DOI: 10.7511/jslx20210913001

基于PSO-BP模型的加筋双模量 矩形薄板弹性模量反演

刘 韡, 张宇鹏*, 宋永超

(西安建筑科技大学 理学院,西安 710055)

摘 要:为了利用少量观测点高效反演材料的弹性模量,本文利用基于粒子群算法优化 PSO(Particle Swarm optimization)的误差逆向传播网络 BP(back propagation)建立反演模型,利用粒子群算法对误差逆向传播网络的参数 进行寻优。以解析法求解双模量矩形薄板在不同弹性模量时的挠度作为训练样本,输入四个观测点的挠度值,利 用 PSO-BP模型对板的弹性模量进行反演。结果表明,PSO-BP模型可以建立挠度与弹性模量的联系,PSO 算法 可以提高 BP 模型的精度,加筋双模量矩形薄板的三个弹性模量的最大残差分别为 39.052 kPa,73.513 kPa 和 64.207 kPa,最大相对误差分别为 1.722%,3.681%和 3.637%。本模型可为工程实践提供参考和指导。

关键词: 双模量板; 矩形薄板; 弹性模量; 反演; 粒子群算法 中图分类号: O343 文献标志码: A 文章编号: 1007-4708(2023)02-0249-06

1 引 言

力学存在大量的正反问题。如已知薄板的物 理参数、几何大小、边界条件和荷载情况,求解薄板 的挠度、振动频率和屈曲临界荷载^[1-5],此为正问 题。当已知物理参数、几何大小、边界条件、荷载情 况和薄板上部分点的挠度,求解薄板的弹性模量, 此为反问题。上述反问题在工程领域有显著意义。 如在构件检测时,判断构件能否继续服役;在灾后 房屋检测时,判断屋面性能的损伤程度。对玻璃陶 瓷这类材料的检测也有重要作用。

弹性模量的测量十分繁琐,特别是大构件和不 可拆卸构件等无法利用试验台直接进行测量。文 献[6]引入锈蚀损失率计算弹性模量,不需要进行 试验测量,但存在锈蚀计算公式适用性低的问题。 文献[7]利用均匀化理论计算弹性模量,操作便捷, 但存在无法考虑损伤的问题。文献[8]建立了强 度、表观密度和弹性模量的计算关系,计算效率高, 但存在对不可拆卸构件的不适用性。

基于上述研究成果,针对精度、便捷无损和计 算效率的问题,利用神经网络可以学习数据本身的 联系以及学习复杂的映射关系^[9]的特点,建立利用 少量观测点的精度高、便捷无损和计算效率高的反 演模型。本文利用基于粒子群算法优化 PSO(Particle Swarm optimization)的误差逆向传播网络 (back propagation, BP)的薄板弹性模量反演模 型,利用粒子群算法对误差逆向网络的参数进行寻 优,结合薄板少量点位的挠度值,反演其弹性模量。 建立具有高泛化性和高精度的反演模型。

2 模型框架

2.1 目标问题

由于加筋双模量板的拉压弹性模量不同,板的 中性面位置不在板的中面处。为了将坐标轴取在 中性面上,首先需要求出板的中性面位置。

正问题中,已知薄板的弹性模量、几何大小、边 界条件和荷载情况,采用解析法求解薄板的挠度、 振动频率和屈曲临界荷载,以集中荷载为例,即

$$f_1(\mathbf{E}, \mathbf{F}, \boldsymbol{p}\boldsymbol{w}) = 0 \tag{1}$$

式中 *p*为微分算子,E为板的弹性模量,F为荷载 情况,w为板的挠度函数。

方程(1)需要边界条件(2)作为定解条件,即

$$w|_{\partial\Omega} = w_0, \ pw|_{\partial\Omega} = pw_0 \tag{2}$$

式中 ∂Ω为边界。

根据式(1,2)联立可得板的挠度函数,进而求 解板的应变和应力等物理量。

反问题中,已知几何大小、边界条件、荷载情况 和薄板上部分点的挠度,求解薄板的弹性模量,即

$$\mathbf{E} = f_2(\mathbf{F}, pw) \tag{3}$$

式中 p为微分算子, E为板的弹性模量, F为荷载

收稿日期:2021-09-13;修改稿收到日期:2022-01-12.

基金项目:国家自然科学基金(11872287)资助项目. 作者简介:张宇鹏*(1997-),男,硕士生

⁽E-mail:1633649163@qq.com).

情况, w 为板的挠度函数。边界同公式(2)。

2.2 PSO-BP模型

神经网络是对生物神经网络的一种模拟和近 似,是由大量神经元通过相互连接而构成的自适应 非线性动态网络系统^[10]。BP 神经网络是深度前 馈感知器的一种,其特点是工作信号正向传播,误 差反向传播。其内部结构包含了输入层、隐含层和 输出层^[11],内部结构如图1所示。原理是模型中 相邻两层每个神经元节点都接受其他层节点的信 号,再将带着权重的信号处理为一个输入值,然后 对比输入值与阈值,最后通过激活函数处理后输 出,此输出再作为下一层节点的输入,如此传递直 至完成全部路径。



Fig. 1 Structure of BP neural network model

先进行网络初始化,为了引入非线性使模型解 决不可分的问题,必须引入激活函数。常见的激活 函数有 Sigmoid 函数、tanh 函数和 ReLU 函数,此 处选择 Sigmoid 函数^[12-14],其表达式为

sigmoid(
$$Z$$
) = $1/(1 + e^Z)$ (4)
会 层输出为

隐含层输出为

$$H_j = \text{sigmoid}\Big(\sum_{i=1}^n w_{ij} x_{ij} + a_j\Big) \qquad (5)$$

(7)

输出层输出为
$$O_k = \sum_{i=1}^{n} H_{ij} w_{ij} + b_k$$
 (6)

式中 $e_k = Y_k - O_k$, Y_k 为期望输出。

权值更新公式为

$$\psi_{ij} = w_{ij} + \eta H_j (1 - H_j) x_i \sum_{k=1}^m w_{jk} e_k$$

$$(8)$$

$$w_{ik} = \eta w_{ik} + \eta H_j e_k$$

偏置更新公式为

$$\begin{cases}
 a_j = a_j + \eta H_j (1 - H_j) x_i \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k \\
 b_k = b_k + \eta e_k
\end{cases}$$
(9)

重复上述过程至误差或学习次数达标。

利用粒子群算法对 BP 神经网络的误差进行寻 优。粒子群算法是在一个 N 维搜索空间中,一个种

$$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$$
(10)
第 *i*个粒子的位置可以表示为

$$Z_i = (Z_{i1}, Z_{i2}, \cdots, Z_{iN})^{\mathrm{T}}$$
(11)

式中 Z_{iN} 为第 i 个粒子在第 N 维的位置。根据设 定的目标函数,计算出每个粒子在位置 Z_i时的误 差。本文误差为模型预测的弹性模量与正问题方 法计算值的均方误差 MSE(Mean square error), 其函数形式为

MSE =
$$\sum_{i=1}^{n} (E_i - E'_i)^2 / n$$
 (12)

式中 n为样本数, Ei 为弹性模量计算值, Ei 为模 型预测的弹性模量。其中,误差越小代表粒子位置 越好。

第 i个粒子的速度表示为

$$\mathbf{V}_i = (\mathbf{V}_{i1}, \mathbf{V}_{i2}, \cdots, \mathbf{V}_{iN})^{\mathrm{T}}$$
(13)

式中 V_{iN} 为第 i 个粒子在第 N 维的速度,随着粒 子群算法的迭代,每个粒子通过个体的最优值和全 局的最优值来更新自身的特征,更新公式为

$$V_{in}^{k+1} = \omega V_{in}^{k} + c_{1} r_{1} (P_{in}^{k} - Z_{in}^{k}) + c_{2} r_{2} (P_{jn}^{k} - Z_{jn}^{k})$$
(14)

$$Z_{in}^{k+1} = Z_{in}^{k} + \alpha V_{in}^{k+1}$$
(15)

式中 V_{in}^{k+1} 为粒子 *i* 在第 k+1 迭代中第 n 维的速 度。 Z_{in}^{k+1} 为在第k+1次迭代中第n维的位置,k为第 k 次迭代, ω为惯性权重, c₁ 和 c₂ 为学习因 子。本文所取粒子群参数列入表1。

表1 粒子群算法参数取值表

Tab. 1 Particle swarm algorithm parameter value table

参数	数值	参数	数值
种群粒子数	20	学习因子 C2	2.0
最大迭代次数	800	惯性权重 ω _{max}	0.9
学习因子 C ₁	2.0	惯性权重 ω _{min}	0.4

惯性权重作为调整和平衡算法的全局与局部 搜索能力的参数,对算法影响极大。表示当前迭代 的粒子继承前代迭代粒子速度的程度。本文选用 线性递减惯性权重[15],其表达式为

$$\omega_t = \omega_{\max} - (\omega_{\max} - \omega_{\min}) t / T \qquad (16)$$

式中 t为当前迭代次数,T为最大迭代次数, ω_{max} 和ωmin分别为初始最大和最小惯性权重。

2.3 计算流程

模型构建方法步骤及其流程(图 2)如下。

(1)将 w1, w2, w3和 w4 整理成标准格式待输 人。

 $\mathbf{E}\mathbf{E} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} e_k^2$



图 2 PSO-BP算法流程 Fig. 2 Flow chart of PSO-BP

(2) 初选 BP 模型的初始参数,同时设置初始 化粒子群参数(表 2)。

(3) 将初选 BP 模型的结果输出,并将其编码 成为粒子群中的粒子,进而生成标准算法。

(4)确定粒子初始特性,采用线性递减更新惯性权重因子 ω,对标准粒子群算法进行改进。

(5) 计算粒子群函数并且通过公式动态更新 粒子的速度与位置。

(6)判断是否满足停止标准或者达到最大迭 代次数。若满足,则输出确定最优的 BP 参数,代 入参数优化的 BP 模型,最后输出模型预测结果; 若不满足,则返回步骤(4),如此往复,直至满足停 止标准或者达到最大迭代次数。

3 算例分析

3.1 算例设置

设置 1 m×1 m 的加筋双模量矩形薄板,可等 效为上层为各向同性板和下层为正交各向异性板 组成的层合板。上下层厚度均为 0.01 m,上层泊 松比 ν_1 为 0.3,下层泊松比 ν_2 和 ν_3 分别为 0.3 和 $(E_3/E_2)(E_3/E_2)\nu_2$ 。设荷载为集中荷载,作用点 为板的中心点,大小为 1000 kN。观测点分布和边 界条件(左下两边固定,右上两边自由)如图 3 所示。

设置弹性模量梯度, E_1 , E_2 和 E_3 均在 E=1365(1-0.1*n*) kPa, $n=0,1,2,\cdots,10$ 上取值,即 E_1 , E_2 和 E_3 均共有 11 个取值。将所有 E_1 , E_2 和 E_3 进行组合,样本共计 11×11×11=1331 组。利 用正问题方法得到板在不同弹性模量情况下观测 点 1~4的挠度值。每组包括弹性模量 E_1 , E_2 和 E_3 及四个观测点的挠度值 w_1 , w_2 , w_3 和 w_4 。



Fig. 3 Distribution of observation points

将上述 1331 组数据作为训练样本输入 PSO-BP模型。

利用 random 函数随机生成测试样本, E_1 , E_2 和 E_3 均在(1365,2730) kPa 上选取。再利用正问 题方法计算得到四个观测点的挠度值 w_1 , w_2 , w_3 和 w_4 ,得到测试样本列入表 2。

表 2 测试样本数据 Tab.2 Test sample datas

序号	E1 /kPa	E2 /kPa	E3 /kPa	$w_{\rm l}$ /mm	₩2 /mm	w_3 /mm	w_4 /mm
1	1508.603	2273.065	1920.308	0.9482	2.9927	0.9360	2.9717
2	2366.804	1997.060	1765.427	0.7932	2.5024	0.7850	2.4882
3	1707.284	2438.930	2210.672	0.8434	2.6684	0.8368	2.6571
4	1861.772	2038.627	1739.248	0.8911	2.8095	0.8798	2.7901
5	2278.898	1998.276	1892.467	0.7889	2.4927	0.7853	2.4865
6	1802.673	1889.862	2327.346	0.8292	2.6334	0.8482	2.6576

模型的性能评价模型可靠和实用的前提为对 比模型的预测结果的偏差,选用残差值 ε 和相对误 差 δ 作为精度指标,其公式为

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_i - \mathbf{E}'_i \end{bmatrix} \tag{17}$$

 $\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\left(\mathbf{E}_i - \mathbf{E}'_i \right) / \mathbf{E}_i \right] \times 100 \% \tag{18}$

式中 E_i 为弹性模量计算值, E'_i 为模型预测的弹性模量。

3.2 结果分析

按上述操作训练 PSO-BP模型,并输出 6 组测 试样本的预测值,预测结果列入表 3。

表 3 测试样本预测结果

Tab. 3	Test san	ple forecast	results
--------	----------	--------------	---------

序	BP			PSO-BP			
号	E_1/kPa	E_2/kPa	E_3/kPa	E_1/kPa	E_2/kPa	E_3/kPa	
1	1411.267	2316.445	1842.125	1486.998	2298.228	1907.765	
2	2477.283	1864.558	1658.990	2405.856	1923.547	1701.220	
3	1821.305	2317.531	2086.951	1735.842	2381.164	2167.113	
4	1817.952	2098.663	1689.349	1847.286	2059.357	1718.667	
5	2219.934	1947.536	1832.224	2253.462	1969.681	1866.551	
6	1897.435	1814.338	2248.943	1833.714	1859.658	2303.446	

计算其精度指标,结果列入表4。

表 4 测试样本精度 Tab.1 Test sample accuracy

序	模型	E_1		E_2		E ₃	
号		ε̂/kPa	$\delta/\frac{0}{0}$	$\hat{\epsilon}/kPa$	$\delta/\frac{0}{0}$	ê∕kPa	$\delta/\%$
	BP	97.336	6.452	43.380	1.908	78.183	4.071
1	PSO-BP	21.605	1.432	25.163	1.107	12.543	0.653
2	BP	110.479	4.668	132.502	6.635	106.437	6.029
	PSO-BP	39.052	1.650	73.513	3.681	64.207	3.637
	BP	144.021	6.679	121.399	4.978	123.721	5.597
3	PSO-BP	28.558	1.673	57.766	2.369	43.559	1.970
	BP	43.820	2.354	60.036	2.945	49.899	2.869
4	PSO-BP	14.488	0.778	20.730	1.017	20.581	1.183
5	BP	58.964	2.587	50.740	2.539	60.243	3.183
	PSO-BP	25.436	1.116	28.595	1.431	25.916	1.369
6	BP	94.762	5.257	75.524	3.996	78.403	3. 369
	PSO-BP	31.041	1.722	30.204	1.598	23.9	1.027

分析表 4 可知, BP 模型和 PSO-BP 模型均可以 通过四个观测点的挠度值反演三个弹性模量。其中, BP 模型最大残差分别为 144.021 kPa,132.502 kPa 和 123.721 kPa,最大相对误差分别为 6.679%,6.635% 和 6.029%。虽然残差值相对不大,但相对误差较 大,说明 BP 模型可以一定程度上建立挠度和弹性 模量的联系。PSO-BP模型中弹性模量的最大残差 分别为 39.052 kPa,73.513 kPa 和 64.207 kPa,最 大相对误差分别为 1.722%,3.681% 和 3.637%。 表明 PSO 算法能显著优化 BP 网络,进而提高弹 性模量反演的精度。

进一步研究点位选择点位数量和 PSO 最大迭 代次数对模型精度的影响,观测点布置如图 3 所 示。设置五个组,分别为第一组(包含观测点 1~ 4),第二组(包含观测点 5~8),第三组(包含观测 点 1~4 和观测点 9),第四组(包含观测点 1~4 和 观测点 7),第五组(包含观测点 1~9)。设置 600, 700,800 和 900 四个最大迭代次数。

对比图 4~图 6 的第一组和第二组可知,当 观测点数量一致时,不同的位置分布对精度影响 不显著。对比第三组和第四组可知,改变其中一 个观测点的位置对精度影响不显著。对比第一 组、第三组和第五组可知,精度随着观测点数量 的增加而提高。

分析图 4~图 6 可知, PSO-BP 模型的精度随着 PSO 算法迭代次数的增加而提高,但精度的增幅逐渐减小。因为当迭代次数达到阈值时,模型已经能学习训练样本中的大部分联系,后续的学习偏向经验风险最小化,对精度的影响不显著。



5 结论

(1)将误差逆向传播网络引入矩形薄板弹性 模量反演是可行的,其可以有效地建立挠度与弹性 模量间的联系,进而通过挠度反演弹性模量。

(2)粒子群算法可以有效地优化误差逆向传播网络的参数,进而显著地提高模型精度。

(3)观测点数量一定时,不同的观测点分布 对精度的影响不显著。精度随观测点数量的增 加而提高。精度随 PSO 的最大迭代次数增大而 提高,但精度的增幅随 PSO 的最大迭代次数增大

253

而降低。

参考文献(References):

- [1] 王春玲,季泽华.一种可适用于正交异性矩形薄板弯曲稳定振动的双重正弦傅立叶级数通解[J].应用力 学学报,2010,27(3):616-621,653.(WANG Chunling, JI Ze-hua. A double fourier series solution for the bending, stability and vibration of orthotropic rectangular thin plate[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2010, 27(3):616-621,653.(in Chinese))
- [2] 曹彩芹,宋永超.多层正交异性矩形薄板弯曲振动稳定解析解[J].计算力学学报,2021,38(5):595-603.
 (CAO Cai-qin,SONG Yong-chao. Analytical solutions for bending, vibration and stability of multilayer orthotropic rectangular thin plates[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2021,38(5):595-603.
 (in Chinese))
- [3] 李 鵰.基于等效双模量的泡沫铝夹芯板力学特性研究[D]. 青岛大学,2018. (LI Peng. Study on Mechanical Properties of Foam Aluminum Sandwich Plate Based on Equivalent Double Modulus [D]. Qingdao University,2018. (in Chinese))
- [4] Jiang L X, Xiao S, Yang B, et al. Bimodulus constitutive relation and mesoscopic model of braided composites[J]. Composite Structures, 2021, 270:114115.
- [5] 韩朝晖.用 Chebyshev 函数研究双模量梁变形时的解析解[J]. 湘潭大学学报(自然科学版),2021,43(1):
 49-57.(HAN Zhao-hui. Research on the analytic solution of double modulus beam deformation based on Chebyshev function[J]. Journal of Xiangtan University (Natural Science Edition), 2021,43(1):49-57. (in Chinese))
- [6] 徐善华,任松波. 锈蚀后钢材弹性模量与屈服强度的 计算模型[J]. 机械工程材料,2015,39(10):74-78.
 (XU Shan-hua. REN Song-bo. The calculation model of elastic modulus and yield strength for corroded steel [J]. Materials for Mechanical Engineering, 2015,39(10):74-78. (in Chinese))
- [7] 邓方茜,徐礼华,池 寅,等. 基于均匀化理论的混杂 纤维混凝土有效弹性模量计算[J]. 硅酸盐学报, 2019,47(2):161-170. (DENG Fang-qian, XU Li-hua, CHI Yin, et al. Calculation of effective elastic modulus for hybrid fiber reinforced concrete based on homogenization theory [J]. Journal of the Chinese Ceramic

Society, 2019, 47(2):161-170. (in Chinese))

- [8] 刘 喜,史尚冕,赵天俊,等. 轻骨料混凝土弹性模量 计算模型分析[J]. 硅酸盐通报,2017,36(7):2192-2196,2202. (LIU Xi, SHI Shang-mian, ZHAO Tianjun, et al. Calculation model for elastic modulus of lightweight aggregate concrete [J]. Bulletin of the Chinese Ceramic Society, 2017,36(7): 2192-2196, 2202. (in Chinese))
- [9] Violet R C. Mathematical models for neural networks[J]. Regents of the University of California, 1967.
- [10] 周飞燕,金林鹏,董 军.卷积神经网络研究综述[J]. 计算机学报,2017,40(6):1229-1251. (ZHOU Feiyan, JIN Lin-peng, DONG Jun. Review of convolutional neural network [J]. Chinese Journal of Computers,2017,40(6):1229-1251. (in Chinese))
- [11] Rumelhart D E, Hinton G E, Williams R J. Learning representations by back-propagating errors[J]. Nature, 1986, 323(6088): 533-536.
- [12] 黄 毅,段修生,孙世宇,等.基于改进 sigmoid 激活 函数的深度神经网络训练算法研究[J]. 计算机测量 与控制,2017,25(2):126-129. (HUANG Yi, DUAN Xiu-sheng, SUN Shi-yu, et al. A study of training algorithm in deep neural networks based on sigmoid activation function [J]. Computer Measurement & Control,2017,25(2):126-129. (in Chinese))
- [13] 刘小文,郭大波,李 聪. 卷积神经网络中激活函数的 一种改进[J]. 测试技术学报,2019,33(2):121-125.
 (LIU Xiao-wen, GUO Da-bo, LI Cong. An improvement of the activation function in convolutional neural betworks [J]. Journal of Test and Measurement Technology,2019,33(2):121-125. (in Chinese))
- [14]周 畅,米红娟.深度学习中三种常用激活函数的性能对比研究[J].北京电子科技学院学报,2017,25
 (4):27-32.(ZHOU Chang, MI Hong-juan. Comparative study on the performance of three commonly used activation functions in deep learning [J]. Journal of Beijing Electronic Science and Technology Institute,2017,25(4):27-32.(in Chinese))
- [15] 彭正涛,方康玲,苏志祁.基于改进 PSO 算法的 Otsu 快速 多阈值图像分割[J].现代电子技术,2011,34
 (6):10-14. (PENG Zheng-tao, FANG Kang-ling, SU Zhi-qi. Fast multilevel threshold method for image segmentation based on improved particle swarm optimization and maximal variance [J]. Modern Electronics Technique,2011,34(6):10-14. (in Chinese))

Inversion of elastic modulus of stiffened double modulus rectangular thin plates based on PSO-BP model

LIU Wei, ZHANG Yu-peng*, SONG Yong-chao

(School of Science, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: In order to retrieve the Young's moduli of materials efficiently by using a small number of observation points, the inversion model of error Back Propagation Network (BP) based on Particle Swarm Optimization (PSO) is established in this paper, and the parameters of error back propagation network are optimized by particle swarm optimization. The deflection of double modulus rectangular thin plate with different elastic moduli is solved by an analytical method as the training sample. The deflection values of four observation points are taken as the input, and the Young's moduli of the plate are determined through inverse analysis from the PSO-BP model. The results show that the PSO-BP model can establish the relationship between deflection and elastic modulus, and PSO algorithm can improve the accuracy of the BP model. The maximum residuals of three values of the Young's moduli of a reinforced double modulus rectangular thin plate are 39.052 kPa,73.513 kPa and 64.207 kPa respectively, and the maximum relative errors are 1.722%, 3.681% and 3.637% respectively. The model can provide reference and guidance for engineering practice.

Key words: dual-modulus plate; rectangular thin plate; bending; arbitrary boundary conditions; PSO

引用本文/Cite this paper:

刘 韡,张宇鹏,宋永超.基于 PSO-BP模型的加筋双模量矩形薄板弹性模量反演 [J]. 计算力学学报, 2023, 40(2): 249-254.

LIU Wei, ZHANG Yu-peng, SONG Yong-chao. Inversion of elastic modulus of stiffened double modulus rectangular thin plates based on PSO-BP model[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(2): 249-254.