

轴向冲击载荷作用下直杆弹性动态屈曲的研究

魏 勇 朱兆祥 李永池

(中国科学技术大学)

提要 本文利用分叉的概念,从应力波理论出发,把轴向冲击载荷作用下直杆的弹性动态屈曲问题化为特征值问题,从而导出直杆动态屈曲的临界分叉准则。同时,本文对一端固支直杆受轴向冲击时的弹性屈曲问题进行了实验研究,测到的临界屈曲时间和理论预计值基本符合,证实了理论模型的合理性。理论和实验两方面的结果都表明,直杆受轴向冲击载荷作用时的屈曲现象发生在波动过程的前期,因此在处理这类问题时考虑波动效应是必要的。

关键词 冲击载荷, 动态屈曲, 应力波。

1 引言

轴向冲击载荷作用下直杆弹性动态屈曲的研究一直为人们所关注^[1-3]。但是把屈曲现象和应力波在杆中传播过程联系起来进行研究,不论在理论方面或实验方面,至今都没见到重大进展。本文简述了考虑杆中应力波传播影响的动态屈曲理论,并利用电阻应变片法,对不同长度的一端固定的直杆进行了轴向冲击实验,从而得到了在不同冲击速度下直杆发生屈曲的临界时间。另外,对直杆的残余模态也进行了测量,得到屈曲波长随杆轴向的分布情况。

在实验中,对试件的长度进行了选择,使得直杆的临界屈曲时间小于弹性波传遍整个杆的时间。同时,对加载用的子弹长度进行了限制,使得载荷脉冲宽度大于直杆的临界屈曲时间。这样,在发生屈曲现象之前杆上既没有固支端反射产生的加载波,也没有加载端由脉冲后缘所产生的卸载波进入杆中。杆上只有从加载端到弹性波阵面之间承受恒应力,从而就可以用较简单的处理方法进行理论分析,计算出直杆临界屈曲时间和临界屈曲模态的理论值,以便和实验测试结果相比较。

2 实验方法

实验装置和测试系统如图1所示。子弹为一钢杆,直径是 $\phi 14.5$,长为300mm,其飞行速度由光测方法测定。在试件前端放一根 $\phi 14.5$ 、长400mm的钢杆,以保证试件的轴向冲

1987年6月30日收到。

击,减小弯曲波对试件屈曲的影响。

实验采用的试件横截面为矩形 $3.85 \times 10.10 \text{ mm}^2$,材料为合金铝LY12,一端固定。在杆上适当位置贴上两对应应变片,贴片方式如图2所示。用两台双通道瞬态波形存贮器同时记录试件上两点的应变波形。屈曲前,测点两面的应变值应相同;一旦发生屈曲,由于弯曲的效应,测点两面的应变值就有差别。根据这原则,就可以从记下的波形中得到临界屈曲时间。

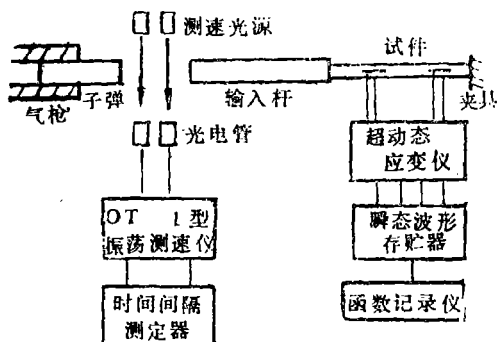


图1 实验装置和测试系统

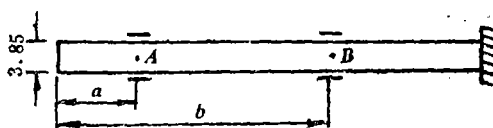


图2

3 理论分析

由一维应力波理论可知实验中的应力波动图案如图3所示。试件中3区承受恒应力,其值为

$$\sigma = \frac{\rho_0 c_0 v}{1 + \alpha} \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{\rho_0 c_0 A}{\rho_s c_s A_s} \quad (2)$$

式中 ρ_0 、 c_0 、 A 分别为试件的材料密度、弹性波速和横截面积; ρ_s 、 c_s 、 A_s 分别为输入杆和子弹的材料密度、弹性波速和横截面积; v 为子弹的冲击速度。

假定传入试件中的弹性波波阵面在到达 $x = \xi$ 截面时试件的受力段发生突然屈曲,这段试件的横向微小摄动将由弯曲方程控制

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho_0 A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

式中 EI 为弯曲刚度, $P = \sigma A$ 为轴向压力。假定在屈曲瞬间,横向位移 y 可以分离变量

$$Y(x, t) = W(x) T(t) \quad (4)$$

可得

$$\frac{W^{(4)} + \frac{P}{EI} W''}{W} = -\frac{\rho_0 A}{EI} \cdot \frac{T''}{T} = -\beta^2 \quad (5)$$

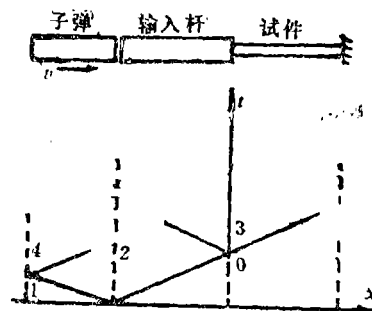


图3

这里, 待定常数取负值 $-\beta^2$, 是为了使放大因子 $T(t)$ 满足屈曲现象的要求而不出现振荡解, 与此对应, 屈曲模态 $W(x)$ 将为两个正弦波的迭加, 即有

$$T(t) = A_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{EI}{\rho_0 A}} \beta t + A_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{EI}{\rho_0 A}} \beta t \quad (6)$$

$$W(x) = B_1 \sin k_1 x + B_2 \cos k_1 x + B_3 \sin k_2 x + B_4 \cos k_2 x \quad (7)$$

式中 k_1, k_2 为波数

$$\left. \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{P}{2EI} \mp \sqrt{\frac{P^2}{4E^2 I^2} - \beta^2}} \quad (8)$$

当 $\beta = 0$ 时, 问题退化为静态屈曲问题. 可以证明 $\beta \geq \frac{P}{2EI}$ 时, 模态方程的解不能表征屈曲现象, 因此我们取 $\beta < \frac{P}{2EI}$ 而有解 (7). 模态解 (7) 必须满足边界条件, 即在冲击端和弹性纵波波阵面上的横向位移和斜率都为零

$$W(0) = B_2 + B_4 = 0$$

$$W'(0) = B_1 k_1 + B_3 k_2 = 0 \quad (9)$$

$$W(\xi) = B_1 \sin k_1 \xi + B_2 \cos k_1 \xi + B_3 \sin k_2 \xi + B_4 \cos k_2 \xi = 0$$

$$W'(\xi) = B_1 k_1 \cos k_1 \xi - B_2 k_1 \sin k_1 \xi + B_3 k_2 \cos k_2 \xi - B_4 k_2 \sin k_2 \xi = 0$$

如果屈曲确实发生了, 诸模态幅值 B_i 应不全为零, 其条件即齐次方程组 (9) 的系数行列式为零:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ \sin k_1 \xi & \cos k_1 \xi & \sin k_2 \xi & \cos k_2 \xi \\ k_1 \cos k_1 \xi & -k_1 \sin k_1 \xi & k_2 \cos k_2 \xi & -k_2 \sin k_2 \xi \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

由此可定出屈曲模态的波数 k_1, k_2 以及诸幅值之间的比值, 而留有一个幅值未定. 在静态问题中到此问题已全部解决, 但在考虑应力波影响的动态屈曲问题中, 此未定幅值可由非零的任意微小扰动的初始条件确定下来. 这样的确定解不能表征屈曲现象, 因为我们一开始就作了小变形假定, 不能用来研究必定发生大变形的屈曲后状态. 在这种线性化问题中, 分叉点对应的模态幅值应是不确定的. 这个不确定性反过来可以作为确定临界屈曲状态的条件. 这个不定解条件就是要求行列式 (10) 的全部子行列式都等于零. 由此可以联立解出

$$\cos k_1 \xi = \cos k_2 \xi = \pm 1 \quad (11)$$

从而得到

$$k_1 \xi = n_1 \pi, \quad k_2 \xi = n_2 \pi \quad (12)$$

式中 n_1, n_2 为正整数, 且同奇偶, $n_2 > n_1 \geq 1$.

由 (8) 式和 (12) 式可以得到发生屈曲的临界长度 ξ_{cr} ,

$$\xi_{cr} = \sqrt{\frac{EI \pi^2 (n_1^2 + n_2^2)}{P}} = c_0 t_{cr} \quad (13)$$

t_{cr} 为发生屈曲的临界时间. 又可得出

$$k_1 k_2 = \beta = \frac{n_1 n_2 \pi^2}{\xi^2} = \frac{p}{EI} \cdot \frac{n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \quad (14)$$

由以上两式可算得相继发生屈曲的临界时间或临界长度。

序 号	n_1	n_2	$\beta / \frac{P}{EI}$	$\xi_{cr} / \pi \sqrt{\frac{EI}{P}}$
I	1	3	3/10	$\sqrt{10}$
II	2	4	2/5	$\sqrt{20}$
III	1	5	5/26	$\sqrt{26}$
IV	3	5	15/34	$\sqrt{34}$

随着时间的推移, 弹性波扫过的距离也即直杆的受力段逐渐加长, 杆上将相继发生第 I 次屈曲、第 II 次屈曲, 等等。从第 I 次屈曲转向第 II 次屈曲将使“量子数” n_1, n_2 发生突变, 从而使波数 k_1, k_2 发生突变, 也就是使模态从 I 态跃迁到 II 态。这种屈曲模态的跃迁是动态屈曲的特点, 显然是和应力波传播密切相关的。

临界屈曲模态的确定在于确定诸幅值 B_1, B_2, B_3, B_4 之间的比值。由于在临界时刻它们是不确定的, 所以我们假设在波阵面达到截面 $x = \xi_{cr} + \Delta\xi$ 时仍取 $x = \xi_{cr}$ 时的特征值和屈曲模态, 再令 $\Delta\xi \rightarrow 0$, 即可求得 $B_2 = B_4 = 0$, $B_3 = -k_1 B_1 / k_2$, 而得出临界屈曲模态为

$$W(x) = B_1 (\sin k_1 x - \frac{k_1}{k_2} \sin k_2 x), \quad (0 \leq x \leq \xi_{cr}) \quad (15)$$

4 实验结果

图 4 是典型的应变波型。在冲击初期, 测点的两面应变相同, 因而记录的波型完全重合。随着时间的增大, 两面的应变出现明显的差别。把开始出现差别的这一时刻定为屈曲时刻, 有时要准确判定这一时刻比较困难, 只能给出一个范围。

在第一组实验中, 对杆长 300mm 的试件做了测试, 贴应变片的位置放在预计可以发生第 I 次屈曲的区段内, 结果列于表 1。为了观察杆内可能发生的第 II 次屈曲现象, 布置了第二组实验, 试件长度为 400mm, 在杆上贴了两组应变片, 第一组贴片位置在第 I 次临界屈曲长度之内, 第二组贴片位置在预计的第 I、II 次临界长度之间, 结果列于表 2, 表明在长杆中确实观察到第 II 次屈曲现象。观测值和预计值是很接近的。

计算采用的材料参数是

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 2.78 \text{g/cm}^3, \quad \rho_{0s} = 7.8 \text{g/cm}^3, \\ c_0 &= 5.06 \text{mm}/\mu\text{s}, \quad c_{0s} = 5.0 \text{mm}/\mu\text{s}, \\ A &= 38.885 \text{mm}^2, \quad A_s = 165.0 \text{mm}^2. \end{aligned}$$

表中的时间起点为冲击试件时刻, 因此实测值是图 4 中读出的时间与弹性波阵面从冲击端传到测点的时间之和。

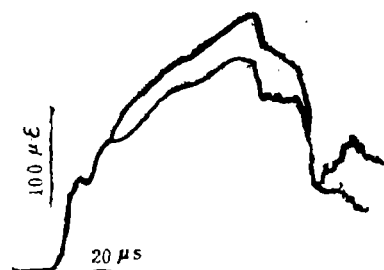


图 4 测两面点的应变波型

表 1 临界屈曲时间的理论与实验值比较

试件 编 号	冲 速 v m/s	冲击应力 σ (kg/mm ²)	杆长 L mm	贴片距离 a (mm)	屈曲时间 T_{cr}^I (μ s)	
					实测值	预计值
31	12.38	1574	300	70	38	46
32	11.06	1406	300	70	39~42	49
33	11.60	1475	300	70	40	48
34	9.06	1152	300	50	25~30	54
35	10.06	1279	300	50	20~30	51

表 2 二次临界屈曲时间的理论与实验值比较

试件 编 号	冲速 v m/s	σ kg/mm ²	杆长 L mm	贴片距离		T_{cr}^I (μ s)		T_{cr}^{II} (μ s)	
				a (mm)	b (mm)	实 测	预 计	实 测	预 计
36	11.21	1425	400	50	290	32~39	48	70	68
37	9.69	1232	400	50	290	—	52	68	74
38	9.76	1241	400	50	290	31~36	52	69	74

表中实测的临界屈曲时间小于理论预计时间,这是由于在进行理论分析时采用的是理想模型,忽略了初始几何缺陷的影响。在实验中,试件的加工精度再高,也不可避免地存在有几何缺陷。同时,轴向冲击时试件与子弹也会存在一定的偏心,这些因素都会导致屈曲现象的提前发生。

屈曲模态的观察和验证比较困难。因在回收到的试件上只能观察到残余模态,这是试件在开始屈曲后变形增大以致发生塑性变形的结果,而且在屈曲后期杆上将会有复杂的应力波系传播,所以残余模态不能完全保持屈曲初期弹性屈曲模态的形状。在有 II 次屈曲的情况,还要发生模态的跃迁,不能肯定残余模态所保持的究竟是哪次模态或者是否是二次模态的迭加。

我们照下了各试件的残余模态的照片,用目测记下曲率的极值点,然后和理论屈曲模态 (15) 所计算的曲率极值点位置相比较,发现大部分试件的残余模态在定性上是和理论模态接近的,例如靠近固支端都有一段未经变形的直杆,有基本相同的曲率极值点数目 (即有相同的波的数目),半波长 (极值点之间的距离) 的观测值和理论值是相当接近的 (表 3)。图 5a 示出了 300mm 杆的残余模态 (No.35), 目测的曲率极值点和理论计算的第 I 次屈曲模态的极值点已经标出,可以注意到二者的相似性。和理论模态一样,残余模态的横向变形段图形是中心对称的。图 5b 示出的是 400mm 杆的残余模态 (No.38), 实测极值点和第 II 次屈曲理论极值点已分别标出,可以注意到残余模态的横向变形段图形是中心反对称的,和理论预计的一致,可见在第 II 次屈曲时模态确实已经跃迁到第 II 模态了。

表 3 屈曲模态的理论值与实验值比较 (单位: mm)

试 件 编 号	杆 长 mm	屈曲段长度		第一半波长		第二半波长		第三半波长	
		实 测	预 计	实 测	预 计	实 测	预 计	实 测	预 计
31	300	245	237	50	81	70	81	—	—
32	300	250	251	45	86	70	86	—	—
33	300	260	245	65	84	60	84	—	—
34	300	260	277	55	95	70	95	—	—
35	300	260	263	65	90	80	90	—	—
36	400	345	352	60	89	60	97	75	89
37	400	355	379	70	96	70	105	75	96
38	400	360	376	75	95	65	104	75	95

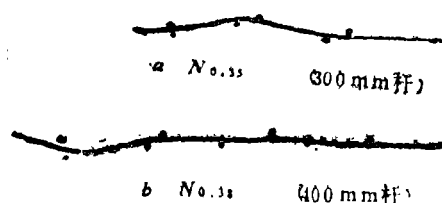


图 5 残余模态曲率极值点的实测分布与理论预测的比较

5 结论

实验证明,本文采用的弹性动态屈曲理论是合理的.轴向冲击载荷作用下直杆临界屈曲时间的实测值与理论预计值基本相同.对长度比较大的直杆,屈曲现象发生在弹性前驱波传到杆的另一端之前.因此在处理这类问题时,考虑波动效应是必要的.临界屈曲模态与残余屈曲模态相似.

参 考 文 献

- [1] Lindberg, H. E, Impact Buckling of a Thin Bar, *J.A.M.*, 32 (1965), 315-322.
- [2] Ari-Gur, J., Weller T., Singer, J., *Int. J. Solids structures*, 13, (1982), 619-641.
- [3] 魏勇, 李永池, 杆中的弹塑性波动效应与动屈曲模态, 第三届华东固体力学学术讨论会论文集, 1986.

Buckling of Rods under Impact Load

Wei Yong Zhu Zhaoxiang Li Yongchi

(University of Science and Technology of China)

Abstract Clamped elastic rods, loaded impulsively in axial direction, are studied both theoretically and experimentally. The experimental results of buckling time are in good agreement with those predicted theoretically. In this study, it is also found that the effects of axial wave propagation influence significantly the buckling process of rods under axial impact.

Key words Impact loading, dynamic buckling, stress wave.