

文章编号:1001-4888(2011)06-0686-06

基于噪声和残缺投影图像的重建算法研究^{*}

卢斌¹, 胡小方¹, 许峰¹, 蒋锐¹, 袁清习²

(1. 中国科学技术大学 中国科学院材料力学行为和 Design 重点实验室, 合肥 230026;

2. 中国科学院高能物理研究所, 北京 100039)

摘要: 滤波反投影法和迭代法是 SR-CT 重建算法中的两大类算法, 松弛迭代法是迭代法中的一种; 本文主要研究滤波反投影方法和松弛迭代法。为了研究两种方法的影响因素, 讨论了滤波反投影法中滤波函数的选取, 分析了松弛迭代法中重要参数, 如松弛因子、迭代次数对重建效果的影响, 给出了重建效果和这些参数的影响关系; 对比了两种方法在处理噪声和残缺投影数据中的重建效果, 并将松弛迭代法应用于实验结果处理中。

关键词: 同步辐射 X 射线计算机断层摄影术(SR-CT); 滤波反投影; 松弛迭代法; 残缺数据; 噪声数据

中图分类号: TP301

文献标识码: A

0 引言

SR-CT 方法是一种新兴的检测方法, 在材料微结构三维演化检测中有着独特优势, 它的优点是可以实现实时、无损的检测, 这使得它越来越多地被应用在各个领域中^[1-3], 其中重建算法的研究一直以来都是众多学者研究的热点^[4-5]。SR-CT 重建算法主要包括两大类: 滤波反投影重建算法和迭代重建算法。基于这两类算法, 有学者提出了基于两种算法优点的混合算法^[6]。迭代法的重建效果好, 但缺点是计算量大, 有时需要大量的迭代过程。松弛迭代法是迭代法的一种, 合理的选取松弛因子可以有效地减少迭代次数和提高重建质量。滤波反投影算法的重建效果主要受其滤波窗函数的影响, 而松弛迭代法主要受松弛因子和迭代次数的影响。在实际应用中, 由于实验条件的限制和缩短数据采集量的要求, 常常仅得到部分投影角度的残缺数据, 同时, 投影数据中会掺杂着噪声^[7-9]。因此, 有必要研究算法来适应实际中的重建要求。

1 CT 原理介绍

1.1 CT 原理

由物体的二维截面或断面向该平面内的各个方向作投影, 可获得一系列的一维投影函数。由这些一维投影函数来重建该二维截面或者三维形貌结构称为图像重建, 最典型的是计算机断层成像技术(Computed Tomography), 简称为 CT 技术^[10]。CT 的思想起源于奥地利数学家 Radon, Radon 于 1917 年证明了下述定理:

若已知某函数 $f(x, y) = f'(r, \theta)$ 沿直线的线积分为:

^{*} 收稿日期: 2011-04-12; 修回日期: 2011-08-17

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(10872190)、重点项目(10732080)与北京同步辐射实验室(BSRF)基金共同资助

通讯作者: 胡小方(1962-), 博士生导师, 主要从事光学无损检测以及微结构演化的研究。E-mail: huxf@ustc.edu.cn

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f'(r, \theta) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\sqrt{l^2 + s^2}, \phi + \tan^{-1} \frac{s}{l}) ds \quad (1)$$

则

$$f'(r, \theta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r \cos(\theta - \phi) - l} \frac{\partial p}{\partial l} dl d\phi \quad (2)$$

式中各量的意义见图1, 式(1)称为 Radon 变换, 实际上就是射线投影, 式(2)则称为 Radon 反变换, 是根据投影 p 重建图像 f' 。

1.2 图像重建质量判据

图像重建算法的研究常常借助于模型作为原始图像。模型通常是由自己设定且赋予一定密度值的图形, 模型设定好后, 利用数字图像处理的方法对其进行旋转投影成像, 接着从获得的投影像中求出投影值, 再根据这些投影值, 采用研究的算法进行重建, 最后将计算得到的图像与模型进行比较评价, 而评价的标准是借助图像质量评价参数来进行的。

本文采用均方判据 σ 评价重建图像的质量。 σ 越小, 表明重建图像和原图越接近。其定义为:

$$\sigma = \left[\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (f_i - f_j)^2}{N \cdot N} \right]^{1/2} \quad (3)$$

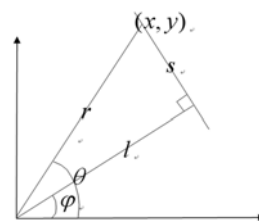


图1 Radon 变换中所用的坐标系

Fig. 1 The coordinate used in Radon Transformation

2 滤波反投影法

滤波反投影方法的优点是算法简单, 计算速度快, 对足够精确的投影数据能够得到很好的重建效果。但是噪声性能不好, 而且对于残缺角的投影重建效果不好, 另外会出现星状尾迹。对于滤波反投影方法, 滤波函数和内插函数的选取是很关键的。滤波函数的选取, 应该考虑下面的情况:

- (1) 投影数据的高频分量幅度很小;
- (2) 投影数据的采集是天然分离的;
- (3) 存在噪声。

下面给出几种插值函数重建的 SiC 粉末横截面见图2。

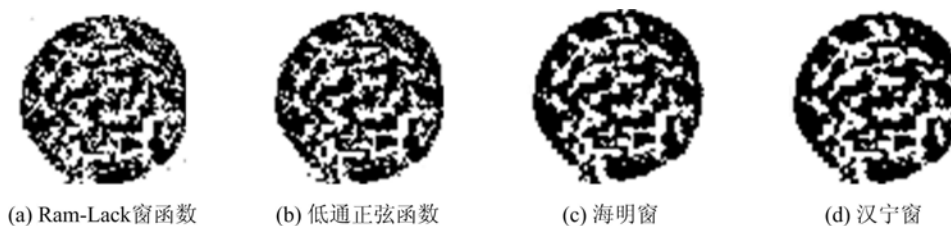


图2 四种窗函数对试验结果的横截面重建

Fig. 2 Cross Section rebuilding in use of four kinds of window function

(a) Ram-Lack Function; (b) lowpass-sine function; (c) Hamming Function; (d) Hanning Function

分析: 使用 Ram_Lack 窗函数重建的图像轮廓清晰, 但是局部不够平滑; 而海明窗函数和汉宁窗函数重建的比较平滑, 但是图像不够细致; 低通正弦函数介于几者之间, 适用于 SR-CT 重建。

3 松弛迭代重建法

松弛迭代重建技术的实质是利用松弛迭代法求解 Radon 变换积分方程组。依据待求图像离散化处理方式的差异, 不同文献介绍的图像迭代法重建方法不尽相同, 但是从数学上来说, 本质是一致的。

松弛迭代技术主要分离散、半离散和全投影三种,全投影方法在代数迭代重建过程中有更广的适用领域。

$$\begin{cases} f^{(k)}(x) \\ f_0(x) = f^{(k)}(x) \\ f_j(x) = f_{j-1}(x) + \omega \frac{n-1}{|S^{n-2}|} (\omega(x - \theta_j)^{1-n} (g_j - \mathcal{R}_{\theta} f_{j-1}(x)) (x\theta_j)) \\ f^{(k+1)}(x) = f_p(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (3)$$

式中, $j=1, \dots, p$; $x\theta_j$ 为向量内积; $\mathcal{R}_{\theta}$ 为 Radon 变换。

迭代过程具有半收敛性,松弛因子 ω 的选取对算法不仅影响运算速度,也直接影响到重建效果。较大的 ω 利于重建图像 f 的精细部位;较小的 ω 利于重建图像 f 的平滑区域。

ω 的选取范围为 $[0, 2]$,选取方法主要有逐步实验法和折半查找法。

为了研究松弛迭代法的收敛性,构造如图 3(a)所示的模型。松弛迭代重建结果见图 3。

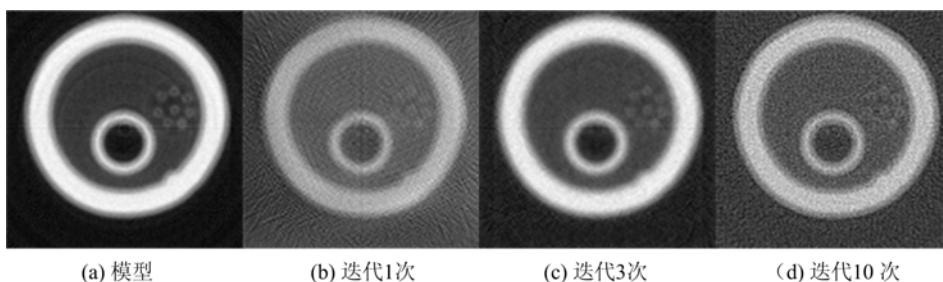


图 3 不同迭代次数下的重建图像

Fig. 3 Image reconstruction in different iteration times

(a) model; (b) iteration-times=1; (c) iteration-times=3; (d) iteration-times=10

图 3、图 4 表明迭代过程具有半收敛性,其最佳迭代次数为 3。

图 4 所示为松弛因子 $\omega=0.1$ 时,图像重建质量和迭代次数的关系。图 5 所示为不同松弛因子下最佳重建图像质量的曲线。

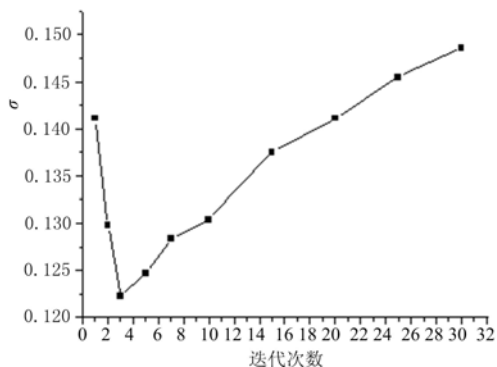


图 4 σ 随迭代次数的变化曲线

Fig. 4 The curve of the factor of σ varied by iteration times changed

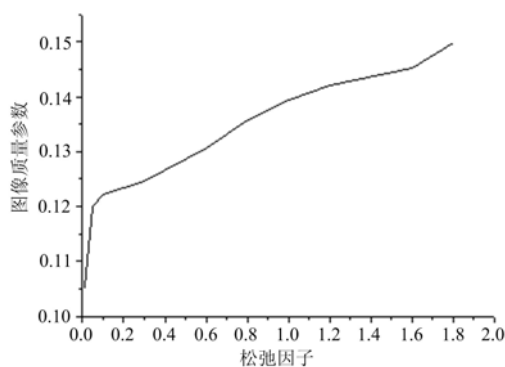


图 5 σ 随松弛因子的变化曲线

Fig. 5 The curve of the factor of σ varied by relaxation factor changed

表 1 所示为最佳迭代次数和松弛因子、以及图像质量参数之间的关系。可见松弛因子越小,需要的最佳迭代次数越多,而图像重建质量也越好。表 2 所示为松弛因子为 $\omega=0.1$ 时,图像重建的质量评价参数和迭代次数的关系。

表 1 在不同松弛因子下的最佳迭代次数及其对应重建图像的质量评价参数值
Tab. 1 The best iteration times and quality evaluation in different relaxation factors

ω	0.01	0.05	0.1	0.3	0.6	0.8	1	1.2	1.6	1.8
k	30	10	3	3	3	3	5	5	7	10
σ	0.1053	0.1199	0.1222	0.1245	0.1307	0.1357	0.1394	0.1420	0.1452	0.1498

表 2 在 $\omega=0.1$ 时不同迭代次数对应重建图像的质量评价参数
Tab. 2 The quality evaluation with different iteration times when $\omega=0.1$

k	1	2	3	5	7	10	15	20	25	30
σ	0.1411	0.1298	0.1222	0.1247	0.1283	0.1304	0.1375	0.1411	0.1455	0.1486

4 松弛迭代法和滤波反投影重建技术在残缺投影和噪声投影数据上的性能

4.1 残缺投影

滤波反投影重建射线束在 $45^\circ \sim 135^\circ$ 范围内旋转 $p=50$ 次,每次角增量为 $\pi/100$,此处 $\sigma=0.2667$ 。松弛迭代技术图像重建射线束在 $45^\circ \sim 135^\circ$ 范围内旋转 $p=20$ 次,旋转角增量为 $\pi/40$, $\omega=0.1$;迭代次数为 12, $\sigma=0.1405$ 。

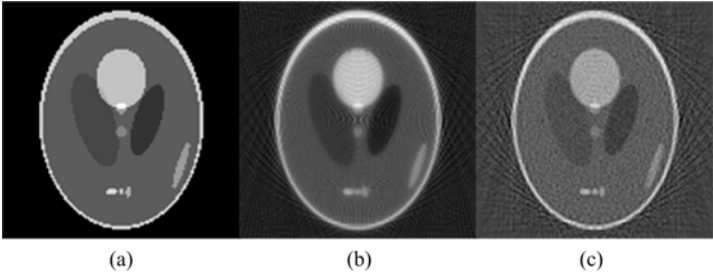


图 6 残缺角度下滤波反投影和松弛迭代法重建效果图
(a) 模型, (b) 松弛迭代算法重建, (c) 滤波反投影重建

Fig. 6 Image reconstruction with filter back projection method and relaxation iteration method in missing data,
(a) model, (b) image rebulid by the relaxation iteration method,
(c) image rebulid by the filter back projection method

由图 6 可以看出,在投影数据缺损处出现明显的伪迹,即图像失真,伪迹也出现在密度的不连续处。由仿真模型可以看出,在投影数据不完全时,对松弛迭代技术图像重建没有严重影响。这是松弛迭代技术较之滤波反投影图像重建技术的优势。

4.2 噪声数据图像重建

r 为相加型高斯白噪声,其功率谱密度为 $|R|^2$ 。 g 的功率谱密度记为 $|G|^2$ 。模拟噪声的功率谱密度为 $|R|^2=0.1 \times |G|^2$,如图 7 所示。

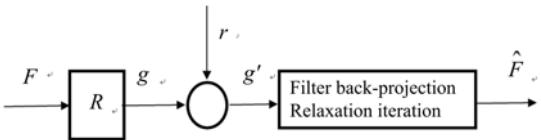


图 7 在模型中加入高斯噪声
Fig. 7 Add Gaussian noise to the model data

滤波反投影重建图像: 射线束在 $0 \sim 180^\circ$ 范围内旋转 $p=100$ 次,重建效果见图 8,此处 $\sigma=0.1813$ 。
松弛迭代技术重建图像: 射线束在 $0 \sim 180^\circ$ 范围内旋转 $p=100$ 次, $\omega=0.01$,迭代次数为 7,此处 $\sigma=0.1550$ 。

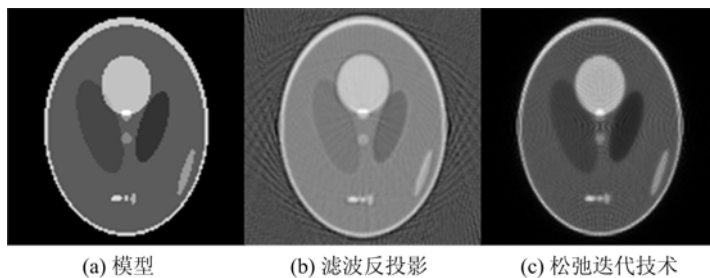


图 8 对于噪声数据滤波反投影法和松弛迭代法的重建效果对比

Fig. 8 The contrast between the rebuilding effects of the filter back projection method and relaxation iteration method based on the noise data

(a) model; (b) filter back projection; (c) relaxation iteration

在含强噪声的应用环境中(见图 8),特别是投影数据较少的情形下,松弛迭代技术较之滤波反投影图像重建有一定的优势。利用松弛迭代技术进行图像重建,可以通过合理的选取松弛因子 ω ,达到抑制噪声的目的。此时的 ω 应该选取比较小的数值。一般来说,较小的 ω 有利于提高重建图像的质量,但是迭代的速度较慢。

4.3 实验中的应用

前已述及,松弛迭代重建技术主要应用在不完全投影数据(残缺角)和噪声比较大的投影数据。将松弛迭代法应用到实验的图像重建中,在缺失角的情况下,松弛迭代重建的结果见图 9。



图 9 显示的是残缺角 $\alpha=50^\circ, 40^\circ, 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ, 0^\circ$ 时利用松弛迭代重建技术得到的横截面图

Fig. 9 It shows the section rebuilt by the relaxation iteration method when the missing angle is 50 degrees, 40 degrees, 30 degrees, 20 degrees, 10 degrees, 0 degree.

5 总结

(1) 滤波反投影中的插值函数和滤波函数对重建图像质量的影响:使用 Ram_Lack 窗函数重建的图像轮廓清晰,但是局部不够平滑;而海明窗函数和汉宁窗函数重建的比较平滑,但是图像不够细致;低通正弦函数介于几者之间,适用于 SR-CT 重建。

(2) 松弛迭代技术中松弛因子 ω 和迭代次数对重建的影响:松弛迭代属于半收敛迭代,对于一定的 ω ,有一对应的最佳迭代次数,补偿小于或者大于这个最佳值,重建效果都不好。 ω 越小,对应的最佳迭代次数越大,重建的图像也越好。

(3) 在含强噪声的应用环境中,特别是投影数据较少的情形下,松弛迭代技术较之滤波反投影图像重建有一定的优势。利用松弛迭代技术进行图像重建,可以通过合理的选取松弛因子 ω ,达到抑制噪声的目的。此时的 ω 应该选取比较小的数值。一般来说,较小的 ω 有利于提高重建图像的质量,但是迭代的速度较慢。

参考文献:

- [1] Elmoutaouakkil A, Fuchs G, Bergounhon P, Peres R, Peyrin F. Three-dimensional quantitative analysis of polymer foams from synchrotron radiation X-ray microtomography[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2003, 36: A37-A43.
- [2] 胡小方, 景晓宁, 赵建华, 王亚欧, 田玉莲. 应用 SXR-CT 技术研究陶瓷材料的孔隙结构及密度分析[J]. 实验力学, 2003, 18(4): 485-489 (HU Xiaofang, JING Xiaoning, ZHAO Jianhua, WANG Yaou, TIAN Yulian. Study

- on the Porosity and Density Distribution of Ceramics Using SXR-CT Technique[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2003, 18(4):485—489 (in Chinese))
- [3] 景小宁, 胡小方, 赵建华, 王亚鸥, 田玉莲. SXR-CT 技术应用研究烧结陶瓷三维微结构拓扑形貌[J]. 材料科学与工程学报, 2003, 21(3):327—330 (JING Xiaoning, HU Xiaofang, ZHAO Jianhua, WANG Yaou, TIAN Yulian. Application of synchrotron computed microtomography to study 3D poretopology and density distribution insintered cermics[J]. Journal of Materials Science & Engineering, 2003, 21(3):327—330 (in Chinese))
- [4] Chukalina M, Golosio B, Simionovici A, Funke H. X-ray tomography: how to evaluate the reconstruction quality [J]. Spectrochimica Acta Part B, 2004, 59:1755—1758.
- [5] 姚红兵, 贺安之. 光学层析重建算法改进的研究[J]. 光学学报, 2004, 24(2): 158—161 (YAO Hongbing, HE Anzhi. Improvement of the reconstruction algorithm of optical computerized tomography[J]. Acta Optical Sinica, 2004, 24(2):158—161 (in Chinese))
- [6] 汪敏, 胡小方. 适用于 SR-CT 技术的新算法[J]. 实验力学, 2006, 21(4):467—471 (Wang Min, Hu Xiaofang. A New Arithmetic of SR-CT Technique[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2006, 21(4):467—471(in Chinese))
- [7] 许峰, 胡小方, 伍小平. 基于加窗傅里叶变换的 SR-CT 滤波反投影重建[J]. 实验力学, 2008, 23(2):133—140 (Xu Feng, Hu Xiaofang, Wu Xiaoping. Improvement of Reconstructed Image Quality Based on Windowed Fourier Filter Method[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2008, 23(2):133—140(in Chinese))
- [8] Kemao Q. Windowed Fourier transform for fringe pattern analysis; addendum[J]. Applied Optics, 2004, 43(13): 2695—2701.
- [9] Kemao Q. Two-dimensional windowed Fourier transform for fringe pattern analysis: principles, applications and implementations[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2007, 45(2):304—317.
- [10] 庄天戈. CT 原理与算法[M]. 上海交通大学出版社, 1992:30—62 (Zhuang Tiange. The theory and arithmetic of computed-tomography[M]. Shanghai Jiaotong Univertisty Press, 1992:30—62(in Chinese))

On The Reconstruction Algorithm of Projection Image Based on the Noise and Missing Data

LU Bin¹, HU Xiao-fang¹, XU Feng¹, JIANG Rui¹, YUAN Qing-xi²

(1. Chinese Academy Science Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials, Univesity of Science and Technology of China, Hefei 230026, China; 2. Insititude of High Energy Physics, Academia Sincia, Bejing 100039, China)

Abstract: Filter back-projection algorithm and iteration algorithm are two kinds of arithmetic in synchrotron radiation computed-tomography technology reconstruction. Relaxation iteration algorithm is one of the iteration methods. The filter back-projection algorithm and the relaxation iteration algorithm are mainly studied in this paper. For understanding the influence factor of above two kinds of algorithm, the selection of filter function in filter back-projection algorithm, the influence of key factor in relaxation iteration algorithm, such as relaxing factor and iteration times, on the reconstruction effect were studied, and their relation is presented in this paper. The reconstruction effect of two methods was compared, and the relaxation iteration algorithm was already used for the experimental data treatment.

Keywords: Synchrotron radiation Computed-tomography (SR-CT); filter back projection; relaxation iteration; missing data; noise data