第39卷第6期
2022年12月

计 算 力 学 学 报
Chinese Journal of Computational Mechanics

Vol. 39, No. 6
December 2022

DOI:10.7511/jslx20210625002

矩形基础地基临塑荷载公式

许年春*[1,2]， 郑 瑞[1]， 吴同情[1,2]， 杨全虎[1]

(1.重庆科技学院 建筑工程学院,重庆 401331;2.能源工程力学与防灾减灾重庆市重点实验室,重庆 401331)

摘 要:目前土力学教材中给出的临塑荷载公式只适用于条形基础。实际工程中柱下矩形基础比条形基础应用更广泛,对矩形基础地基临塑荷载公式开展研究不仅对土力学学科发展具有理论意义,同时对矩形基础设计具有实践价值。首先通过二重积分得到矩形基底左右两侧区域内向上拉应力在基底边缘处产生的应力;再以条形基底地基中主应力方向建立局部直角坐标系,通过应力叠加得到矩形基底边缘处应力表达式;接着对开平方近似计算式中系数 n 的不同取值作误差分析;最后将应力表达式代入Coulomb强度准则,利用开平方近似计算式和三角函数级数展开式,通过求导得到矩形基础地基临塑荷载公式。不同类型地基土的算例表明,地基土泊松比越小,矩形基础与条形基础的地基临塑荷载比值越小,利用后者的临塑荷载公式计算前者的临塑荷载不安全。

关键词:临塑荷载;矩形基础;条形基础;开平方近似计算式;主应力

中图分类号:TU470;O39 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2022)06-0832-06

1 引 言

临塑荷载是指地基中即将出现塑性区时的基底压力,对应基础荷载-沉降曲线(p-s曲线)上的比例界限,目前土力学教材中给出的临塑荷载公式是根据条形荷载作用下地基中应力分布推导出来的,因此只适用于条形基础[1-4]。文献[2,3]认为将条形基础地基临塑荷载公式应用于矩形基础,其结果偏于安全,但均没有推导理论公式,也没有提供实验数据。

对于条形基础临塑荷载的研究主要集中于两个方面,一是研究侧向土压力系数 $K_0\neq1$ 时的临塑荷载[5,8],但文献[5,8]在推导方法或利用开平方近似计算式方面存在争议,所给临塑荷载公式正确性值得商榷;二是研究考虑中间主应力影响的临塑荷载,如文献[9-12]采用双剪强度准则替换库仑强度准则,将中主应力引入临塑荷载公式,计算出的临塑荷载大于教材上的公式结果。

经查阅文献,未发现矩形基础地基临塑荷载公式的研究报道,而在实际工程中柱下矩形基础比条形基础应用更广泛,对矩形基础地基临塑荷载公式开展研究不仅对土力学学科发展具有理论意义,同时对矩形基础设计具有实践价值。

收稿日期:2021-06-25;**修改稿收到日期**:2021-08-10.

基金项目:重庆市基础与前沿研究计划(cstc2015jcyjA30002)资助项目.

作者简介:许年春*(1977-),男,博士,教授(E-mail:351601872@qq.com).

2 条形基础地基临塑荷载公式

条形基础的受力可看成平面应变问题,如图1所示,p 表示基底压力,q 表示基础埋深范围内土体自重产生的压力。

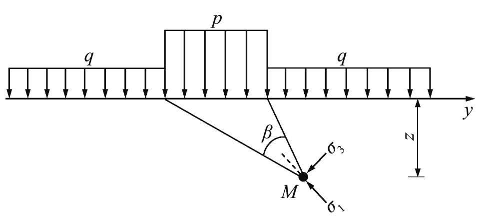

图1 条形基础地基中的附加主应力
Fig. 1 Additional principal stress in the subgrade under a strip footing

点 M 距基底的深度为 z,β 为点 M 到基底两端点的夹角。利用Flamant解可得到基底附加应力 p-q 在点 M 产生的主应力[1-4]为

$$\sigma_1=\frac{p-q}{\pi}(\beta+\sin\beta),\quad \sigma_3=\frac{p-q}{\pi}(\beta-\sin\beta)\quad (1a,1b)$$

且 σ_1 作用在 β 的角平分线上。

基底面以下土体重度 γ,当土体侧压力系数 $K_0=1$ 时,q 和基底面以下土体自重压力 γz 在各个方向上产生相等的压力,相当于静水压力,因此原主应力方向不发生改变,主应力可通过直接相加得到,即[1-4]

$$\sigma_1=\frac{p-q}{\pi}(\beta+\sin\beta)+q+\gamma z \tag{2a}$$

$$\sigma_3=\frac{p-q}{\pi}(\beta-\sin\beta)+q+\gamma z \tag{2b}$$

当点 M 达到极限平衡状态时，该点的大小主应力满足 Coulomb 强度准则，据此得到塑性区内任意一点的 z 与 β 角的关系，根据 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}\beta=0$ 可得到塑性区的最大开展深度 $z_{\max}$，对应 $\beta=\pi/2-\varphi$，$z_{\max}$ 随 p 的增大而增大，而 $z_{\max}=0$ 对应的 p 即为 $K_0=1$ 时条形基础地基临塑荷载 p_{crs}[1-4]，即

$$p_{crs}=\frac{\pi c\cot\varphi}{\cot\varphi+\varphi-\pi/2}+\frac{q(\cot\varphi+\varphi+\pi/2)}{\cot\varphi+\varphi-\pi/2}\tag{3}$$

式中　c 为土的粘聚力，φ 为土的内摩擦角，具体推导过程可详见土力学教材[1-4]。

实际地基土 $K_0<1$，临塑荷载小于式(3)的计算值，按照双剪统一强度理论，Coulomb 强度准则计算出的临塑荷载偏小，如果把这两个因素一起考虑，按式(3)计算条形基础临塑荷载仍然是合理的。$K_0<1$ 时土体自重应力会引起主应力轴的偏转，大大增加临塑荷载公式推导的难度；对于埋深较浅或地基承载力较大的基础，$K_0<1$ 对于临塑荷载影响很小；双剪统一强度准则的中间主应力影响系数需要通过专门实验才能确定，综合考虑以上因素，本文推导矩形基础地基临塑荷载公式时，假设 $K_0=1$，采用 Coulomb 强度准则。

3　矩形基础地基临塑荷载公式

3.1　基底边缘处的应力分析

如图 2 所示为线框表矩形基础底面，其宽度为 $2a$，长度为 $2b$，基底附加压力为 $p-q$，与条形基础相比，相当于在矩形基底左右两侧区域内作用向上的拉应力 $-p+q$。

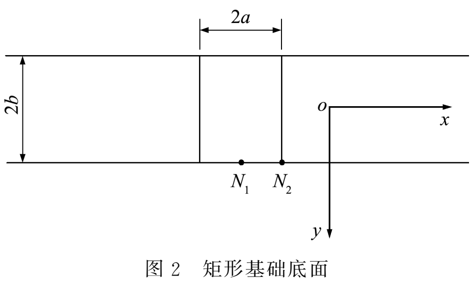

图 2　矩形基础底面

Fig. 2　Underside of a rectangular footing

将坐标原点 O 置于两侧区域内任一位置，如图 2 所示，x 轴与宽度方向平行，y 轴与长度方向平行，由于塑性区是从基底边缘处开始发展的，临塑荷载对应的塑性区开展深度为 0，故取基底宽度方向边缘处中点 N_1 和端点 N_2 作为观察点。由于点 N_1 的埋深 $z=0$，根据 Boussinesq 单个竖向集中力作用下的应力解[2-4]，左右两侧区域内拉应力 $-p+q$ 在点 N_1 产生的 y 方向正应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{y1-p+q}&=\frac{-(p-q)(1-2\mu)}{\pi}\times\int_{x=a}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{2b}\left(\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{d}y=\\&\frac{-(p-q)(1-2\mu)}{\pi}\times\int_{x=a}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{2b}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{4}$$

式中　μ 为地基土的泊松比，式(4)积分可得

$$\begin{aligned}\sigma_{y1-p+q}&=\frac{-(p-q)(1-2\mu)}{\pi}\int_{x=a}^{+\infty}\mathrm{d}x\left(\frac{y}{x^2+y^2}\bigg|_0^{2b}\right)=\\&\frac{-2b(p-q)(1-2\mu)}{\pi}\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4b^2}=\\&\frac{-(p-q)(1-2\mu)}{\pi}\operatorname{atan}\frac{x}{2b}\bigg|_a^{+\infty}=\\&\frac{-(p-q)(1-2\mu)}{\pi}\left(\lim_{x\to+\infty}\operatorname{atan}\frac{x}{2b}-\operatorname{atan}\frac{a}{2b}\right)=\\&\frac{-(p-q)(1-2\mu)}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\frac{a}{2b}\right)\end{aligned}\tag{5a}$$

对于条形基础，$a\gg b$，$\operatorname{atan}[a/(2b)]\approx\pi/2$，$\sigma_{y1-p+q}=0$。

同时 $-p+q$ 在点 N_1 产生的 z 方向(竖向)正应力和剪应力分别为

$$\sigma_{z1-p+q}=0,\ \tau_{yz1-p+q}=0\tag{5b,5c}$$

对于点 N_2，$-p+q$ 产生的 y 方向正应力为

$$\sigma_{y2-p+q}=\frac{-(p-q)(1-2\mu)}{2\pi}\left(\int_{x=-\infty}^{0}\mathrm{d}x+\int_{x=2a}^{+\infty}\mathrm{d}x\right)\times\int_0^{2b}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\tag{6}$$

式(6)积分可得

$$\sigma_{y2-p+q}=\frac{-(p-q)(1-2\mu)}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{atan}\frac{a}{b}\right)\tag{7a}$$

同时 $-p+q$ 在点 N_2 产生的 z 方向正应力和剪应力分别为

$$\sigma_{z2-p+q}=0,\ \tau_{yz2-p+q}=0\tag{7b,7c}$$

比较式(5～7)可知，$-p+q$ 在两点产生的竖向正应力和剪应力相等，y 方向正应力差别在于最后一项，点 N_1 为 $\pi/2-\operatorname{atan}[a/(2b)]$，点 N_2 为 $\pi/2-(1/2)\operatorname{atan}(a/b)$，在后面的公式推导过程中，为了节省篇幅，只对点 N_1 作详细介绍。

条形基底附加应力 $p-q$ 和土体自重压力作用下，地基中主应力仍如式(2)，对于点 N_1 和点 N_2，$\gamma z=0$，大小主应力分别为

$$\sigma_1=[(p-q)/\pi](\beta+\sin\beta)+q\tag{8a}$$

$$\sigma_3=[(p-q)/\pi](\beta-\sin\beta)+q\tag{8b}$$

3.2 基底边缘处的应力表达式

沿条形基底地基中主应力方向建立 y'-z' 局部直角坐标系，如图 3 所示。

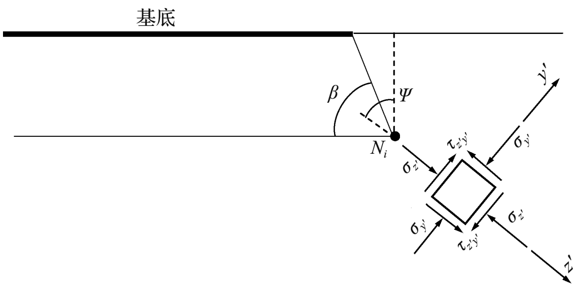

图 3 局部直角坐标系

Fig. 3 Local rectangular coordinate system

z' 与竖向的夹角为 Ψ，当点 N_1 无限接近地面时，点 N_1 与基底远端点连线近似为水平线，此时 $\Psi \approx \pi/2-\beta/2$，式(5)表示的应力在局部坐标系的应力为

$$\sigma_{z'1-p+q}=\frac{-(p-q)(1-2\mu)}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{atan}\frac{a}{2b}\right)(1+\cos\beta) \tag{9a}$$

$$\sigma_{y'1-p+q}=\frac{-(p-q)(1-2\mu)}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{atan}\frac{a}{2b}\right)(1-\cos\beta) \tag{9b}$$

$$\tau_{z'y'1-p+q}=\frac{(p-q)(1-2\mu)}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{atan}\frac{a}{2b}\right)\sin\beta \tag{9c}$$

点 N_1 的应力叠加为

$$\sigma_{z'}=\frac{p-q}{\pi}(\beta+\sin\beta)+q+\sigma_{z'1-p+q} \tag{10a}$$

$$\sigma_{y'}=\frac{p-q}{\pi}(\beta-\sin\beta)+q+\sigma_{y'1-p+q} \tag{10b}$$

$$\tau_{z'y'}=\tau_{z'y'1-p+q} \tag{10c}$$

3.3 开平方近似计算式及误差分析

为得到地基临塑荷载公式，需要先根据式(10)中各应力分量求出大小主应力，再将主应力代入 Coulomb 抗剪强度公式。然而求大小主应力涉及到开平方求根，导致临塑荷载公式推导很困难，因此，需要利用开平方近似计算式。

$$\sqrt{(\sigma_{z'}-\sigma_{y'})^2+4\tau_{z'y'}^2}\approx|\sigma_{z'}-\sigma_{y'}|+n|2\tau_{z'y'}| \tag{11}$$

式中 n 为正实数。

在 Mohr 应力圆中，点 N_1 的应力可用点 P 和点 Q 的坐标来表示，如图 4 所示为 $P(\sigma_{z'},\tau_{z'y'})$ 和 $Q(\sigma_{y'},-\tau_{z'y'})$（注：$\beta$ 值预估范围 1.0～1.8，由式(10)可以判断 $\sigma_{z'}>\sigma_{y'}$，$\tau_{z'y'}>0$）。PQ 相对于 σ 轴的转角为 2α。

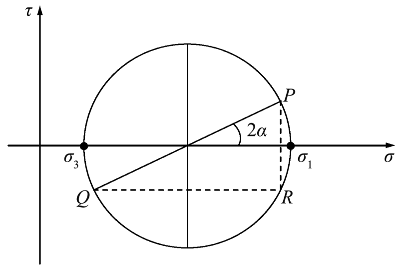

图 4 用 Mohr 圆上的点表示应力分量

Fig. 4 Denotes the stress components using points on Mohr-circle

$\sqrt{(\sigma_{z'}-\sigma_{y'})^2+4\tau_{z'y'}^2}$ 相当于线段 PQ 的长度，$\sigma_{z'}-\sigma_{y'}$ 相当于线段 QR 的长度，$2\tau_{z'y'}$ 相当于线段 PR 的长度。

近似计算式的误差率用 Δ 来表示

$$\Delta=\frac{||QR|+n|PR|-|PQ||}{|PQ|}\times 100\% \tag{12}$$

对 Mohr 圆直径 $|PQ|$ 任意取值，通过几何关系可得到不同 2α 值时的 Δ 值为

$$\Delta=|100\cos2\alpha+100n\sin2\alpha-100|\% \tag{13}$$

取 $n=0.06, 0.08, 0.1, 0.12, 0.14$ 和 0.16，分别作计算，图 5 给出 $2\alpha\in(0, 25°)$ 时 Δ 值变化。

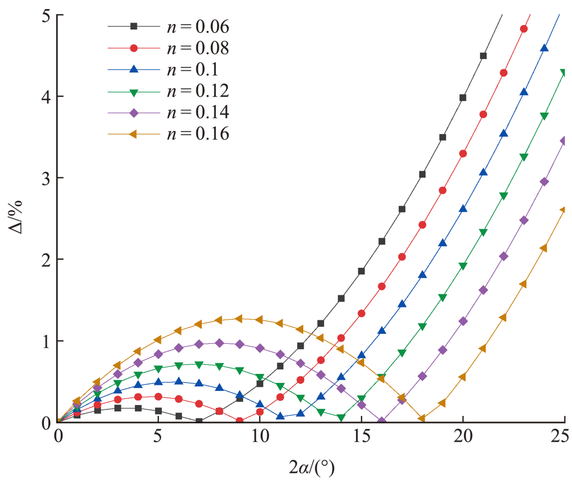

图 5 2α-Δ 关系

Fig. 5 Relationship between 2α and Δ

可以看出，随着 2α 的增大，Δ 先增大，后变小，再逐步增大。当 2α 较小时，n 取较小值时 Δ 较小，如 $2\alpha=10°$ 时，取 $n=0.08$，$\Delta<0.13\%$。当 2α 较大时，n 取较大值时 Δ 较小，如 $2\alpha=19°$ 时，取 $n=0.1$，$\Delta=2.19\%$；取 $n=0.12$，$\Delta=1.54\%$；取 $n=0.14$，$\Delta=0.89\%$；取 $n=0.16$，$\Delta=0.24\%$。

α 角对应 z' 轴与 σ_1 方向的夹角，对于条形基础，$\alpha=0$，对于矩形基础，主应力方向发生偏转，$\alpha>0$，即 α 为矩形基底左右两侧区域内拉应力引起的主应力轴偏转角度，其值取决于 σ_{y1-p+q} 和 σ_{y2-p+q} 与原主应力的大小对比，由式(5a，7a，8a， 8b)可见,α 角主要与地基土的泊松比 μ 和基础的宽长比 a/b 相关,μ 越小,α 越大,a/b 越小,α 越大。

3.4 临塑荷载公式

土的 Coulomb 抗剪强度极限平衡条件为

$$(\sigma_1-\sigma_3)/(\sigma_1+\sigma_3+2c\operatorname{ctg}\varphi)=\sin\varphi \tag{14}$$

根据主应力与应力分量的关系,极限平衡条件可以改写为

$$\frac{\sqrt{(\sigma_{z'}-\sigma_{y'})^2+4\tau_{y'z'}^2}}{\sigma_{z'}+\sigma_{y'}+2c\operatorname{ctg}\varphi}=\sin\varphi \tag{15}$$

将式(10)各应力分量代入式(15),利用开平方近似计算式(11),经化简得到式(16)。

$$\frac{p-q}{\pi}2\sin\beta-\frac{p-q}{\pi}(1-2\mu)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\frac{a}{2b}\right)\cos\beta+ n\frac{p-q}{\pi}(1-2\mu)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\frac{a}{2b}\right)\sin\beta= \left[\frac{p-q}{\pi}2\beta+2q-\frac{p-q}{\pi}(1-2\mu)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\frac{a}{2b}\right)\right]\sin\varphi+2c\cos\varphi \tag{16}$$

根据式(16)得 p 的表达式为

$$p=2\pi(q\sin\varphi+c\cos\varphi)/\left[2\sin\beta-2\beta\sin\varphi+(1-2\mu)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\frac{a}{2b}\right)(\sin\varphi-\cos\beta+n\sin\beta)\right]+q \tag{17}$$

点 N_1 临塑荷载 p_{cr1} 为 p 的最小值,式(17)右侧对 β 的导数等于0,得式(18)。

$$2\cos\beta-2\sin\varphi+(1-2\mu)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\frac{a}{2b}\right)\times(\sin\beta+n\cos\beta)=0 \tag{18}$$

利用三角函数的级数展开式,$\sin\beta\approx\beta-\beta^3/6$,$\cos\beta\approx1-\beta^2/2+\beta^4/27$(注:取 $\beta\in(1.0,1.8)$ 检验,最后一项分母取27,比取24有更高的精度)。

式(18)可转变为

$$A\beta^4+B\beta^3+C\beta^2+D\beta+E=0 \tag{19}$$

式中 $A=\dfrac{2}{27}+\left[n(1-2\mu)\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\dfrac{a}{2b}\right)\right]\Big/27$

$B=-\left[(1-2\mu)\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\dfrac{a}{2b}\right)\right]\Big/6$

$C=-1-\left[n(1-2\mu)\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\dfrac{a}{2b}\right)\right]\Big/2$

$D=(1-2\mu)\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\dfrac{a}{2b}\right)$

$E=2-2\sin\varphi+n(1-2\mu)\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\dfrac{a}{2b}\right)$

当 n 在0.06~0.16区间取值时,A的第二项相对于第一项很小,可以忽略(后面取多组参数进行检验,结果表明忽略该项引起的临塑荷载计算误差小于0.7‰),将式(19)转换成式(20)。

$$\beta^4+B'\beta^3+C'\beta^2+D'\beta+E'=0 \tag{20}$$

式中 $B'=-\dfrac{9}{4}(1-2\mu)\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\dfrac{a}{2b}\right)$

$C'=-\dfrac{27}{2}-\left[27n(1-2\mu)\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\dfrac{a}{2b}\right)\right]\Big/4$

$D'=\dfrac{27}{2}(1-2\mu)\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\dfrac{a}{2b}\right)$

$E'=27-27\sin\varphi+\dfrac{27n}{2}(1-2\mu)\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\dfrac{a}{2b}\right)$

式(20)有四个实数解,数学手册上有其求解方法,限于篇幅,在此不作详细介绍,直接给出在(1.0,1.8)范围内的解为

$$\beta=(-I-\sqrt{I^2-4J})/2 \tag{21}$$

式中 $I=(B'-\sqrt{8H+B'^2-4C'})/2$

$J=H-(B'H-D')/\sqrt{8H+B'^2-4C'}$

其中 $H=2\sqrt{-\dfrac{F}{3}}\cos\dfrac{\operatorname{acos}\dfrac{-G}{2\sqrt{-(F/3)^3}}}{3}+\dfrac{C'}{6}$

$F=\dfrac{B'D'-4E'}{4}-\dfrac{C'}{12}$

$G=\dfrac{B'C'D'+8C'E'-3B'^2E'-3D'^2}{24}-\dfrac{C'^3}{108}$

将式(21)代入式(17),即可求出点 N_1 临塑荷载 p_{cr1}。

将式(17,21)的 $\pi/2-\operatorname{atan}[a/(2b)]$ 用 $\pi/2-(1/2)\operatorname{atan}(a/b)$ 来代替,即可得到点 N_2 临塑荷载 p_{cr2}。

4 算 例

矩形基础的宽长比 a/b 一般大于0.5,算例中全部取 $a/b=0.5$。根据地基土的不同类型,粘土、粉质粘土、粉土、砂土和碎石土分别取 $\mu=0.42$,0.38,0.35,0.3和0.27;c 和 q 对计算结果影响很小,计算时 c 全部取20 kPa,q 取30 kPa;φ 根据地基土的类型变化,如粘土为10°~15°,碎石土为30°~35°。

表1列出了 p_{cr1}/p_{crs} 和 p_{cr2}/p_{crs} 的计算结果,其中 n 取值与计算出的 2α 值相关,$2\alpha=\operatorname{atan}[2\tau_{z'y'}/(\sigma_{z'}-\sigma_{y'})]$,先取 $n=0.10$,再根据计算出的 2α 值对 n 作调整(小幅调整 n 对 2α 没有影响,因此调整一次即可),点 N_1 与点 N_2 的 2α 很接近(最大相差0.2),点 N_2 的 2α 略大,表1列出了点 N_2 的 2α 及对应的 Δ 值。点 N_1 与点 N_2 的 β 几乎相等(最大相差0.01),表1列出了点 N_2 的 β 值。

由表1可知,(1)通过 n 取值的调整,可以保证开平方近似计算式的误差率很小,表1中 Δ 最大值为0.15%,最小值仅为0.02%;(2) p_{cr1}/p_{crs} 和 p_{cr2}/p_{crs} 均小于1.0,p_{cr2} 略小于 p_{cr1},μ 对临塑荷载比值影响明显,μ 越小,临塑荷载比值越小,$\mu=0.27$ 时,临塑荷载最小比值为0.765,此时矩形基础临塑荷载相对于条形基础有大幅下降;(3) φ 对临塑荷载比值影响不大,φ 增大,临塑荷载比值略减小,且 μ 越大,减小越明显。

取 $a/b=100$,此时基础相当于条形基础,对每个算例再次开展计算,计算出的 p_{cr1}/p_{crs} 均接近1.0,如 $\varphi=15°$,$\mu=0.42$ 时,$p_{cr1}/p_{crs}=1.000$;$\varphi=35°$,$\mu=0.27$ 时,$p_{cr1}/p_{crs}=0.999$,微小误差是由公式推导过程的近似计算引起的。

表1 p_{cr1} 和 p_{cr2} 计算实例
($a/b=0.5$, $c=20$ kPa, $q=30$ kPa)
Tab.1 Calculation examples of p_{cr1} and p_{cr2}
($a/b=0.5$, $c=20$ kPa, $q=30$ kPa)

φ/(°)	μ	n	Δ/%	β	p_{cr1}/p_{crs}	p_{cr2}/p_{crs}	2α/(°)
10	0.42	0.06	0.06	1.49	0.988	0.988	6.2
15	0.42	0.06	0.06	1.40	0.985	0.985	6.2
15	0.38	0.08	0.02	1.45	0.969	0.968	9.3
20	0.38	0.08	0.04	1.37	0.961	0.961	9.4
20	0.35	0.1	0.05	1.41	0.941	0.940	11.7
25	0.35	0.1	0.09	1.33	0.928	0.927	11.9
25	0.3	0.14	0.06	1.39	0.875	0.873	15.7
30	0.3	0.14	0.04	1.32	0.848	0.846	16.1
30	0.27	0.16	0.03	1.36	0.808	0.806	18.3
35	0.27	0.16	0.15	1.28	0.768	0.765	18.7

5 结 论

在条形基础地基临塑荷载公式的基础上,本文推导出了矩形基础地基临塑荷载公式。算例表明,(1)通过开平方近似计算式系数的调整,可以保证临塑荷载误差率小于0.2%;(2) μ 越小,矩形基础与条形基础的地基临塑荷载比值越小,套用式(3)计算矩形基础地基临塑荷载不安全。

文献[2,3]将条形基础地基临塑荷载公式应用于矩形基础,其结果偏于安全的说法是错误的,虽然普遍认为矩形基础的地基极限承载力大于条形基础,但那是因为矩形基础下单位长度内有更多的地基土体来消耗荷载能。临塑荷载是指地基中即将出现塑性区时的基底压力,其大小与更多土体耗能无关。相对于条形基础,矩形基底边缘处大小主应力都有减小,且 $\Delta\sigma_1<\Delta\sigma_3\tan^2(45°+\varphi/2)$,导致塑性区提前出现,结果是矩形基础地基临塑荷载小于条形基础。

参考文献(References):

[1] 陈晓平,傅旭东.土力学与基础工程[M].北京:水利水电出版社,2016.(CHEN Xiao-ping, FU Xu-dong. *Soil Mechanics and Foundation Engineering* [M]. Beijing: China Water & Power Press, 2016.(in Chinese))

[2] 赵明华.土力学与基础工程[M].武汉:武汉理工大学出版社,2014.(ZHAO Ming-hua. *Soil Mechanics and Foundation*[M]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2014.(in Chinese))

[3] 李镜培,梁发云,赵春风.土力学[M].北京:高等教育出版社,2008.(LI Jing-pei, LIANG Fa-yun, ZHAO Chun-feng. *Soil Mechanics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2008.(in Chinese))

[4] Liao H J. *Soil Mechanics*[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2015.

[5] 赵树德.地基弹塑性承载力 $K\neq1.0$ 时的计算公式[J].西安建筑科技大学学报,1995,**27**(3):294-298.(ZHAO Shu-de. Formulation of bearing capacity of subgrade with $K\neq1.0$ [J]. *Journal of Xi'an University of Architecture & Technology*, 1995, **27**(3):294-298.(in Chinese))

[6] 崔江余,宋金峰.地基临塑荷载的分析[J].工程力学,1998,**15**(4):96-100.(CUI Jiang-yu, SONG Jin-feng. The analysis of the critical edge pressure for subsoil [J]. *Engineering Mechanics*, 1998, **15**(4):96-100.(in Chinese))

[7] 梅 岭,梅国雄,易宗发.$K_0\neq1$ 时的地基临塑载荷和临界载荷近似计算公式[J].计算力学学报,2010,**27**(6):1090-1095.(MEI Ling, MEI Guo-xiong, YI Zong-fa. Approximate formulas of critical edge pressure and critical load of subsoil with $K_0\neq1$ [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(6):1090-1095.(in Chinese))

[8] 侯超群,张亭亭,孙志彬,等.$k_0\neq1$ 时条形荷载下地基承载力解析计算[J].中国科技论文,2018,**13**(1):23-26,44.(HOU Chao-qun, ZHANG Ting-ting, SUN Zhi-bin, et al. The analytical solution of the bearing capa-city for foundations under strip load with $k_0\neq1$ [J]. *China Sciencepaper*, 2018, **13**(1):23-26,44.(in Chinese))

[9] 周安楠,罗 汀,姚仰平.复杂应力状态下条形基础的临塑荷载公式[J].岩土力学,2004,**25**(10):1599-1602.(ZHOU An-nan, LUO Ting, YAO Yang-ping. Formula of critical edge load of strip foundation under complex stress state [J]. *Rock and Soil Mechanics*,

2004,**25**(10):1599-1602.(in Chinese))

[10] 隋凤涛,王士杰.统一强度理论在地基承载力确定中的应用研究[J].岩土力学,2011,**32**(10):3038-3042.(SUI Feng-tao,WANG Shi-jie. Research on application of unified strength theory to determining of bearing capacity of foundations [J]. *Rock and Soil Mechanics*,2011,**32**(10):3038-3042.(in Chinese))

[11] 王祥秋,杨林德,高文华.基于双剪统一强度理论的条形地基承载力计算[J].土木工程学报,2006,**39**(1):79-82.(WANG Xiang-qiu,YANG Lin-de,GAO Wen-hua. Calculation of bearing capacity about the strip foundation based on the twin shear unified strength theory [J]. *China Civil Engineering Journal*,2006,**39**(1):79-82.(in Chinese))

[12] 杨继强,孙 昕,崔向东.基于双剪统一强度理论的地基承载力计算方法研究[J].岩石力学与工程学报,2021,**40**(9):1923-1932.(YANG Ji-qiang,SUN Xin,CUI Xiang-dong. Research on calculation method of foundation bearing capacity based on double shear unified strength theory [J]. *Journal of Rock Mechanics and Engineering*,2021,**40**(9):1923-1932.(in Chinese))

The formula of subgrade's approaching plasticity load for rectangular footings

XU Nian-chun*[1,2], ZHENG Rui[1], WU Tong-qing[1,2], YANG Quan-hu[1]

(1. School of Civil Engineering and Architecture,Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 401331,China;

2. Chongqing Key Laboratory of Energy Engineering Mechanics & Disaster Prevention and Mitigation, Chongqing 401331,China)

Abstract:At present,the formula of subgrade's approaching plasticity load given in the textbook of soil mechanics is only applicable to strip footings. In practical engineering, rectangular footings under columns are more widely used than strip footings. The research on the formula of subgrade's approaching plasticity load for rectangular foundation has not only theoretical significance for the development of soil mechanics,but also practical value for the design of rectangular footings. At first,the stress at the edge of the footing caused by the upward tensile stress in the left and right side regions of the rectangular footing is obtained by double integral;Then,the local rectangular coordinate system is established along the principal stress direction in the subgrade under the strip footing,and the stress expression at the edge of the rectangular footing is obtained by stress superposition. Then,an error analysis is carried out on the approximate calculation formula for square root with different values of coefficient n;Finally,the stress expression is substituted into the Coulomb strength criterion,and the formula of subgrade's approaching plasticity load for rectangular footings is derived with the help of the square root approximation formula and the polar expansion of trigonometric function. The calculation examples of different types of subgrade soil show that the smaller the Poisson's ratio is,the smaller the ratio of approaching plasticity load of rectangular footing to strip footing is. It is not safe to use the latter's formula to calculate the former's approaching plasticity load.

Key words:approaching plasticity load;rectangular footing;strip footing;approximate calculation formula for square root;principal stress

引用本文/Cite this paper:

许年春,郑 瑞,吴同情,等.矩形基础地基临塑荷载公式[J].计算力学学报,2022,**39**(6):832-837.

XU Nian-chun,ZHENG Rui,WU Tong-qing,et al. The formula of subgrade's approaching plasticity load for rectangular footings[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2022,**39**(6):832-837.