20))确定水头和流速之间的 关系

$$v_{(i,N(i))} = v_m \tau_j \sqrt{h_{(i,N(i))} / h_0'}$$
(20)

式中 v_m 为阀门全开时阀门平均流速, h'_0 为管道 恒定流状态时阀门处水头, τ_i 为阀门开度。

在求解上下游边界通量值 $f_{-1/2} = f_{N+1/2}$ 时, 需用到管道内部单元体之外的虚拟边界值;为了提 高计算效率同时保证结果精度,本文采用 Zerroukat 等^[22]提出的虚网格技术进行处理。如图 1 所示,对于上游恒压边界, $U_{-2} = U_{-1} = f_{-1/2}$;下游 流速边界或阀门边界, $U_{N+2} = U_{N+1} = f_{N+1/2}$ 。 3.4.3 分叉管道接口处理

输水系统存在分叉口时,如图 3 所示,可根据 下述方式进行处理。



图 3 分叉管道接口网格划分 Fig. 3 Mesh division of bifurcated pipeline interface

考虑管道黏性作用,根据管道 A 正向特征线 及管道 B 和管道 C 负向特征线,可得如下黎曼不 变量方程

$$h_{(A, N(A))} + \frac{c_A}{g} v_{(A, N(A))} = h_{(A, N(A)-1)}^{n-1} + v_{(A, N(A)-1)}^{n-1} \times \left(\frac{c_A}{g} + \Delta t \sin\theta_A - \frac{\lambda \Delta x |v_{(A, N(A)-1)}^{n-1}|}{2 g D_A}\right) \quad (21)$$

$$h_{(B,0)} - \frac{c_{B}}{g} v_{(B,0)} = h_{(B,1)}^{n-1} - v_{(B,1)}^{n-1} \left(\frac{c_{B}}{g} + \Delta t \sin\theta_{B} - \frac{\lambda \Delta x |v_{(B,1)}^{n-1}|}{2 g D_{B}}\right)$$
(22)

$$h_{(C,0)} - \frac{c_{\rm C}}{g} v_{(C,0)} = h_{(C,1)}^{n-1} - v_{(C,1)}^{n-1} \left(\frac{c_{\rm C}}{g} + \Delta t \sin \theta_{\rm C} - \frac{\lambda \Delta x |v_{(C,1)}^{n-1}|}{2 \, g \, {\rm D}_{\rm C}}\right)$$
(23)

(24)

根据流量关系

 $A_{A}v_{(A,N(A))} = A_{B}v_{(B,0)} + A_{C}v_{(C,0)}$ (24) 分叉口处管道水头相等

 $h_{(A, N(A))} = h_{(B,0)} = h_{(C,0)}$

根据式(21~25)即可求得相应时刻分叉管道 连接处的流速及水头值;若分叉口处有三段以上的 管道相连接,仍可以参照本文处理方式,通过拓展 管道数进行计算。

4 GPU 加速实现方法

对于大型输水系统,输水线路可达几百公里及 以上,如何建立一套高效的水锤预警模型至关重 要。而传统的特征线法搭配 CPU 计算架构受 Courant 约束,同时程序采用单线程 CPU 循环计算,计算所需时间成本较高,大型输水工程发生紧急情况时难以及时模拟预测管道瞬变流的变化过程。因此,本文引入 CUDA GPU 加速技术,可实现模型计算效率的大幅提升,使得模型满足求解精度的同时拥有极高的计算效率。

4.1 CPU与GPU相关参数

由于科学技术的飞速发展,CPU及GPU也在 逐年更替,不同型号的GPU显卡加速效果有着显 著差异。模型采用的CPU与GPU是近些年新出 的产品,CPU为酷睿系列最新的10代机,GPU含 1536个CUDA核心。CPU和GPU具体关键参 数列入表1。

	表 1	GPU 与 CPU 关键参数	
Tab. 1	Key	v parameters of GPU and CP	٧U

GPU 类型	计算构架	晶体管数	流处理器数	显存容量	单精度浮点数	显存带宽
NVIDIA GeForce GTX 1660Ti	Pascal	66亿	1536	6000 MB	4.85 TFLOPS	$288~{\rm Gb/s}$
CPU 类型	计算构架	主频	线程数	三级缓存	最大内存支持	
Intel(R) Core(TM) i7-10700	Comet Lake-S	2.90 GHz	8线程	16 MB	8 GB	

4.2 GPU加速并行计算流程

本文模型采用 C++及 CUDA 语言编程实现。初始数据存储于 CPU 端并初始化,通过 cudaMemcpy函数以最快速度将数据传递到 GPU 端,并通过 kernel 函数调用 GPU 线程进行并行处 理。计算流程如图 4 所示。



Fig. 4 GPU acceleration flowchart

5 模型验证及算例分析

为验证模型计算精度及效率,本文选取典型工况进行模拟验证,并选取 MOC 和文献[9]中一阶及二阶 Godunov 格式进行对比分析,通过分析不同格式在同一 Courant 时的数值耗散性定性分析 模型 Courant 灵敏度。通过增加网格数,分析划分 不同网格时模型采取 GPU 技术的加速效果。

5.1 Courant 灵敏度比较

通过计算分析不同 Courant 时管道阀门处压 力波曲线的数值耗散与激波间断捕捉性能,分析不 同模拟方法对 Courant 的灵敏度。

算例1 管道长 3920 m, 管径为1.0 m, 初始 流速为0.5 m/s,上游恒定水头10 m, 管内波速取 980 m/s, 重力加速度取 9.806 m/s², 管道糙率取 0; 管道末端阀门突然关闭, 计算时长 80 s, 网格数 为40, 取时间步长 0.01 s, Courant 值为 0.1。

算例 2 管道长 39200 m,计算时长 800 s, Courant 为 0.01;其余条件参照算例 1。

Courant 取 0.1 时(算例 1)管道末端阀门及上 游 1000 m 处的压力波动特性如图 5 所示。可以看 出,模型 Courant 取 0.1 时,特征线法及一阶 Godunov 格式出现比较严重的数值耗散,且在激波突 变处难以捕捉激波间断,格式捕捉的压力波极值与 实际值误差过大。二阶 Godunov 格式数值耗散程 度要小于特征线法及一阶 Godunov 格式,同时格 式对激波间断捕捉能力强于 MOC 及一阶 Godunov 格式。不过在上游 1000 m 处,10 s 后格式 计算结果仍有较大误差。相比之下,三阶 ENO 格 式维持低数值耗散性的同时其间断捕捉能力也要 优于其他格式。从图 5(a)可以看出,二阶 Godunov 格式捕捉一次突变过程需要 4 s,三阶 ENO 格式只需 2 s 就能捕捉一次完整突变过程。Courant 取 0.01,网格数为 40(算例 2)时的压力波动特 性如图 6 所示。可以看出,随着 Courant 的降低,特 征线法及一阶 Godunov 格式数值耗散程度愈发剧 烈,同时格式对压力波极值计算误差也进一步增 大。二阶 Godunov 格式对间断捕捉能力要强于一 阶 Godunov 格式及特征线法,但仍要弱于三阶 ENO 格式。ENO 格式计算结果数值耗散性最低, 格式在维持较高计算精度的同时并未出现明显数 值振荡。从图 6(b)可以看出,Courant 从 0.1 降到



(a) Cr=0.1 时末端阀门处不同格式压力波曲线对比

0.01 并且网格数不变时,格式数值耗散程度会增 大,不过前 150 s仍能取得较为理想的计算结果。 可知相较于传统特征线法及 Godunov 格式,对于 低 Courant 管道水锤波的瞬变过程数值模拟,三阶 ENO 格式能取得更好的计算结果。此外,为了减 小数值结果的耗散性,建议 Courant 不得小于 0.01。

5.2 大型输水算例分析

为了验证模拟的计算精度及 GPU 程序加速 效果,构造出图 7 所示理想化计算模型。假设管道 均为几十公里的长距离输水管,点 B和点 C 为三



(b) Cr=0.1 时 1000 m 处不同格式压力波曲线对比

图 5 库朗特数为 0.1 时不同格式结果对比 Fig. 5 Comparison of results of different schemes when Cr=0.1







图 7 长距离输水管道 Fig. 7 Long distance water pipeline

叉口分支点。上游水库水位 Z₀ 为 85 m,下游水位 高程 Z_a为5 m,管道末端调流阀按线性变化规律关 闭,关闭时间为 60 s。通过特征线法、二阶有限体 积 Godunov 格式进行对比验证模型精度。计算时 间步长取 0.01 s,重力加速度取 9.806 m/s²。模型 各管道相关参数列入表 2。

表 2 管道模型相关参数 Tab. 2 Parameters related to pipeline model

管道 编号	管长 /km	管径 /m	糙率	波速 /m•s ⁻¹	初始流量 /m ³ • s ⁻¹
Pipe1	40.00	1.389	0.013	1000	0.94
Pipe2	39.76	0.981	0.012	994	0.47
Pipe3	39.76	0.981	0.012	994	0.47
Pipe4	59.64	0.981	0.012	994	0.47
Pipe5	59.64	0.981	0.012	994	0.47
Pipe6	60.00	1.389	0.013	1000	0.94

5.2.1 不同模拟方法结果对比分析

以图 7 所示工况为例,选取不同格式计算末端 阀门处压力波曲线变化过程,结果如图 8 所示。工 况先以恒定流速运行 800 s,然后阀门在 60 s 内线 性关闭。可以看出,阀门关闭前,点 A 水头稳定不 变,可知此时管道内流动为恒定流。阀门关闭后, 水锤波随时间呈现周期循环变化。为维持计算格





式稳定,特征线法 Courant 取 1;二阶 Godunov 有 限体积法 Courant 取 0.5;模型采用的三阶 ENO 格式 Courant 分别取 0.1 及 0.01。从图 8(a)可以 看出,不同格式的计算结果几乎一致,即三阶 ENO 格式 Courant 取 0.01~0.1 时能准确模拟大型输 水工程压力波变化过程。从图 8(b)可以看出,采 用 GPU 加速方法计算所得结果同样能够准确反 映模型末端阀门处压力波变化过程,GPU 计算结 果与 CPU 结果只有极小的误差(约在 1‰以内)。 5.2.2 模型计算效率及 GPU 加速性能分析

以图 7 所示工况为例,分别选取时间步长为 0.02 s,0.015 s,0.01 s 和 0.005 s,计算末端阀门 处水锤变化过程。分析不同格式的计算耗时,以测 试模型的计算效率。计算时间为 4800 s。根据 CFL 约束条件,特征线法及一阶 Godunov 格式需 满足 Cr=1;二阶 Godunov 格式取 Cr=0.5 可得 最佳计算效果^[9];本文采取的三阶 ENO 有限体积 格式满足 Cr>0.01。不同格式的计算总耗时列入 表 3,格式每秒时间步数与总耗时关系如图 9 所 示。可以看出,计算选取同一时间步长时,二阶 Godunov 格式耗时相对较高,特征线法及一 阶 Godunov 格式耗时居中,三阶 ENO 格式耗时最 少。且随着每秒时间步数的增多,三阶 ENO 格式

表 3 不同模拟方法计算耗时 Tab. 3 Calculation time of different simulation methods

时间步长 /t•s ⁻¹	$\frac{MOC}{/t \cdot min^{-1}}$	一阶 Godunov /t・min ⁻¹	二阶 Godunov /t・min ⁻¹	三阶 ENO /t・min ⁻¹
0.020	3.99	7.76	9.55	1.85
0.015	6.72	13.47	16.75	3.71
0.010	16.31	28.73	36.90	7.83
0.005	59.00	118.75	146.54	12.92



选取适当的 Courant, ENO 格式计算耗时为特征 线法计算耗时的 22%~55%,为二阶 Godunov 格 式的 9%~22%。可知,应用本文提出的三阶 ENO 有限体积格式水锤求解模型可较大程度上提 升计算效率。

通过分析不同网格数时 CPU 程序耗时及不 同线程数时 GPU 程序的计算耗时,以检验 GPU-ENO 格式的加速效果。其中,CPU 型号为 Intel (R) Core(TM) i7-10700,GPU 显卡为 NVIDIA GeForce GTX 1660Ti,均为近年最新的电子产品。 采用图 7 所示理想工况,计算阀门末端突然关闭时 的水锤变化规律,计算总时间为 48 s,其结果列人 表 4。由表 4 可知,当网格数均匀划分为 600、网格 精度为 400 m 时,8 核 CPU 单线程计算效率要高 于 GPU 计算效率。其原因是较少网格数时数据 拷贝过程占据主要计算耗时。当网格数达到数千 及以上级别时,GPU 程序计算效率明显高于 CPU 程序。此时,CPU 程序中大量网格间的循环计算 为程序耗时的主要因素,而 GPU 通过调用内核块 上的众多线程进行并行计算,效率明显高于 CPU 程序。从图 10 可以看出,当线程数达到 32 及以上 时,GPU 加速效果随线程数增加不再改变,表明数 十万网格数以内的工程问题,采用 32 线程即可达 到最佳加速效果。本文模型采用 NVIDIA Ge-Force GTX 1660Ti 显卡,以网格达到 60 万为例, GPU 加速效果可达 10 倍以上。而 GPU-ENO 格 式相较于传统特征线法,可轻易达到数十倍加速效 果。

表 4 GPU 加速效果分析 Tab. 4 Effect analysis table of GPU acceleration

网格数 网格精) /个 /m		度 CPU-ENO	GPU-ENO/t・s ⁻¹ 线程数				加速比/倍 线程数			
	网格精度 /m									
	,	,	8	16	32	64	8	16	32	64
600	400	2.44	3.74	3.68	3.67	3.70	0.65	0.66	0.66	0.66
6000	40	28.60	9.99	6.72	5.06	5.09	2.86	4.26	5.65	5.62
$6\! imes\!10^4$	4	290.78	81.98	49.41	33.32	32.95	3.55	5.89	8.73	8.82
$6\! imes\!10^5$	0.4	3421.90	796.80	480.41	328.26	325.38	4.29	7.12	10.42	10.51



6 结 论

基于一维管道非恒定流方程组,采用 Lax-Friedrichs 裂分法进行通量分解,运用三阶 ENO 格 式进行通量重构,上下游界面采用虚拟网格技术,时 间项采用二阶龙格库塔法进行离散,建立了一套高 效和高精度的长距离输水系统水锤求解模型。

(1)通过理想工况验证了模型在极小 Courant 时具备较低的数值耗散性且无非物理振荡等优点。 模型适用于大型复杂输水系统,相比常用的特征线法,模型在保证结果精度的同时耗时为特征线法计算耗时的 22%~55%,为二阶 Godunov 格式的 9%~22%。

(2)运用 GPU 加速技术对模型进行加速处 理。当计算模型划分网格数为数千及以上级别时, 能取得明显的加速效果,且加速效果随网格数增加 而愈发显著。此外,GPU采用 32 线程数时便能以 最大加速效果处理数十万网格以内的工程问题。

(3)本文模型为长距离输水管道瞬变流模拟提供了新方法。模型具有计算效率高和适用范围广且可处理复杂工况等特点,具备较高的实用价值。

参考文献(References):

[1] Wu D Z, Yang S, Wu P, et al. MOC-CFD coupled approach for the analysis of the fluid dynamic interaction between water hammer and pump[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2015, 141(6):06015003.

[2] 槐文信,赵明登,童汉毅.河道及近海水流的数值模拟

[M]. 北京:科学出版社, 2005. (HUAI Wen-xin, ZHAO Ming-deng, TONG Han-yi. Numerical Simulation of River and Offshore Water Flow[M]. Beijing:Science Press, 2005. (in Chinese))

- [3] Wylie E B, Streeter V L, Suo L S. Fluid Transients in Systems [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [4] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 1997,135(2):260-278.
- [5] Chaudhry M H, Hussaini M Y. Second-order accurate explicit finite-difference schemes for waterhammer analysis [J]. Journal of Fluids Engineering, 1985, 107(4):523-529.
- [6] 刘韩生,樊书刚,张 丹,等. TVD 格式在水击数值模 拟中的应用[J].水力发电学报,2010,29(4):107-112.(LIU Han-sheng,FAN Shu-gang,ZHANG Dan, et al. Numerical simulation of water hammer with TVD scheme[J]. Journal of Hydroelectric Engineering,2010,29(4):107-112.(in Chinese))
- [7] 万五一,陈潇逸,张永进. 基于 MacCormack 格式的变 网格瞬变流模拟[J]. 水利学报,2020,51(11):1315-1324. (WAN Wu-yi, CHEN Xiao-yi, ZHANG Yong-jin. Transient flow simulation with variable grid based on MacCormack scheme[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2020,51(11):1315-1324. (in Chinese))
- [8] Guinot V. Riemann solvers for water hammer simulations by Godunov method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 49 (7):851-870.
- [9] Zhao M, Ghidaoui M S. Godunov-type solutions for water hammer flows[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004, 130(4): 341-348.
- [10] Waagan K. A positive MUSCL-Hancock scheme for ideal magnetohydrodynamics[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(23):8609-8626.
- [11] Zhou L, Wang H, Liu D Y, et al. A second-order finite volume method for pipe flow with water column separation[J]. Journal of Hydro-Environment Research, 2017, 17(dec): 47-55.
- [12] 赵雅甜,阁 超,孙 迪,等. 新型三阶 TVD 限制器 性能分析[J]. 北京航空航天大学学报,2017,43(4): 800-805. (ZHAO Ya-tian,YAN Chao,SUN Di, et al. Performance analysis of a new-type third-order TVD limiter[J]. Journal of Beijing University of Aero-

nautics and Astronautics, 2017, **43**(4): 800-805. (in Chinese))

- [13] Cheng J Y, Shu C W. A high order ENO conservative Lagrangian type scheme for the compressible Euler equations [J]. Journal of Computational Physics, 2007,227(2):1567-1596.
- [14] Guo J Y, Jung J H. Radial basis function ENO and WENO finite difference methods based on the optimization of shape parameters[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 70(2):551-575.
- [15] 许 栋,徐 彬, Payet D,等. 基于 GPU 并行计算的 浅水波运动数值模拟[J]. 计算力学学报, 2016, 33
 (1): 114-121. (XU Dong, XU Bing, Payet D, et al. Numerical simulation of shallow water motion based on parallel computation using GPU[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2016, 33(1): 114-121. (in Chinese))
- [16] Meng W W, Cheng Y G, Wu J Y, et al. GPU parallel acceleration of transient simulations of open channel and pipe combined flows [J]. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2019, 240:052025.
- [17] 胡斌星,李新国,孙 鹏.基于 CUDA 的有限元矩阵 并行装配算法研究[J].计算力学学报,2020,37(3): 368-376.(HU Bin-xing, LI Xin-guo, SUN Peng. Research on parallel assembly algorithms of finite element matrices based on CUDA[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2020, 37(3): 368-376. (in Chinese))
- [18] Toro E F. Approximate—State Riemann Solvers [M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [19] Toro E F. Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2001.
- [20] Castro M, Costa B, Don W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2011,230(5):1766-1792.
- [21] Vukovic S, Sopta L. ENO and WENO schemes with the exact conservation property for one-dimensional shallow water equations [J]. Journal of Computational Physics, 2002, 179(2):593-621.
- [22] Zerroukat M, Chatwin C R. A finite-difference algorithm for multiple moving boundary problems using real and virtual grid networks [J]. Journal of Computational Physics, 1994, 112(2):298-307.

GPU-accelerated third-order finite-volume scheme pipe transient flow solver model

MO Tie-xiang, LI Guo-dong*, LI Hai-chao

(State Key Laboratory of Eco-Hydraulics in North Arid Region, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: In order to efficiently and accurately solve the transient flow change process of a long-distance water conveyance system, the third-order ENO finite volume scheme is used to solve the one-dimensional pipeline unsteady flow equations. The interface flux is reconstructed based on the lax-Friedrichs flux splitting method. A set of efficient and numerical models for solving transient water hammer wave in the pipeline with high accuracy are established. GPU acceleration technology is introduced to realize the efficient calculation of large-scale water conveyance systems. The model is verified by the Method of Characteristics and the first-order and second-order Godunov finite volume schemes. The results show that the third-order ENO scheme can also maintain good performance of discontinuous capture at very low Courant without non-physical oscillation. At the same time, it is highly insensitive to Courant, making the model highly flexible in meshing and significantly improving the computing speed. The application of GPU acceleration technology shows that the model has an obvious acceleration effect when the number of grids is large, and the acceleration effect is significant with the increase in the number of grids. The model can provide theoretical support for efficient, accurate, and rapid simulation and prediction of the unsteady transient process of a long-distance water conveyance system.

Key words: GPU acceleration; finite volume method; the transient flow; ENO scheme; long-distance water delivery

引用本文/Cite this paper:

莫铁祥,李国栋,李海潮. 基于 GPU 加速的三阶有限体积格式管道瞬变流求解模型[J]. 计算力学学报,2023,40(4):559-567. MO Tie-xiang,LI Guo-dong,LI Hai-chao. GPU-accelerated third-order finite-volume scheme pipe transient flow solver model [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2023,40(4):559-567.