

文章编号: 1001-4888(2013)06-0761-09

110 甲基乙烯基硅橡胶材料参数的确定^{*}

王丽丽¹, 王宇星², 李永胜¹, 刘宝宝¹, 陈维毅¹

(1. 太原理工大学 应用力学与生物医学工程研究所, 山西太原 030024; 2. 西南交通大学 力学与工程学院, 陕西西安 710049)

摘要: 应用 INSTRON5544 对 110 甲基乙烯基硅橡胶材料进行了单轴大变形压缩的力学特性测试。本文根据已有的 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型的本构关系, 采用泰勒级数展开的办法获得了基于小变形的本构关系表达式。利用本文所得本构关系, 将实验数据进行了非线性拟合处理, 得到了相应的 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型的材料参数。拟合所得的名义应力—应变曲线与实测的名义应力—应变曲线吻合较好。利用非线性拟合所得的 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型的材料参数, 应用 ABAQUS 软件进行有限元分析计算。通过有限元的分析计算, 验证了 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型材料参数的正确性与可行性。

关键词: 110 甲基乙烯基硅橡胶; 应变能密度函数; 超弹性

中图分类号: O341

文献标识码: A

DOI: 10.7520/1001-4888-12-188

0 引言

微管吸吮实验技术最早在上世纪五十年代由 Mitchson 和 Swann(1954)提出, 是目前研究细胞力学特性的主要方法之一, 常用于微管吸吮技术实验分析的力学模型有半无限体模型^[1]、球模型等, 但这些模型都未经实验验证, 我们下一步计划将 110 甲基乙烯基硅橡胶制成 5~20mm 的小球体, 用细管进行吸吮实验, 模拟细胞微管吸吮实验, 验证细胞微管吸吮分析模型的可行性。测试前, 我们首先需要知道所用硅橡胶材料的力学特性。因此, 本文的主要目的是测试 110 甲基乙烯基硅橡胶材料的力学特性参数, 并通过有限元软件进行分析计算, 验证所得参数的合理性, 为进行微管吸吮实验的宏观验证实验提供材料依据。

110 甲基乙烯基硅橡胶材料是一种典型的超弹性材料, 具有耐高、低温、无味无毒、耐老化、表面不粘性和憎水性等特点。同时可作为不可压缩性材料对待^[2]。对于超弹性材料, 其储存在材料中的能量仅取决于变形的初始状态和最终状态, 并独立于变形(或加载)路径, 因此描述类似超弹性材料应力—应变本构关系的最简便方法往往是借助于应变能函数^[3]。常见的超弹性橡胶材料的本构模型根据不同的应变能函数主要分为 Mooney-Rivlin 型、Yeoh 型和 Ogden 型三种形式^[4], 其模型参数可通过实验求得。常见的实验方法有压缩和拉伸两类。压缩方法一般为单轴压缩, 而拉伸方法有单轴、平面、等轴拉伸等^[5]。限于条件, 本文采用的实验方法主要是用单轴压缩实验确定模型参数。

1 材料与方法

1.1 材料

单轴压缩试件所用的材料是 110 甲基乙烯基硅橡胶, 该材料的主要成分是硅氧烷、乙烯基、二氧化

^{*} 收稿日期: 2012-12-13; 修订日期: 2013-04-08

基金项目: 国家自然科学基金资助

通讯作者: 陈维毅, 男, 教授。主要研究领域: 生物力学, 固体力学。E-mail: chenweiyi@tyut.edu.cn

硅等,其中乙烯基的含量为 0.22%,挥发份为 0.94%,分子量为 61×10^4 ,将其制成直径 $\Phi=20\text{mm}$,高 $h=30\text{mm}$ 的圆柱体试件。本实验共制作了 13 个圆柱体压缩试件。

1.2 方法

应用 INSTRON5544 万能材料试验机在试件的轴向方向进行单轴压缩,实验装置见图 1 所示。为了消除 Mullins 效应,即在预应力作用后表现的应力软化现象^[6],每个试件在正式压缩前均进行三次预循环实验。实验时,设置的压缩速度为 1mm/min ,轴向最大压缩位移为 10mm ,应用 Merlin 软件记录压缩位移及轴向压缩载荷。



图 1 压缩实验装置

Fig. 1 The device of compression test

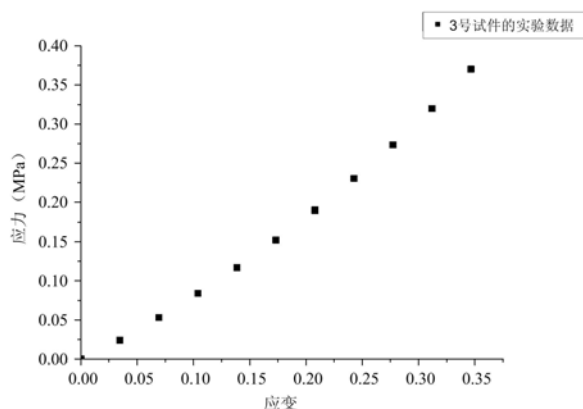


图 2 3 号试件的名义应力—应变实验数据图

Fig. 2 Nominal stress-strain experimental for specimen No. 3

2 结果与分析

2.1 实验结果

根据实验前测得的试件的直径和高,应用公式 $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{4F}{\pi d^2}$ 和 $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ (σ 为应力, F 为物体

所受的压力, A 为圆柱体的面积, d 为圆柱体的直径, ϵ 为应变, l 为圆柱体试件的初始长度, Δl 为其长度变化。)将实验所测的载荷—位移数据转换成相应的名义应力应变。由于所有试件的实验数据曲线基本相似,所以本文随机选取 3 号试件为例来解释说明,图 2 为 3 号试件的名义应力—应变实验数据图。

2.2 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型的本构方程

超弹性材料是指具有应变能密度函数的一类材料,对于各向同性材料,假设 I_1 、 I_2 和 I_3 分别为 Cauchy-Green 变形张量的第一、第二和第三基本不变量,对于初始无应力构形的超弹性材料,应变能函数 W ^[7] 表示为:

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (1)$$

其中

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \quad (3)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (4)$$

$$\lambda_i = 1 + \epsilon_i \quad (5)$$

公式(1)~(5)均引自文献[2]。二项参数 Mooney-Rivlin 模型的应变能密度函数为^[8]:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$$

式中, C_{10} 和 C_{01} 为 Mooney-Rivlin 的材料参数; W 为由左 Cauchy-Green 变形张量的第一不变量 I_1 和第

二不变量 I_2 确定的应变能函数。

三项参数 Yeoh 模型的应变能密度函数为^[9]:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_1 - 3)^2 + C_3(I_1 - 3)^3$$

式中, C_1 、 C_2 和 C_3 分别为 Yeoh 模型的材料参数。

应变能密度函数 W 对应变分量的导数决定了对应的应力分量^[2], 即

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial E_{ij}} \quad (6)$$

其中, S_{ij} 为第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量; E_{ij} 为 Cauchy-Green 应变张量。

假设 110 甲基乙烯基硅橡胶是各向同性且不可压的, 于是有 $I_3 = 1$, 设单轴压缩方向的伸长率为 λ , 应变为 ϵ , 另两个方向自由, 则有:

$$\lambda_1 = \lambda = 1 + \epsilon^{[2]}$$

$$\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1 + \epsilon}$$

代入式(2)、式(3)可得:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} = (1 + \epsilon)^2 + \frac{2}{1 + \epsilon} \quad (7)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} = 2(1 + \epsilon) + \frac{1}{(1 + \epsilon)^2} \quad (8)$$

再将式(7)和式(8)代入式(6)可得:

$$\sigma_1 = 2(\lambda - \lambda^{-2}) \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \lambda^{-1} \right] = 2 \left[(1 + \epsilon) - \frac{1}{(1 + \epsilon)^2} \right] \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{1}{1 + \epsilon} \right] \quad (9)$$

对于 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型, 可分别得:

$$\sigma_{MR1} = 2C_{10} \left[\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right] + 2C_{01} \left[1 - \frac{1}{\lambda^3} \right] = 2C_{10} \left[1 + \epsilon - \frac{1}{(1 + \epsilon)^2} \right] + 2C_{01} \left[1 - \frac{1}{(1 + \epsilon)^3} \right] \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{Y1} = & 2C_1 \left[1 + \epsilon - \frac{1}{(1 + \epsilon)^2} \right] + 4C_2 \left[(1 + \epsilon)^3 - 3(1 + \epsilon) - \frac{2}{(1 + \epsilon)^3} + \frac{3}{(1 + \epsilon)^2} + 1 \right] \\ & + 6C_3 \left[(1 + \epsilon)^5 - 6(1 + \epsilon)^3 + 3(1 + \epsilon)^2 + 9(1 + \epsilon) - \frac{4}{(1 + \epsilon)^4} + \frac{12}{(1 + \epsilon)^3} - \frac{9}{(1 + \epsilon)^2} - 6 \right] \end{aligned} \quad (11)$$

式中下标 MR1、Y1 分别代表 Mooney-Rivlin 模型的轴向方向和 Yeoh 模型的轴向方向。将式(10)和式(11)应用泰勒级数展开, 因为 $\epsilon < 1$, 所以对于 Mooney-Rivlin 模型, 舍去 $n > 3$ 以上的高阶项, 即略去 ϵ^4 以上的项, 得 Mooney-Rivlin 模型的本构关系为:

$$\sigma_{MR1} = 2C_{10}(4\epsilon^3 - 3\epsilon^2 + 3\epsilon) + 2C_{01}(10\epsilon^3 - 6\epsilon^2 + 3\epsilon) \quad (12)$$

对于 Yeoh 模型, 舍去 $n > 5$ 以上的高阶项, 即略去 ϵ^6 以上的高阶项, 得 Yeoh 模型的本构关系为:

$$\sigma_{Y1} = 2C_1(6\epsilon^5 - 5\epsilon^4 + 4\epsilon^3 - 3\epsilon^2 + 3\epsilon) + 12C_2(8\epsilon^5 - 5\epsilon^4 + 3\epsilon^3) + 54C_3(3\epsilon^5 - \epsilon - 1) \quad (13)$$

2.3 分析

数据的拟合基于本文给出的 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型的近似本构方程, 即式(12)和式(13), 根据实验所得数据, 应用 Origin 软件进行非线性数据拟合, 得到的拟合曲线图分别见图 3 和图 4。

通过非线性曲线拟合, 得到 13 个试件的 Mooney-Rivlin 模型材料参数 C_{10} 、 C_{01} 的算术平均值及均方差分别为:

$$C_{10} = 0.861 \pm 0.023, \quad C_{01} = -0.777 \pm 0.027$$

Yeoh 模型的材料参数 C_1 、 C_2 和 C_3 分别为:

$$C_1 = 0.163 \pm 4.11E-04, \quad C_2 = 0.111 \pm 5.38E-04, \quad C_3 = 1.76E-04 \pm 3.96E-06$$

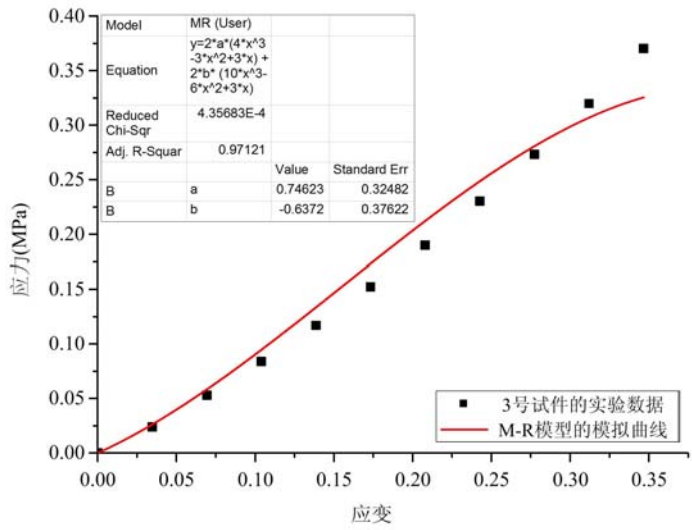


图 3 Mooney-Rivlin 模型拟合曲线

Fig. 3 Mooney-Rivlin model fitting curve

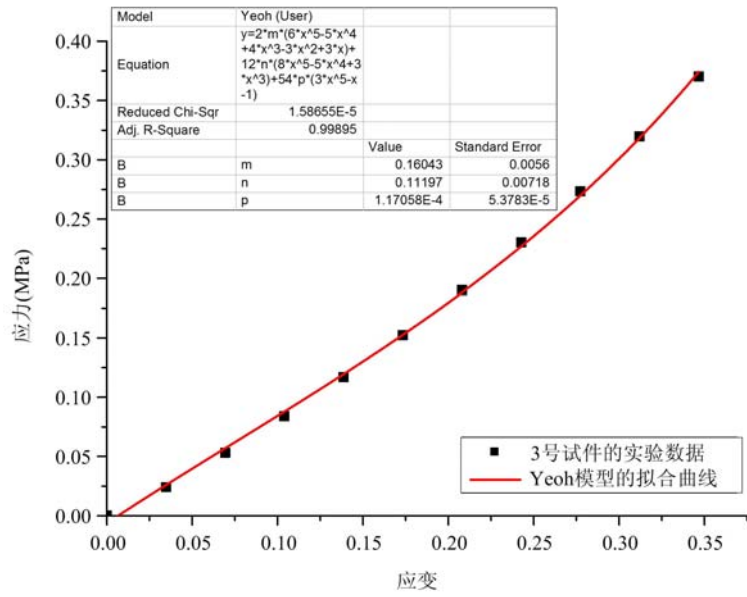


图 4 Yeoh 模型拟合曲线

Fig. 4 Yeoh model fitting curve

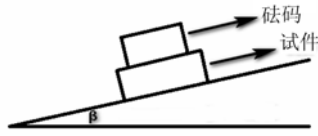


图 5 摩擦系数的测量装置图
Fig. 5 The device of measuring coefficient of friction

3 仿真模拟

3.1 摩擦系数的测量

图 3 和图 4 的应力、应变为沿轴向的平均值。事实上由于硅橡胶圆柱体试件与压头和底座间的摩擦影响,应力、应变是非均匀的。在进行有限元模拟时,为了考虑摩擦的影响,需要测出 110 甲基乙基硅橡胶圆柱体试件与压头和底座间的摩擦系数。摩擦系数通过斜面法测量,为了与单轴压缩实验时保持相同的摩擦条件,测量时,在试件与接触面间均匀涂抹食用油,以达到减小摩擦系数,进而减小环箍效应影响的作用。测量摩擦系数的装置简图如图 5 所示。

由于试件与压头和底座间存在粘附力和表面张力,且粘附力和表面张力与正压力不成正比,所以我们通过不断改变砝码质量的方法克服粘附力和表面张力,通过实验可知,摩擦系数与其所受的重量无关,即与砝码的质量无关,测量的数据见表 1(表中 n 为实验次数, β 为斜面倾角, m 为砝码的质量)。

表 1 摩擦系数的测量数据表

Tab. 1 The data table of friction's coefficient

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta(\text{deg})$	7	7	7	6.5	7.5	7	7	7.5	6.5	7
$m(\text{g})$	202	404	606	808	1010	1212	1414	1616	1818	2020

应用公式 $f=\tan\beta$ 计算每一次测量结果的摩擦系数,然后再利用多次测量取平均值的办法求出 f ,即摩擦系数为:

$$f=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\tan\beta_i=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\tan\beta_i\approx0.123$$

3.2 有限元模拟计算

由于实验采用了单轴压缩的方法,变形的不均匀性会对压缩结果产生影响,为了验证实验所测得 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型的常数的合理性,本文采用有限元分析软件 ABAQUS 对试件按照实验方法进行有限元模拟。实验数据进行非线性曲线拟合处理所得的材料参数见表 2。

表 2 模型的材料参数

Tab. 2 Material parameters of model

材料参数	C_{10}/C_1	C_{01}/C_2	C_3	D
Mooney-Rivlin	0.861	-0.777		0
Yeoh	0.163	0.111	1.76E-4	0

有限元分析时,为了减少单元数,简化计算,按轴对称单元进行建模和分析,其中压头和底座皆使用解析刚体来建模,选定的材料模型分别为 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型,材料参数采用表 2 的参数,试件均采用 4-node 四边形线性双轴杂交减缩单元(CAX4HR)进行网格划分。接触属性为法向接触属性为默认的硬接触,切向的摩擦属性分为两种情况:一种是无摩擦(理想),另一种是摩擦系数 $f=0.123$ (实际测量),几何非线性 Nlgeom 是 on,选用有限滑移。边界条件为试件的左边和下边的单元分别限制其 x 方向和 y 方向的位移,底座限制所有方向的位移和转动,压头施加位移载荷。

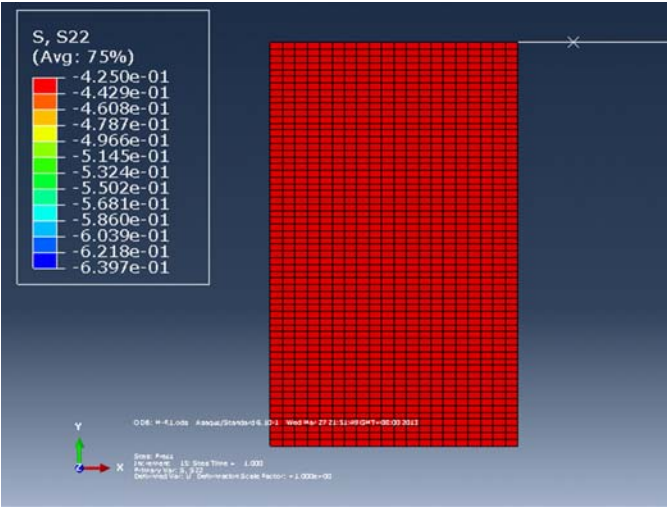


图 6 Mooney-Rivlin 模型在无摩擦时的 S_{22} 应力云图

Fig. 6 The Mooney-Rivlin model's S_{22} stress cloud in frictionless

有限元分析后得出的 S_{22} 应力云图及模拟所得的应力—应变曲线($\sigma-\epsilon$)与拟合所得的应力—应变曲线的比较如图 6 到图 13 所示,其中图 6 和图 7 分别表示 Mooney-Rivlin 模型在无摩擦情况下的 S_{22}

应力云图和模拟所得的应力—应变曲线与拟合所得的应力—应变曲线的比较图, S_{22} 应力云图反映的是压缩时的应力分布情况。图 8 和图 9 分别表示 Yeoh 模型在无摩擦情况下的 S_{22} 应力云图和模拟所得的应力—应变曲线与拟合所得的应力—应变曲线的比较图。

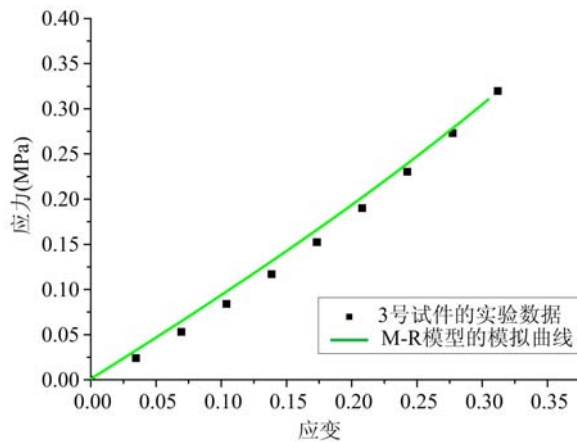


图 7 无摩擦时, Mooney-Rivlin 模型的模拟曲线

Fig. 7 The simulation curve of Mooney-Rivlin model without friction

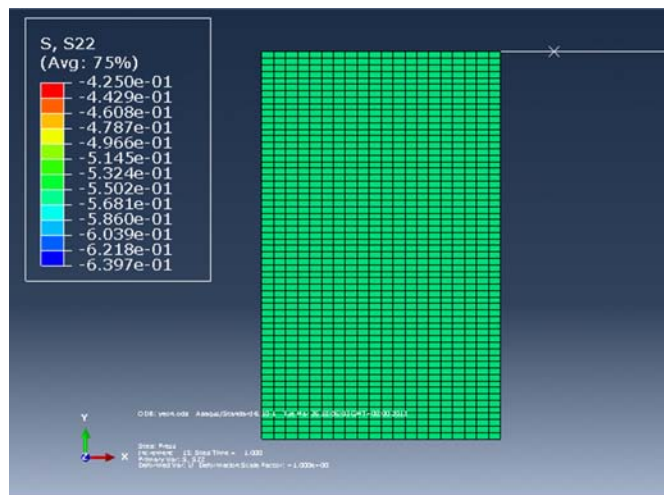


图 8 Yeoh 模型在无摩擦时的 S_{22} 应力云图

Fig. 8 The Yeoh model's S_{22} stress cloud without friction

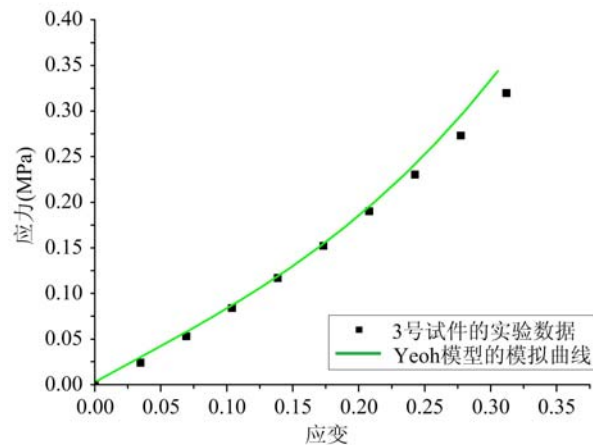


图 9 无摩擦时, Yeoh 模型的模拟曲线

Fig. 9 The simulation curve of Yeoh model without friction

图 10 和图 11 分别表示 Mooney-Rivlin 模型在摩擦系数 $f=0.123$ 时的 S_{22} 应力云图和模拟所得的应力—应变曲线与 3 号试件的实验数据所得的名义应力—应变曲线的比较图。图 12 和图 13 分别表示

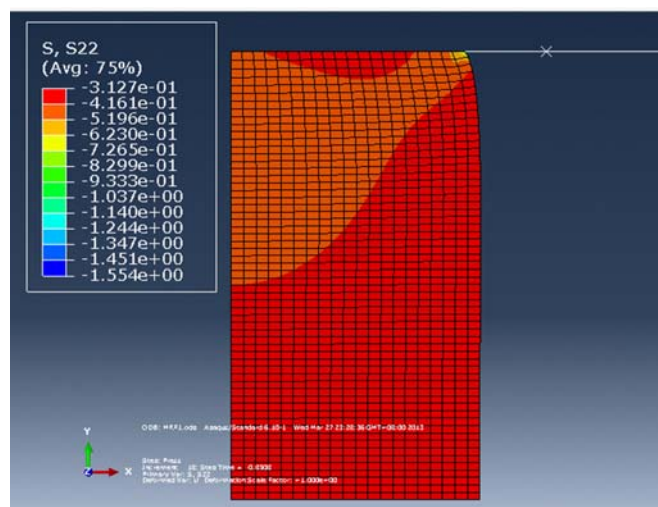


图 10 Mooney-Rivlin 模型在摩擦系数 $f=0.123$ 时的 S_{22} 应力云图

Fig. 10 The Mooney-Rivlin model's S_{22} stress cloud in the coefficient of friction $f=0.123$

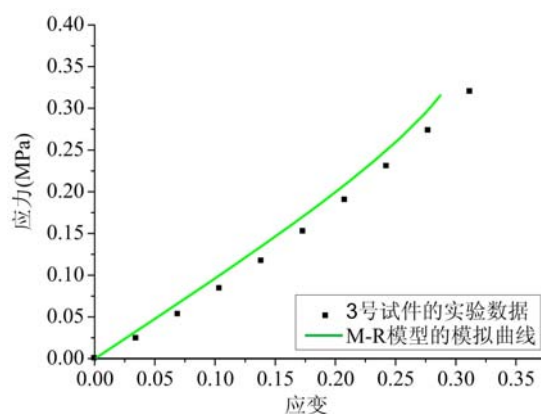


图 11 Mooney-Rivlin 模型的模拟曲线 ($f=0.123$)

Fig. 11 The simulation curve of Mooney-Rivlin model ($f=0.123$)

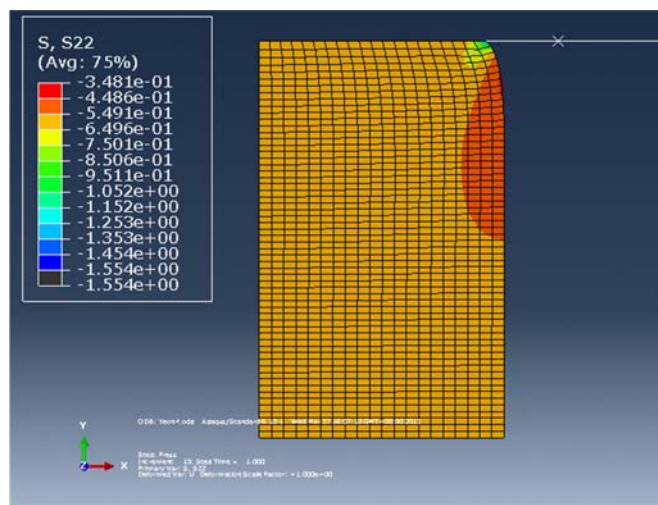


图 12 Yeoh 模型在摩擦系数 $f=0.123$ 时的 S_{22} 应力云图

Fig. 12 The Yeoh model's S_{22} stress cloud in the coefficient of friction ($f=0.123$)

Yeoh 模型在摩擦系数 $f=0.123$ 时的 S_{22} 应力云图和模拟应力—应变曲线与 3 号试件的实验数据所得的名义应力—应变曲线的比较图。

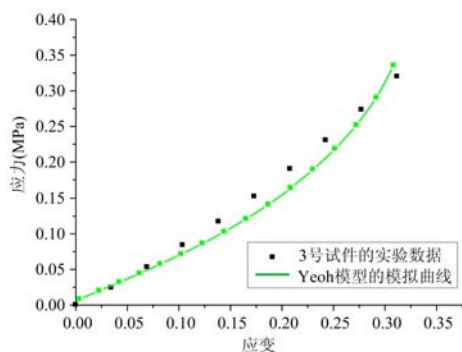


图 13 Yeoh 模型的模拟曲线 ($f=0.123$)

Fig. 13 The simulation curve of Yeoh model ($f=0.123$)

4 结论与讨论

4.1 结论

本文通过对 110 甲基乙烯基硅橡胶材料进行单轴压缩实验,结合实验数据与本文所得 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型的近似本构关系,应用 Origin 进行了非线性曲线拟合。通过非线性曲线拟合得到 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型的力学特性参数。最后应用拟合所得力学特性参数,用有限元软件 ABAQUS 分析 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型的参数的合理性。由图 7 和图 11,图 9 和图 13 对比分别可以得出:不考虑摩擦时,有限元计算结果与理论更接近。这是因为在理论

计算时是在考虑无摩擦的情况下计算的。通过图 7 与图 9 分析对比得出 Mooney-Rivlin 模型比 Yeoh 模型更适合于模拟小变形行为。由于我们下一步将模拟的微管吸吮实验只考虑小变形情况,因此 Mooney-Rivlin 模型更适合于本文,所得力学特性参数将用于微管吸吮实验的理论计算与有限元模拟中。

4.2 讨论

本文的工作主要侧重于理论研究,由于受实验条件的限制,只能采用单轴压缩的实验方法进行实验。试件受压时,尽管在试件与压头和底座间均匀涂抹食用油来减小摩擦,但试件仍会受环箍效应的影响,即试件受压时,沿载荷方向发生纵向变形的同时,也按泊松比效应产生横向膨胀,因而在压板与试件受压面形成摩擦力,对试件的横向膨胀起着约束作用,这种约束作用称为“环箍效应”。因此试件受压时,不可能达到完全无摩擦的理想状态,接触面间具有压缩、剪切等复杂受力状态,用平均应力、应变处理会引起一定的误差。

应用泰勒级数展开计算 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型的本构关系时,由于实验的最大应变 $\epsilon=1/3 < 0.35$, ϵ 远大于 ϵ^4 和 ϵ^6 ,所以 Mooney-Rivlin 模型略去了 ϵ^4 以上的高阶项, Yeoh 模型略去 ϵ^6 以上的高阶项,因为在 Yeoh 模型的本构方程中,多项式的第三项仅有 ϵ 、 ϵ^5 、 ϵ^6 及更高阶项,因此在 Yeoh 模型中舍去 ϵ^6 以上的高阶项。

测量摩擦系数时存在一定的误差,这也是导致有限元模拟所得应力—应变曲线与实验数据所得应力—应变曲线间存在一定误差的原因之一。

参考文献:

- [1] 樊学军. 细胞力学[D]. 力学进展, 1995, 25(2):197—208 (Fan Xuejun. Cellular mechanics [D]. Advances in Mechanics, 1995, 25(2):197—208(in Chinese))
- [2] 黄建龙, 解广娟, 刘正伟. 基于 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型的超弹性橡胶材料有限元分析[J]. 橡胶工业, 2008, 55(8):467—471 (Huang Jianlong, Xie Guangjuan, Liu Zhengwei. Mooney-Rivlin model and Yeoh model based on hyperelastic finite element analysis of rubber materials [J]. Journal of Rubber Industry, 2008, 55(8):467—471(in Chinese))
- [3] 张少实, 庄茁. 复合材料与粘弹性力学[M]. 北京:机械工业出版社, 2005 (Zhang Shaoshi, Zhuang Zhuo. Composite Material and the Viscoelastic Mechanics [M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 2005(in Chinese))
- [4] 罗华安, 王化明, 游有鹏. 超弹性膜的等轴拉伸试验方法及仿真[J]. 华南理工大学学报, 2011, 39(4):56—61 (Luo Huaan, Wang Huaming, You Youpeng. The axis tensile test method and simulation of hyperelastic membrane [J]. Journal of South China University of Technology, 2011, 39(4):56—61(in Chinese))
- [5] Pearson I, Pickering M. The determination of a highly elastic adhesive's material properties and their representation in finite element analysis [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2001, 37(3):221—232.

- [6] 李晓芳, 杨晓翔. 橡胶材料的超弹性本构模型[J]. 弹性体, 2005, 15(1):50—58 (Li Xiaofang, Yang Xiaoxiang. Hyperelastic constitutive model of rubber materials [J]. Journal of Elastomer, 2005, 15(1):50—58(in Chinese))
- [7] 朱艳峰, 刘锋 等. 橡胶材料的本构模型[J]. 橡胶工业, 2006, 53(2):119—125 (Zhu Yanfeng, Liu Feng, et al. The constitutive model of rubber material [J]. Journal of Rubber Industry, 2006, 53(2):119—125(in Chinese))
- [8] Mooney M. A theory of large elastic deformation[J]. Journal of Applied Physics, 1940, 11(9):582—592.
- [9] Yeoh O H. Cterization of elastic properties of carbon-black filled rubber vulcanizates[J]. Rubber Chemistry and Technology, 1990, 63:792—805.

On the Material Parameters Determination of 110 Methyl Vinyl Silicone Rubber

WANG Li-li¹, WANG Yu-xing², LI Yong-sheng¹, LIU Bao-bao¹, CHEN Wei-yi¹

(1. Institute of Applied mechanics and Biomedical Engineering, Taiyuan university of Technology, Taiyuan 030024, China;

2. Mechanics and Engineering Institute of Engineering Mechanics, Southwest Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to understanding the mechanical properties of 110 methyl vinyl silicone rubber, large deformation uniaxial compression test was carried out by using INSTRON5544. Constitutive relation expressions for small deformation was obtained, based on existing constitutive relations of Mooney-Rivlin model and Yeoh model and by using Taylor series expansion method. Then, corresponding material parameters in Mooney-Rivlin model and Yeoh model were obtained by nonlinear fitting of experimental data obtained from above-mentioned constitutive relation Nominal stress-strain curve from fitting is in agreement with that from experimental data. Using material parameters obtained from nonlinear fitting of Mooney-Rivlin model and Yeoh model and ABAQUS software, finite element analysis was conducted. Calculation results show that the validity and feasibility of material parameters of Mooney-Rivlin model and Yeoh model are verified.

Keywords: 110 methyl vinyl silicone rubber; strain energy density function; hyperelasticity