

DOI: 10.7511/jslx20211201003

非滑移刚度理论下的空缆线形半解析算法

代百华^{*1,2}, 朱金柱^{1,3}, 胡钦侠^{1,4}

1. 中交第二航务工程局有限公司, 武汉 430040;
2. 中交公路长大桥梁建设国家工程研究中心有限公司, 北京 100120;
3. 长大桥梁建设施工技术交通行业重点实验室, 武汉 430040;
4. 交通运输行业交通基础设施智能制造技术研发中心, 武汉 430040)

摘要:为设计阶段更简洁和准确地计算悬索桥空缆线形,提出了一种锚跨水平张力-预偏量-修正水平力迭代过程的非滑移刚度理论计算方法。基于分段悬链线理论,探讨了空缆线形计算存在的三种不同情况,并以此为计算思路。在任一锚跨水平张力作用下,考虑鞍座对空缆线形的影响,以各跨无应力索长不变与鞍座两侧的力或力矩平衡为准则,推导了各跨左右鞍槽接触段和悬空段的内力与线形平衡方程,以及迭代过程中待求参数之间的影响矩阵及修正方法,以右边塔索鞍处不动点里程坐标误差为收敛条件,采用了二分法迭代出理论的左锚跨水平张力,进而得到空缆状态下各索鞍的预偏量以及各跨索段内力与线形。通过算例对比,验证了本文方法的可靠性。结果表明,在成桥状态下结构参数已知的基础上,仅需求解左锚跨水平张力一个变量参数,即可得到各跨索股线形与内力以及鞍座预偏量。相比传统的滑移刚度理论方法,本文方法迭代过程方便简洁,易收敛且精度高,无需往复固定或释放一个鞍座约束进行迭代求解,提高了计算效率,适用于任意跨对称或非对称空缆线形的计算。

关键词:非滑移刚度理论;空缆线形;半解析算法;影响矩阵;修正方法

中图分类号:U448.25;O302

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2023)03-0456-08

1 引言

悬索桥主缆索股架设线形精度直接影响着悬索桥成桥状态下主缆线形、吊索内力的重新分配和加劲梁线形等诸多方面^[1],因而空缆线形的精确计算是悬索桥设计与施工控制的关键工作。目前,空缆线形精确计算的常用方法主要有有限元倒拆法和基于滑移刚度理论下的半解析法。空缆线形的有限元倒拆法,往往需先建立能精确模拟鞍座的一系列刚性梁或杆单元,输入各种材料、几何特性和荷载参数,进行成桥状态的主缆线形计算,得到各单元的内力与线形,进而钝化所有节点荷载参数,释放主索鞍纵向约束,倒拆计算得到空缆线形与索鞍预偏量。这种方法很大程度上减小了鞍座对空缆线形的影响,但仍为一种近似求解,无法精确得到鞍槽内索段线形、切点坐标及两侧切点竖切角。

而基于滑移刚度理论下的半解析法^[2],是基于成桥状态下的各跨索长不变原理,事先假定一组预

偏量,当计算第*i*索鞍预偏量,将其他索鞍固定,分别计算*i*索鞍的左右跨线形、索鞍两侧沿滑移面的不平衡分力以及滑移刚度,调整预偏量使得索鞍两侧主缆内力沿滑移面达到平衡。此时之前的索鞍预偏量已计算出,第*i*鞍座的预偏量变化又会带来*i-1*~1鞍座两端的主缆内力沿滑移面的不平衡力,重新调整预偏量。待调整完成后,*i-1*索鞍预偏量的变化又导致第*i*索鞍两端的主缆内力沿滑移面的不平衡力,又需要调整第*i*索鞍预偏量,如此反复,直至每个索鞍两侧沿滑移面水平力相等或两侧切点到摇轴中心的力矩相等。可以看出,这种方法实际上是一个预偏量-不平衡力-修正预偏量的反复迭代过程,算法相对比较繁琐,计算效率相对较低。鉴于此,为方便进行设计阶段和主缆架设阶段下空缆线形更准确和更简洁的计算分析,本文提出一种新的计算方法,即一种基于非滑移刚度理论的空缆线形半解析算法。

2 非滑移刚度理论下的空缆线形半解析算法

2.1 总体思路

进行空缆线形计算时,仍采用分段悬链线理论,其基本假定^[3-11]为,(1)柔索只能受拉,不能抗

收稿日期:2021-12-01;修改稿收到日期:2022-01-13.

基金项目:国家重点研发计划课题(2017YFC0805304)资助项目.

作者简介:代百华*(1984-),男,硕士,高级工程师(E-mail:276419578@qq.com).

压,也不能抗弯;(2)符合柔索的应力-应变,满足胡克定律;(3)受力前后主缆(柔索)抗拉刚度的计算均使用变形前的主缆横截面积;(4)在同一索段内,索只承受沿变形前索长的竖向均布荷载,集中荷载只能作用在索段的两端(相邻索段间的节点处)。

对于任一理想的索段*i*,根据索段的平衡微分方程与几何协调方程可以得到索段线形和内力间的关系,理想索段计算^[7]如图1所示,理想索段*i*的各变量间的关系如下。

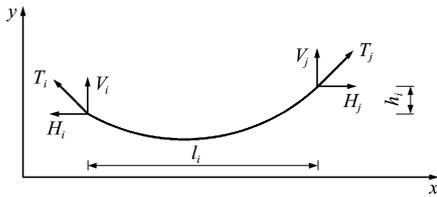


图1 理想索段计算
Fig.1 Ideal cable segment

$$l_i = x_j - x_i, h_i = y_j - y_i \quad (1)$$

$$\begin{cases} H_i = H_j, V_j = V_i - qS_{0i} \\ T_i = \sqrt{H_i^2 + V_i^2}, T_j = \sqrt{H_j^2 + V_j^2} \end{cases} \quad (2)$$

$$l_i = \frac{H_i S_{0i}}{EA} + \frac{H_i}{q} \left\{ \ln \left[V_i + \sqrt{H_i^2 + V_i^2} \right] - \ln \left[V_i - qS_{0i} + \sqrt{H_i^2 + (V_i - qS_{0i})^2} \right] \right\} \quad (3)$$

$$h_i = \frac{qS_{0i}^2 - 2V_i S_{0i}}{2EA} - \frac{1}{q} \left[\sqrt{H_i^2 + V_i^2} - \sqrt{H_i^2 + (V_i - qS_{0i})^2} \right] \quad (4)$$

在空缆状态下,已知主缆钢丝弹性模量*E*、主缆截面面积*A*、空缆状态下沿缆荷载集度*q*、成桥状态下各索鞍鞍槽内主缆不动点(实际顶点)位置以及各跨无应力长度*S₀*,若假定左锚跨水平力*H_L*已知,各跨索段空缆线形计算存在以下情况,(1)对锚跨而言,已知一端支点坐标(*x_i*,*y_i*),不动点到散索鞍摇轴中心或滑移面的距离保持不变,由式(3,4),则可求出索段的跨度*l_i*和高差*h_i*、另一支点(*x_j*,*y_j*)坐标以及散索鞍的预偏量;(2)对边跨而言,散索鞍位置已知,由散索鞍力学平衡得到散索鞍座右侧的水平力,边塔处悬索支点高程已知,则支点高差*h_i*已知,由式(3,4)即可得到边塔处悬索支点里程坐标及其预偏量;(3)对于任意主跨,左支点预偏量确定后,右支点高程已知,且主跨水平力等于边跨水平力,与边跨求解类似,即可得到任意主跨下右悬索支点里程坐标及其预偏量。

基于以上思路,摒弃了传统的鞍座滑移刚度理论计算方法,对任一左锚跨张力*H_L*,可由左锚

跨到右边塔逐跨逐个鞍座进行预偏量求解,同时取任一右锚跨张力*H_R*,可由右锚跨到右边塔逐跨逐个鞍座进行预偏量求解,采用二分法或自动步长分级修正法,求解出在满足右边塔鞍座两侧水平力相等条件下的预偏量差(或不动点里程坐标差),以右边塔出索鞍预偏量差(或不动点里程坐标差)是否满足精度要求为条件,采用二分法迭代出左锚跨张力*H_L*,最终得到任意跨下主跨的空缆线形,即本文的非滑移刚度理论下的空缆线形计算思路。

2.2 空缆状态下索鞍几何参数计算

对于空缆状态下的任一鞍座,如图2所示,*A'*为主缆的实际顶点或不动点,*B'*和*B*分别为主缆在鞍座左右侧切点, Δ 为不动点到圆心沿滑移面的距离, α 为索鞍滑移面倾角,*R*为鞍座半径,鞍座圆心*SC*坐标为(*X_{sc}*,*Y_{sc}*),摇轴中心*C*坐标为(*X_c*,*Y_c*)。成桥状态下实际顶点坐标为(*CQX_{A'}*,*CQY_{A'}*),鞍座圆心*SC*坐标为(*CQX_{sc}*,*CQY_{sc}*)。

设*H₁*,*V₁*和*T₁*为索鞍左切点处主缆水平分力、竖向分力和轴向力,*H₂*,*V₂*和*T₂*为索鞍右切点处主缆水平分力、竖向分力和轴向力, β' 和 β 分别为左右侧切点处竖向切线角,则有

$$\beta' = -\alpha \tan(V_1/H_1), \beta = -\alpha \tan(V_2/H_2) \quad (5)$$

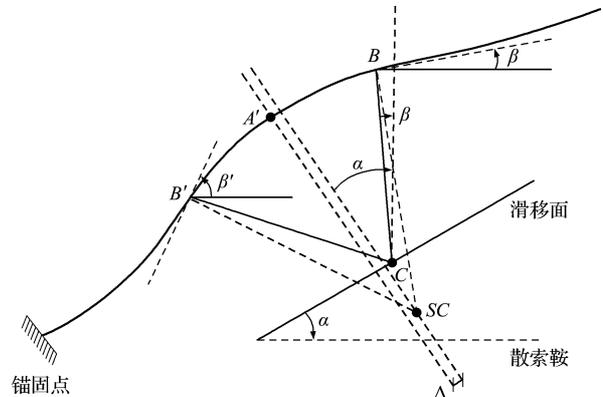


图2 鞍座位置几何参数
Fig.2 Diagram of geometric parameters of saddle position

对于摇轴式散索鞍,若已知空缆状态下预偏量 θ ,则不动点*A'*坐标与鞍座圆弧圆心*SC*坐标为
 $X_{A'} = X_c - R_c \cos(\xi + \theta), Y_{A'} = Y_c - R_c \sin(\xi + \theta)$
 $X_{SC} = X_c + L_1 \cos(\gamma + \theta), Y_{SC} = Y_c + L_1 \sin(\gamma + \theta)$ (6)
 式中*R_c*与 ξ 分别为成桥状态下实际顶点到摇轴中心的距离与竖向倾角,*L₁*与 γ 分别为鞍座圆弧圆心到摇轴中心的距离与竖向倾角。

不动点到圆心沿滑移面的距离 Δ 为

$$\Delta = \frac{Y_{SC} \tan \alpha + X_{SC} - Y_{A'} \tan \alpha - X_{A'}}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad (7)$$

空缆状态下根据不动点坐标 A' 计算左右切点 B' 和 B 的坐标以及鞍槽内圆弧长度分别为

$$\begin{cases} x_B = X_{A'} + R[\sin(\alpha + \arcsin(\Delta/R)) - \sin\beta] \\ y_B = Y_{A'} + R[\cos\beta - \cos(\alpha + \arcsin(\Delta/R))] \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x_{B'} = X_{A'} - R[\sin\beta' - \sin(\alpha + \arcsin(\Delta/R))] \\ y_{B'} = Y_{A'} - R[\cos(\alpha + \arcsin(\Delta/R)) - \cos\beta'] \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \widehat{L_{A'B}} = R[\alpha - \beta + \arcsin(\Delta/R)] \\ \widehat{L_{A'B'}} = R[\beta' - \alpha - \arcsin(\Delta/R)] \end{cases} \quad (10)$$

对于滑移式散索鞍或主索鞍,空缆状态下不动点与鞍座圆弧圆心坐标沿滑移面平移即可,不动点与圆心沿滑移面的距离 Δ 与成桥状态的保持一致,相对容易些,不再赘述。

2.3 空缆状态下锚跨内力与线形计算方法

2.3.1 散鞍座左切点坐标误差影响矩阵的推导

考虑散索鞍的影响,散索鞍处主缆不动点到锚点间的索段(即锚跨)可以分为悬空段和不动点到左(右)切点间的接触段。已知本跨无应力总长度 S_0 、锚点坐标以及散索鞍相对位置,假设左锚跨水平力 H_L ,则存在散索鞍预偏量 θ 与左切点处竖切角 β' 两个未知变量,且相对独立,只需保证左切点或锚点坐标差满足精度要求即可求解,下面仅以摇轴式散索鞍为示例。

假定散索鞍预偏量 θ 和左切点处竖切角 β' ,左散索鞍半径为 R_L ,根据本跨无应力长度 S_0 不变,考虑索伸长量并根据式(7,10)可以得到接触段 S_{0c} 和悬空段无应力长度 $S_{0,sk}$ 为

$$\begin{cases} S_{0c} = \frac{2R_L \alpha \sin(\sqrt{(x_{A'} - x_{B'})^2 + (y_{A'} - y_{B'})^2} / 2R_L)}{1 + H_L / EA \cos\beta'} \\ S_{0,sk} = S_0 - S_{0c} \end{cases} \quad (11)$$

对于悬空段,通过式(1~4)可以得到左散索鞍左切点的坐标为

$$x_{1B'} = x_m + l_i, \quad y_{1B'} = y_m + h_i \quad (12)$$

同样,通过式(9)也可得到左散索鞍处接触段左切点坐标 $(x_{B'}, y_{B'})$,进而可以检验悬空段的右端点 $(x_{1B'}, y_{1B'})$ 与接触段切点 $(x_{B'}, y_{B'})$ 是否共点,或里程和高程坐标误差是否满足精度要求。将其对散索鞍预偏量 θ 与左切点处竖切角 β' 两个独立的未知变量进行全微分,得到两者的影响矩阵关系,结果如式(13~17)。

$$\begin{cases} d(x_{B'} - x_{1B'}) \\ d(y_{B'} - y_{1B'}) \end{cases} = \begin{cases} dx_{B'} - dl_i \\ dy_{B'} - dh_i \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} d\theta \\ d\beta' \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} d\theta \\ d\beta' \end{cases} = \begin{cases} dx_{B'} - dl_i \\ dy_{B'} - dh_i \end{cases} = [\mathbf{B}] \begin{cases} dx_{B'} - dl_i \\ dy_{B'} - dh_i \end{cases} \quad (14)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{cases} A_{11} = -L_1 \sin(\gamma + \theta) - d_1 d_7 - q d_2 d_7 \\ A_{12} = -R_L \cos\beta' - d_1 d_8 - q d_2 d_8 + \frac{d_2 H_L}{\cos^2\beta'} \\ A_{21} = L_1 \cos(\gamma + \theta) - d_3 d_7 - q d_4 d_7 \\ A_{22} = -R_L \sin\beta' - d_3 d_8 - q d_4 d_8 + \frac{d_4 H_L}{\cos^2\beta'} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} d_1 = \frac{\partial l_i}{\partial S_{0i}}, d_2 = \frac{\partial l_i}{\partial V_i}, d_3 = \frac{\partial h_i}{\partial S_{0i}}, d_4 = \frac{\partial h_i}{\partial V_i} \\ d_5 = \frac{\partial L_{A'B'}}{\partial \theta}, d_6 = \frac{\partial L_{A'B'}}{\partial \beta'}, d_7 = -\frac{\partial S_{0c}}{\partial \theta}, d_8 = -\frac{\partial S_{0c}}{\partial \beta'} \end{cases} \quad (17)$$

式中 $d_1 \sim d_8$ 为影响矩阵 $[\mathbf{A}]$ 与逆矩阵 $[\mathbf{B}]$ 各元素参数,其中, $L_{A'B'}$ 为左散索鞍处不动点 A' 到左切点 B' 之间的直线距离,其他符号不变。

2.3.2 预偏量与索鞍处左切角调整量的确定

考虑到悬索强烈的非线性效应,若直接采用式(14)对预偏量和散索鞍处左切角进行增量修正,其迭代步长过大,容易出现不收敛的情况;若步长过小,则迭代次数过多,计算效率太低。因而,可引入一修正因子对增量进行修正,修正后的预偏量和散索鞍处左切角计算公式为

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 - f_{ac} [B_{11} d(x_{B'} - l_i) + B_{12} d(y_{B'} - h_i)] \\ \beta' = \beta'_0 - f_{ac} [B_{21} d(x_{B'} - l_i) + B_{22} d(y_{B'} - h_i)] \end{cases} \quad (18)$$

式中 索鞍预偏量 θ_0 初始值可取 0.0° ,左切点处竖切角 β'_0 初始值可取成桥状态对应的左切点竖切角; f_{ac} 为修正因子,其取值可由式(19)进行计算。需要说明的是,本文所有坐标误差精度均为 0.0001 m ,水平力误差精度为 0.01 kN 。

$$\begin{cases} \text{if } |x_{B'} - l_i| \geq 0.001 \text{ or} \\ |y_{B'} - h_i| \geq 0.001 \\ f_{ac} = 0.3 \\ \text{if } 0.0001 \leq |x_{B'} - l_i| < 0.001 \text{ or} \\ 0.0001 \leq |y_{B'} - h_i| < 0.001 \\ f_{ac} = 0.1 \end{cases} \quad (19)$$

2.4 空缆状态下边中跨内力与线形计算方法

边跨悬索是由散索鞍鞍槽内右半曲线(以不动点为分跨点)、悬空段(散索鞍右切点到主索鞍左切点间的索段)以及右主索鞍鞍槽内左半曲线三部分组成。假定散索鞍右切点处竖切角为 β ,右主索鞍左切点竖向切角为 φ' ,边塔鞍座半径为 R_R ,如图3所示,由式(8)可以得到右切点的坐标,同时根据摇

轴式散索鞍两侧缆力对摇轴中心的力矩平衡,则散索鞍右切点处的内力为

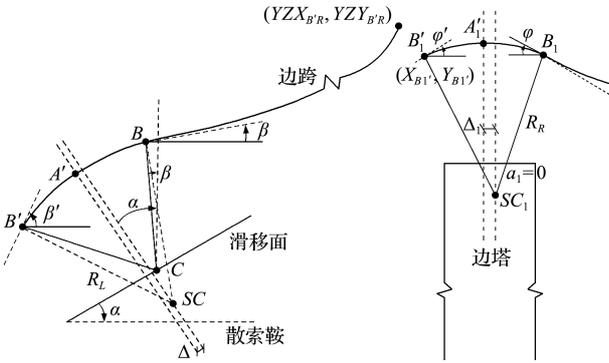


图3 空缆状态下边跨计算图示

Fig. 3 Calculation graphic of side spans under the free cable state

$$\begin{cases} T_2 = T_1 M_1 / M_2 \\ M_1 = \frac{|\tan \beta' X_C - Y_C + y_{B'} - \tan \beta' x_{B'}|}{\sqrt{\tan^2 \beta' + 1}} \\ M_2 = \frac{|\tan \beta X_C - Y_C + y_B - \tan \beta x_B|}{\sqrt{\tan^2 \beta + 1}} \\ H_2 = T_1 M_1 \cos \beta' / M_2, V_2 = -T_1 M_1 \sin \beta' / M_2 \end{cases} \quad (20)$$

式中 M_1 和 M_2 分别为摇轴中心 C 到左切点 B' 和右切点 B 的轴力方向的力臂。 H_L, V_1 和 T_1 为散索鞍左切点处主缆水平分力、竖向分力和轴向力, H_2, V_2 和 T_2 为索鞍右切点处主缆水平分力、竖向分力和轴向力。

由式(5, 8~10)可得到散索鞍鞍槽内右半曲线无应力长度 S_{0L} 、右主索鞍鞍槽内左半曲线无应力长度 S_{0R} 以及两切点坐标,以本跨总无应力长度不变 TS_0 为原则,悬空段无应力长度 S_{01zk} 为

$$S_{01zk} = TS_0 - S_{0L} - S_{0R} \quad (21)$$

同时,边塔主索鞍左切点内力与悬空段内力保持平衡,得到式(22),其中, V_{RL} 为边塔鞍座左切点处竖向力

$$V_{RL} = -H_2 \tan \varphi' = V_2 - q S_{01zk} \quad (22)$$

将式(21, 22)整理得到式(23)。

$$\begin{cases} m_8 - m_9 = 0, m_1 d\beta = m_2 d\varphi' \\ m_1 = \partial m_8 / \partial \beta, m_2 = \partial m_9 / \partial \varphi' \\ m_8 = -H_2 \tan \beta - q \left[TS_0 - \frac{R_L(\alpha - \beta + \arcsin(\frac{\Delta}{R_L}))}{1 + H_2 / (EA \cos \beta)} \right] \\ m_9 = -H_2 \tan \varphi' - \frac{q R_R(\varphi' - \arcsin(\Delta_1 / R_R))}{1 + H_2 / (EA \cos \varphi')} \end{cases} \quad (23)$$

式(23~25)中, $m_1 \sim m_9$ 均为影响矩阵计算过程的变量参数。

对于边跨悬空段,通过式(1~4, 8)可以得到边塔索鞍左切点竖向坐标 $YZY_{B'R}$; 同样,通过式(9)也可得到右主索鞍处左切点的竖向坐标 $Y_{B'R}$, 进而可以检验悬空段的右端点与右主索鞍接触段左切点高程坐标误差是否满足精度要求。根据式(23)将其对散索鞍右切点处竖切角 β 与左切点处竖切角 φ' 两个独立的未知变量进行全微分,得到右主索鞍接触段左切点高程坐标误差 $Y_{B'R} - YZY_{B'R}$ 与散索鞍右切点处竖切角 φ' 之间,以及无应力长度平衡 $m_9 - m_8$ 条件与左切点处竖切角 φ' 之间的增量变化关系为

$$\begin{cases} d(Y_{B'R} - YZY_{B'R}) = \left\{ R_L \sin \beta - m_3 m_5 + \frac{m_4 H_2}{\cos^2 \beta} - \frac{(R_R \sin \gamma + m_3 m_6) m_1}{m_2} \right\} d\beta \\ d(m_9 - m_8) = d\varphi' / m_2 \\ m_3 = \frac{q S_{0i} - V_i}{EA} - \frac{V_i - q S_{0i}}{\sqrt{H^2 + (V_i - q S_{0i})^2}} \\ m_4 = -\frac{S_{0i}}{EA} - \frac{1}{q} \frac{V_i}{\sqrt{H_i^2 + V_i^2}} + \frac{1}{q} \frac{V_i - q S_{0i}}{\sqrt{H_i^2 + (V_i - q S_{0i})^2}} \\ m_5 = - \left\{ -\frac{R_L}{1 + H_2 / (EA \cos \beta)} + \frac{R_L H_2 \sin \beta [\alpha - \beta + \arcsin(\Delta_L / R)]}{EA \cos^2 \beta [1 + H_2 / (EA \cos \beta)]^2} \right\} \\ m_6 = - \left\{ \frac{R_R}{1 + H_2 / (EA \cos \varphi')} - \frac{R_R H_2 \tan \varphi' [\varphi' - \arcsin(\Delta_R / R)]}{EA \cos \varphi' [1 + H_2 / (EA \cos \varphi')]^2} \right\} \end{cases} \quad (24)$$

得到左散索鞍处右切角 β 与右主索鞍左切点竖向切角 φ' 两个变量与本跨索段间的几何平衡条件之间的影响矩阵,进而可根据 2.4 节引入的修正因子,对误差进行修正并调整边跨左右鞍座切点处初始竖向切角,修正方法类似。

对于任意跨数的中跨,进行迭代计算的思路 and 过程基本上一致,只需左侧鞍座滑移面的倾角取零即可。

2.5 空缆线形半解析法及其迭代步骤

基于上述锚跨、边跨及中跨空缆线形计算方法,对任意跨空缆线形与内力计算,其计算流程如图 4 所示,空缆状态下主缆系统线形计算步骤具体如下。

(1) 输入主缆钢丝弹性模量、面积、各跨分跨点坐标、荷载、吊索索力和主跨矢跨比等参数,进行成桥状态计算分析^[12-15],输出成桥状态下各跨无应

力长度及内力与线形参数。

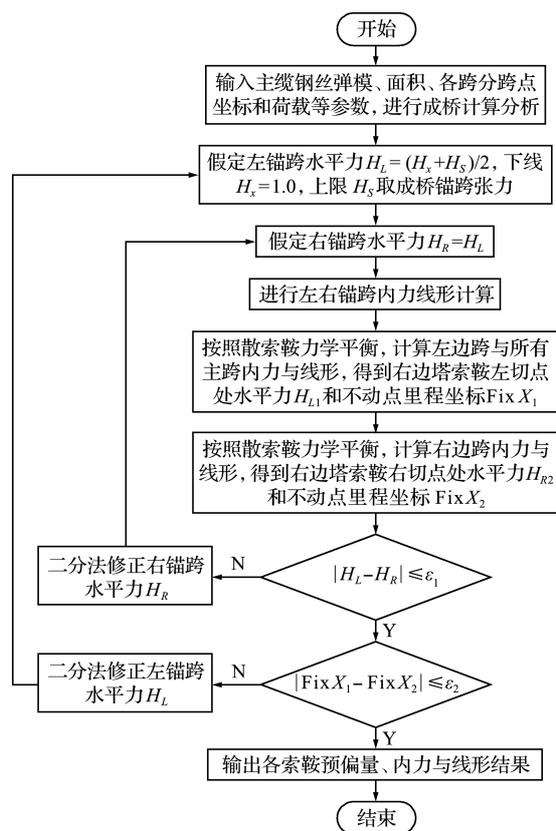


图4 任意跨空缆线形计算流程

Fig. 4 Calculation flowchart of unloaded cable shape with arbitrary span

(2) 取左锚跨水平分力初始值 $H_L = (H_x + H_s)/2$, 下限值 H_x 取 1.0, 上限值 H_s 取成桥状态左锚跨水平分力。

(3) 按照 2.2 节所述方法, 进行左锚跨的内力线形计算。

(4) 根据散索鞍力学平衡, 按照 2.3 节所述方法, 依次计算左边跨、所有主跨内力与线形, 得到右边塔索鞍左切点处水平力 H_{L1} 和不动点里程坐标 $Fix X_1$ 。

(5) 右锚跨水平分力 H_R 初始值取左锚跨水平分力初始值 H_L 。

(6) 按照 2.2 节所述方法, 进行右锚跨的内力线形计算。

(7) 按照散索鞍力学平衡, 计算右边跨内力与线形, 得到右边塔索鞍右切点处水平力 H_{R2} 和不动点里程坐标 $Fix X_2$ 。

(8) 检查右边塔索鞍两侧水平力差是否满足精度要求, 即 $|H_{L1} - H_{R2}| \leq \epsilon_1 = 0.01$ 。若满足精度要求, 则执行步骤(9), 若不满足, 可进行分级修正 H_R , 具体取值方法如式(26), 返回步骤(6), 重新计算直到右边塔索鞍两侧水平力差满足精度要求。

$$H_R = H_R + f_{ac} (H_{L1} - H_{R2})$$

$$\text{if } |H_{L1} - H_{R2}| > 10.0 \quad f_{ac} = 1.0 \quad (26)$$

$$\text{elseif } |H_{L1} - H_{R2}| > 1.0 \quad f_{ac} = 0.5$$

$$\text{elseif } |H_{L1} - H_{R2}| > 0.01 \quad f_{ac} = 0.1$$

(9) 检查由左锚跨到右边塔索鞍依次计算得到的不动点里程坐标 $Fix X_1$, 与由右锚跨到右边塔索鞍依次计算得到的不动点里程坐标 $Fix X_2$ 两者差是否满足精度要求, 即 $|Fix X_1 - Fix X_2| \leq \epsilon_2 = 0.0001$ 。若满足精度要求, 执行步骤(10), 否则采用二分法进行修正左锚跨水平力 H_L , 具体取值方法如式(27), 返回步骤(2), 重新计算直到不动点里程坐标误差满足精度要求。

$$\text{if } (Fix X_2 - Fix X_1) > \epsilon_2, H_x = H_L$$

$$f(Fix X_2 - Fix X_1) < -\epsilon_2, H_s = H_L \quad (27)$$

(10) 计算完成, 输出空缆状态下各索鞍预偏量以及各跨索段内力与线形结果。

本程序中, 关于先计算右锚跨还是先计算右边跨的问题, 若采用先计算右边跨再右锚跨的方法, 则右边跨计算会存在右边塔鞍座处右切角、右散索鞍左切角和右散索鞍预偏量 3 个未知变量, 采用影响矩阵法进行求解, 推导过程复杂且极易出现不收敛的问题, 因而采用先计算右锚跨后计算右边跨的思路。

3 算例分析

某非对称三跨地锚式悬索桥, 其跨径布置为 269 m + 926 m + 362 m, 桥塔侧吊索距桥塔中心线水平距离为 22 m, 其余吊索水平间距为 18 m; 主缆钢丝弹性模量 $E = 1.97 \times 10^5$ MPa, 两边跨主缆截面面积 $A_1 = 0.18557$ m², 中跨主缆截面面积 $A_2 = 0.17415$ m², 主跨矢跨比为 1/8.861; 左散索鞍滑移面倾角为 27.2039°, 右散索鞍滑移面倾角为 -22.1028°, 且均为摇轴式散索鞍, 半径均为 5.77 m; 主索鞍半径为 5.50 m。成桥状态下边跨沿缆集度为 14.92202 kN/m, 中跨沿缆集度为 14.04294 kN/m; 成桥状态下锚碇侧与塔侧的吊索为 3300.130 ~ 3400.210 kN, 其余吊索索力为 1473.330 ~ 1657.040 kN 不等。

3.1 成桥状态计算结果对比分析

根据本文理论与方法, 运用 VB.NET 编制了悬索桥主缆线形分析程序。先进行成桥状态下悬索桥内力与线形验算, 仅选取成桥状态下各跨水平力以及各跨索段无应力总长等重要参数, 与采用滑移刚度理论的悬索桥专业软件 BNLAS 理论值(传统

方法理论值)进行对比分析,具体列入表1和表2。可以看出,用于本文成桥线形计算的左锚跨水平张

力、各跨无应力总长以及各鞍座左右切点坐标等计算结果与BNLAS理论值误差很小,可忽略不计。

表1 成桥状态下各跨水平力与无应力总长对比

Tab.1 Comparison of horizontal force and total stress-free length of each span under bridge completion state

位置	本文计算值		BNLAS理论值		(本文-BNLAS理论值)/BNLAS理论值	
	水平力/kN	无应力总长度/m	水平力/kN	无应力总长度/m	水平力误差/%	无应力总长误差/%
左锚跨	89303.802	19.9313	89308.147	19.9313	-4.9E-05	0.0E+00
左边跨	104427.192	294.4435	104426.662	294.4438	5.1E-06	-1.0E-06
中跨	104427.192	953.3340	104426.662	953.3343	5.1E-06	-3.1E-07
右边跨	104427.192	383.8838	104426.662	383.8840	5.1E-06	-5.2E-07
右锚跨	89358.482	56.8184	89369.274	56.8184	-1.2E-04	0.0E+00

表2 成桥状态下各索鞍切点坐标对比

Tab.2 Comparison of tangent point coordinates of each saddle under completed bridge state

鞍座	本文计算值/m			BNLAS理论值/m		
	左切点坐标	不动点坐标	右切点坐标	左切点坐标	不动点坐标	右切点坐标
左散索鞍	(5110.3099, 53.9838)	(5111.0345, 54.4328)	(5111.8888, 54.7945)	(5110.3101, 53.9840)	(5111.0345, 54.4329)	(5111.8888, 54.7944)
左主索鞍	(5377.5193, 174.0273)	(5380.0000, 174.7879)	(5382.6214, 174.2959)	(5377.5194, 174.0278)	(5380.0000, 174.7883)	(5382.6214, 174.2964)
右主索鞍	(6503.5127, 174.3571)	(6306.0000, 174.8558)	(6308.4112, 174.2042)	(6303.5127, 174.3574)	(6306.0000, 174.8562)	(6308.4113, 174.2047)
右散索鞍	(6666.8548, 48.7229)	(6667.9561, 48.3918)	(6668.9095, 47.8889)	(6666.8548, 48.7229)	(6667.9561, 48.3918)	(6668.9088, 47.8894)

3.2 空缆状态结果对比分析

根据确立后的成桥状态下各跨线形与内力,进行空缆状态下悬索内力与线形验证,具体结果列表3和表4及图5和图6。可以看出,采用本文方法得到的空缆状态下计算结果与BNLAS理论值基本吻合,误差精度与计算效率均较高。其中最大误差1.2 mm,发生于右主索鞍左切点里程坐标处;考虑右边塔索鞍处主缆不动点里程误差精度为0.1 mm后,整个左锚跨水平力迭代过程仅21次,计算耗时仅为传统方法的30%。

表3 空缆状态下各索鞍预偏量对比

Tab.3 Comparison of pre-deviation of each saddle under empty cable condition

鞍座位置	本文计算值		BNLAS理论值		本文值-理论值	
	预偏角/(°)	预偏量/m	预偏角/(°)	预偏量/m	预偏角/(°)	预偏量/m
左散索鞍	0.9909	—	0.9915	—	-0.0006	—
左主索鞍	—	-0.8814	—	-0.8813	—	-0.0001
右主索鞍	—	1.1792	—	1.1791	—	0.0001
右散索鞍	-2.1423	—	-2.1411	—	-0.0012	—

表4 空缆状态下各索鞍切点坐标对比

Tab.4 Comparison of tangent point coordinates of each saddle under empty cable condition

鞍座	本文计算值/m			BNLAS理论值/m			本文(传统)方法 计算耗时/s
	左切点坐标	不动点坐标	右切点坐标	左切点坐标	不动点坐标	右切点坐标	
左散索鞍	(5110.3271, 53.9883)	(5110.9893, 54.4091)	(5112.0059, 54.8417)	(5110.3272, 53.9883)	(5110.9892, 54.4091)	(5112.0059, 54.8417)	
左主索鞍	(5376.6538, 174.0367)	(5379.1186, 174.7879)	(5381.5632, 174.3732)	(5376.6537, 174.0370)	(5379.1187, 174.7884)	(5381.5635, 174.3737)	
右主索鞍	(6304.8704, 174.4353)	(6307.1791, 174.8558)	(6309.5735, 174.2134)	(6304.8686, 174.4350)	(6307.1791, 174.8561)	(6309.5734, 174.2137)	1.12(3.83)
右散索鞍	(6666.6914, 48.7702)	(6668.0895, 48.3347)	(6668.9315, 47.8602)	(6666.6905, 48.7705)	(6668.0895, 48.3347)	(6668.9317, 47.8602)	

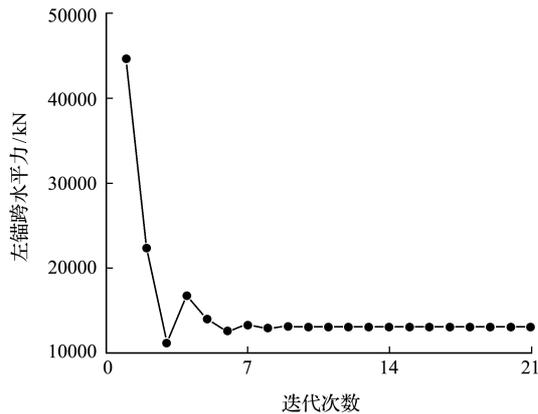


图5 空缆线形迭代过程锚跨水平力

Fig. 5 Horizontal force of anchor span in cable iteration process

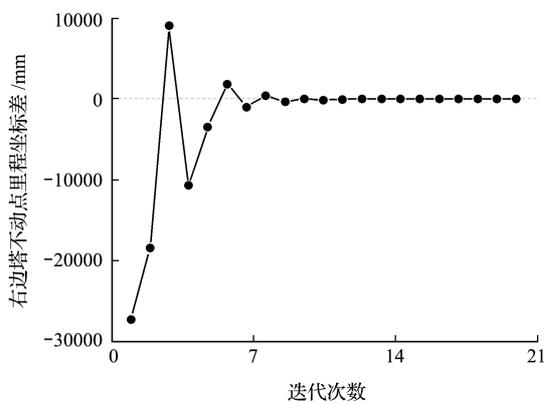


图6 右边塔不动点里程误差曲线

Fig. 6 Fixed point mileage error curve of right tower

4 结论

(1) 半解析基于分段悬链线理论,探讨了空缆状态线形计算存在的三种不同情况,确立了通过迭代求解左锚跨水平张力来确定空缆线形与内力的计算思路。

(2) 考虑鞍座对空缆线形的影响,以各跨无应力索长不变与鞍座两侧的力或力矩平衡为条件,推导了各跨左右鞍槽接触段和悬空段的内力与线形平衡方程,以及迭代过程中待求参数之间的影响矩阵及修正公式;以右边塔索鞍处不动点里程坐标误差为收敛条件,采用了二分法迭代出理论的左锚跨水平张力,进而得到空缆状态下各索鞍的预偏量以及各跨索段内力与线形。

(3) 本文方法迭代过程方便简洁,易收敛且精度高,无需往复固定或释放一个鞍座约束进行迭代求解,提高了计算效率,可适用于任意跨对称或非对称空缆线形的计算工作。

参考文献(References):

[1] 王邵锐,周志祥,高燕梅,等. 悬索桥主缆过三定点的精确线形数值解析计算方法[J]. 计算力学学报,

2015, **32**(5): 627-632. (WANG Shao-rui, ZHOU Zhi-xiang, GAO Yan-mei, et al. Analytical calculation method to calculate the precise main cable alignment of suspension bridge[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015, **32**(5): 627-632. (in Chinese))

[2] 唐茂林. 大跨度悬索桥空间几何非线性分析与软件开发[D]. 西南交通大学, 2003. (TANG Mao-lin. Spatial Geometric Nonlinear Analysis and Software Development of Long-Span Suspension Bridge [D]. Southwest Jiaotong University, 2003. (in Chinese))

[3] 罗喜恒. 复杂悬索桥施工过程精细化分析研究[D]. 同济大学, 2004. (LUO Xi-heng. Refined Analysis and Research on Construction Process of Complex Suspension Bridge [D]. Tongji University, 2004. (in Chinese))

[4] Ahmadi-Kashani K, Bell A J. The analysis of cables subject to uniformly distributed loads[J]. *Engineering Structures*, 1988, **10**(3): 174-184.

[5] Irvine H M. *Cable Structures*[M]. Cambridge, Mass: MIT Press, 1981.

[6] 严 琨,沈锐利. 基于细长梁单元的悬索桥主缆线形分析[J]. 计算力学学报, 2016, **33**(3): 381-387. (YAN Kun, Shen Rui-li. Study on main cable shape of suspension bridge based on slender beam element[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, **33**(3): 381-387. (in Chinese))

[7] 李传习,刘光栋,柯红军. 悬索桥主缆系统数值解析法计算的一种收敛算法[J]. 工程力学, 2008, **25**(7): 66-73. (LI Chuan-xi, LIU Guang-dong, KE Hong-jun. A convergent algorithm for numerical-analytic method of calculating main cable system of suspension bridge [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, **25**(7): 66-73. (in Chinese))

[8] Kim H K, Lee M J, Chang S P. Non-linear shape-finding analysis of a self-anchored suspension bridge [J]. *Engineering Structures*, 2002, **24**(12): 1547-1559.

[9] 项海帆. 高等桥梁结构理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2001. (XIANG Hai-fan. *Higher Bridge Structure Theory*[M]. Beijing: China Communications Press, 2001. (in Chinese))

[10] 马召宇,许福友,檀永刚. 悬索桥空间缆索实用找形方法[J]. 计算力学学报, 2021, **38**(5): 651-657. (MA Zhao-yu, XU Fu-you, TAN Yong-gang. A practical method for shape finding of spatial cable curves of suspension bridges[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(5): 651-657. (in Chinese))

[11] 罗凌峰,单德山,陈奉民,等. 销接式索夹悬索桥成桥线形的高精度计算方法[J]. 工程力学, 2021, **38**(8): 133-144. (LUO Ling-feng, SHAN De-shan, CHEN Feng-min, et al. High-precision calculation method for

- configuration of completed suspension bridges with pin-connected cable clamps[J]. *Engineering Mechanics*, 2021, **38**(8):133-144. (in Chinese))
- [12] 张志国,邹振祝,赵玉成,等.悬索桥主缆线形解析方程解及应用[J]. *工程力学*, 2005, **22**(3):172-176, 189. (ZHANG Zhi-guo, ZOU Zhen-zhu, ZHAO Yu-cheng, et al. Solution of main cable shape equations of a suspension bridge and its application[J]. *Engineering Mechanics*, 2005, **22**(3):172-176, 189. (in Chinese))
- [13] 肖汝诚,项海帆.大跨径悬索桥结构分析理论及其专用程序系统的研究[J]. *中国公路学报*, 1998(11):42-50. (XIAO Ru-cheng, XIANG Hai-fan. Structure analysis theory of large span suspension bridge and computer program research[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 1998(11):42-50. (in Chinese))
- [14] 邵旭东,程翔云,李立峰.桥梁设计与计算[M].北京:人民交通出版社,2007. (SHAO Xu-dong, CHENG Xiang-yun, LI Li-feng. *Bridge Design & Computation* [M]. Beijing: China Communications Press, 2007. (in Chinese))
- [15] 唐茂林,强士中,沈锐利.悬索桥成桥主缆线形计算的分段悬链线法[J]. *铁道学报*, 2003, **25**(1):87-91. (TANG Mao-lin, QIANG Shi-zhong, SHEN Rui-li. Segmental catenary method of calculating the cable curve of suspension bridge[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2003, **25**(1):87-91. (in Chinese))

Semi-analytical algorithm of cable shape under non-slip stiffness theory

DAI Bai-hua^{*1,2}, ZHU Jin-zhu^{1,3}, HU Qin-xia^{1,4}

(1. CCCC Second Harbor Engineering Co., Ltd., Wuhan 430040, China;

2. CCCC Highway Bridge National Engineering Research Center Co. Ltd., Beijing, 100120, China;

3. Key Laboratory of Long-Span Bridge Construction Technology, Wuhan 430040, China;

4. Research and Development Center of Transport Industry of Intelligent Manufacturing Technologies of Transport Infrastructure, Wuhan 430040, China)

Abstract: In order to calculate the unloaded cable shape of a suspension bridge more concisely and accurately in the design stage, a non-slip stiffness theoretical calculation method for the iterative process of horizontal tension-predeviation-corrected horizontal force of an anchor span is proposed. Based on the segmented catenary theory, three different situations of unloaded cable shape calculation are discussed, and the calculation ideas are on this basis. Under the horizontal tension of any anchor span, considering the influence of the saddle on the shape of the empty cable, the internal force and linear balance equations of the left and right saddle groove contact section and the suspended section of each span are derived under the condition that the unstressed cable length of each span is constant and the force or moment on both sides of the saddle is balanced. The influence matrix and correction formula between the parameters to be solved in the iterative process are also derived. Taking the coordinate error of the fixed-point mileage at the right tower saddle as the convergence condition, the dichotomy is used to update the theoretical horizontal tension of the left anchor span, and then the pre-deviation of each saddle and the internal force and linear displacement of each span cable segment under the condition of empty cable are obtained. The reliability of the method is verified by the comparison of examples. The results show that on the basis of the known structural parameters in the bridge state, only one variable parameter of the horizontal tension of the left anchor span is needed to obtain the cable strand alignment and internal force of each span and the saddle pre-bias. Compared with the traditional sliding stiffness theory method, the iterative process of this method is convenient and concise, easy to converge, and has high accuracy. It does not need to fix or release a saddle constraint repeatedly for iterative solution, which improves the calculation efficiency and is suitable for the design and calculation of symmetric or asymmetric cable of any span.

Key words: non-slip stiffness theory; unloaded cable shape; semi-analytic algorithm; influence matrix; correction method

引用本文/Cite this paper:

代百华,朱金柱,胡钦侠.非滑移刚度理论下的空缆线形半解析算法[J]. *计算力学学报*, 2023, **40**(3):456-463.

DAI Bai-hua, ZHU Jin-zhu, HU Qin-xia. Semi-analytical algorithm of cable shape under non-slip stiffness theory[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(3):456-463.