

文章编号:1001-4888(2014)05-579-10

基于数字散斑相关实验测量的 材料构型力的计算方法^{*}

于宁宇^{1,2}, 李群¹

(1. 西安交通大学 航天航空学院 机械结构强度与振动国家重点实验室, 陕西西安 710049;

2. 长安大学 地质工程与测绘学院, 陕西西安 710054)

摘要: 材料构型力学主要研究材料中的缺陷(夹杂、空穴、位错、裂纹、塑性区等)的构型(形状、尺寸和位置)改变时,所引起的系统自由能的变化。本研究将基于数字散斑相关技术,实验测量材料试件的位移场分布,随后通过材料构型力的定义式,计算求得弹塑性材料中缺陷构型力的分布。其方法概括如下:位移场通过数字图像相关技术测得;应变及位移梯度场利用三次样条拟合获得;线弹性材料应力通过简单线弹性本构方程获取,而塑性材料的表面应力场通过 Ramberg-Osgood 本构方程计算求得;弹塑性应变能密度分布则由应力—应变曲线数值积分获得。该方法对普通弹性材料或者弹塑性材料均适用,可以用于各种不同的缺陷及缺陷群的材料构型力测量。

关键词: 构型力; 数字图像相关 (DIC); 复杂缺陷

中图分类号: O346.1

文献标识码: A

DOI: 10.7520/1001-4888-13-132

0 引言

尽管传统断裂力学和损伤力学的基本概念和理论已经广泛应用于材料与结构的完整性评价,但随着研究的深入,一些新的问题又浮现出来。一方面,对于断裂力学的能量释放率、应力强度因子以及 J 积分准则等裂尖控制参量的计算而言,需要明确可测的宏观裂纹长度及形状,而对于材料中广泛存在的复杂缺陷群,很难获得明确的主裂纹形貌。另一方面,随着现代工程材料的发展,一些强非均匀材料得到广泛的应用,如多孔金属泡沫材料、纳米多孔薄膜材料、铁电多晶材料等。由于材料内部随机分布的缺陷以及材料的非连续性,在对其进行临界失效载荷和评估完整性的分析时,使用基于连续介质的断裂力学和损伤力学时将受到一定挑战。因此,迫切需要提出一种新的失效理论。当材料中的缺陷(夹杂、空穴、位错、裂纹、塑性区等)的构型(形状、尺寸和位置)改变时,会引起材料自由能的变化,建立在材料空间上发展起来的构型力理论为解决这一类问题提供了新的思路。实际上,构型力理论的基础可追溯到 Eshelby^[1]定义的能量动量张量概念。在经典力学中,力的概念直接与质量相关,涉及带有质量的物体的平衡和运动。而构型力定义在一个奇点上,总是和一个给定系统的总能量的改变有关,而这个改变又总是由于该系统构型的改变引起的(即缺陷演化)。将传统的以物质质量粒子及其连续体为研究对象的牛顿力学体系,与以缺陷为研究对象的构型力理论相结合,将有助于解决某些用经典断裂力学和损伤力学描述方法难以处理的问题。Pak and Herrmann^[2], McMeeking^[3], Dasculu and Maugin^[4], Suo

^{*} 收稿日期: 2013-09-02; 修订日期: 2013-10-31

基金项目: 国家自然科学基金青年项目(11202156); 国家自然科学基金面上项目(11472205, 11172228), 国家自然科学基金创新团体(11321062)

通讯作者: 李群(1980—), 男, 副教授, 硕士生导师, 主要从事断裂与损伤力学研究。E-mail: qunli@mail.xjtu.edu.cn

等^[5]以及 Chen^[6]等人已将构型力概念和守恒积分成功应用到多裂纹问题、复合材料裂纹问题以及压电智能材料断裂问题的研究中。

在复杂缺陷非均质材料中,选取围绕缺陷的闭合曲线作为积分路径,根据 Neother 定理,可分别定义守恒积分,即 J_k -、 M -和 L -积分。Rice^[7], Cherepanov^[8], Bueckner^[9], Knowles and Sternberg^[10], Budiansky and Rice^[11]以及 Herrmann and Herrmann^[12]等人建立了材料构型力的基本概念,并为守恒积分的建立及其在线弹性断裂力学中的应用奠定了基础。这些守恒积分的积分内核分别对应着不同的材料构型力概念,分别由拉格朗日函数的梯度、散度和旋度计算所得。三类构型力具有明确的物理意义,例如,拉格朗日函数的梯度所定义的构型力,代表着无限小质量单元沿坐标平移所对应的势能变化量,对其进行数值积分即可得到 J_k 积分;通过拉格朗日函数散度所定义的构型力,代表质量单元自相似扩展的势能变化量,对其进行数值积分即为 M 积分;而其旋度所定义的构型力,代表质量单元旋转的系统势能变化量,其数值积分即为 L 积分。 J 积分的积分内核,即是源于 Eshelby 的能量动量张量概念的一种构型力。 J 积分及其相关的 Eshelby 构型力已经广泛应用于含宏观裂纹问题的工程结构材料和结构的可靠性分析,而 M 积分则广泛应用于描述复杂多缺陷的损伤演化^[13-18]。

针对材料构型力的实验测量方法研究,目前国内外还几乎是空白。其主要障碍在于构型力的定义式需要应变能、位移、应变、应力、坐标等诸多信息,传统的传感器很难直接获得所有的信息。这就造成了诸多年来,尽管国内外学者在材料构型力和守恒积分理论与数值模拟做了大量的工作,但极少有人涉及其实验测量。提供一种简便、有效、可行的材料构型力实验测量方法具有重要的科学意义,也将填补材料构型力学发展所遇到的实验空白。本文基于实验力学以及相关的计算机图形处理技术,将数字图像相关技术应用于材料和结构的变形测量中,用于测量各种类型材料的位移场,进而通过一系列计算处理获得材料构型力的分布。

1 材料构型力概念

在不考虑体力作用下,定义拉格朗日密度函数 Λ 为:

$$\Lambda(x_i, u_{k,j}) = -W(x_i, u_{k,j}) \quad (1)$$

式中 W 为应变能密度; x_i 为坐标分量; $u_{k,j}$ 为位移矢量对坐标的偏导数。

1.1 J_k 积分及其构型力

与 J_k 积分对应的构型力,即著名的 Eshelby 应力张量可通过拉格朗日密度函数 Λ 在材料空间(初始构型)的梯度运算得到,即

$$\nabla(\Lambda) = -(W)_{,i} = -\left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]_{\text{expl}} - \sigma_{kj} u_{k,j,i} \quad (2)$$

其中, $(\partial W / \partial x_i)_{\text{expl}}$ 为 W 对 x_i 的显式求导; σ_{kj} 为应力张量。Eshelby 构型力可定义为:

$$b_{ji} = W \delta_{ji} - \sigma_{jk} u_{k,i} \quad (3)$$

式中,当 $i=j$ 时, δ_{ji} 为 1; 而 $i \neq j$ 时, $\delta_{ji}=0$ 。

同时,定义 Eshelby 构型力所表征的材料缺陷演化:

$$R_i = -\left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]_{\text{expl}} \quad (4)$$

利用方程(2), Eshelby 构型力和缺陷演化之间存在如下平衡关系:

$$b_{ji,j} + R_i = 0 \quad (5)$$

而著名的 J_k 积分则定义为 Eshelby 构型力沿着绕缺陷闭合路径的线积分:

$$J = J_1 = \oint_{\Gamma} b_{j1} n_j ds = \oint_{\Gamma} (W n_1 - \sigma_{jk} u_{k,1} n_j) ds \quad (6)$$

$$J_2 = \oint_{\Gamma} b_{j2} n_j ds = \oint_{\Gamma} (W n_2 - \sigma_{jk} u_{k,2} n_j) ds \quad (7)$$

其中 n_j 为积分路径的外法线矢量; Γ 为围绕所有缺陷的逆时针闭合路径。

1.2 M 积分及其构型力

与 M 积分对应的构型力可通过拉格朗日密度函数动量的散度获取:

$$\nabla \cdot (\Lambda x) = - (W x_i)_{,i} = - x_{i,i} W - \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_{\text{expl}} x_i - \frac{\partial W}{\partial u_{k,j}} u_{k,ji} x_i \quad (8)$$

对应于 M 积分的构型力可定义为:

$$M_j = W x_i \delta_{ij} - \sigma_{jk} u_{k,i} x_i \quad (9)$$

同时,定义 M 积分构型力所表征的材料缺陷演化:

$$R = - \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_{\text{expl}} x_i \quad (10)$$

利用方程(8),M 积分构型力和缺陷演化之间存在如下平衡关系:

$$M_{j,j} + R = 0 \quad (11)$$

而著名的 M 积分则定义为构型力(9)沿着绕缺陷闭合路径的数值积分,即

$$M = \oint_{\Gamma} (W x_i n_i - \sigma_{jk} u_{k,i} x_i n_j) d\Gamma \quad (12)$$

1.3 L 积分及其构型力

与 L 积分对应的构型力可通过拉格朗日密度函数动量的旋度获取:

$$\nabla \times (\Lambda x) = - e_{nij} (W x_j)_{,i} = - e_{nij} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_{\text{expl}} x_j + \frac{\partial W}{\partial u_{k,l}} u_{k,li} x_j \right] \quad (13)$$

其中当任意下标相等时, $e_{nij}=0$; 下标为(123)的偶序时, $e_{nij}=1$, 为奇序时, $e_{nij}=-1$ 。而 L 积分构型力可定义为:

$$L_{ml} = e_{nij} (W x_j \delta_{il} + \sigma_{il} u_j - \sigma_{kl} u_{k,i} x_j) \quad (14)$$

同时,定义 L 积分构型力所表征的材料缺陷演化:

$$R_m = - e_{mij} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_{\text{expl}} x_j + (\sigma_{ik} u_{j,k} - \sigma_{kj} u_{k,i}) \right] \quad (15)$$

利用方程(13),L 积分构型力和缺陷演化之间存在如下平衡关系:

$$L_{ml,l} + R_m = 0 \quad (16)$$

而 L 积分则定义为构型力(14)沿着绕缺陷闭合路径的数值积分:

$$L = L_s = \oint_{\Gamma} e_{sij} (W x_j n_i + \sigma_{il} u_j n_l - \sigma_{kl} u_{k,i} x_j n_l) d\Gamma \quad (17)$$

三类构型力的物理意义可描述如下:拉格朗日函数的梯度所定义的 J 积分构型力,其代表着无限小质量单元沿坐标平移所对应的势能变化量;通过其散度所定义的 M 积分构型力,代表质量单元自相似扩展的势能变化量;而其旋度所定义的 L 积分构型力,代表质量单元旋转的系统势能变化量。

2 基于数字散斑实验测量的构型力计算方法

近年来,光学测量技术有很大的发展,其中基于数字图像相关(DIC)的白光数字散斑测量技术颇受瞩目,并逐渐运用于材料和结构的变形测量中。该方法基于图像特征的识别技术,对于表面喷涂成散斑状态的试件,可以利用单镜头或成角度的一组镜头进行连续拍摄;而后将试件表面的数字图像分解为一定数量的像素群组成的小块,称之为面元。然后通过镜头与空间的坐标变换、像素内插值算法以及图像识别等方法,将某一面元与同一时刻的不同角度图像以及不同时刻同一角度的图像序列之间进行匹配,得到该面元在二维或三维空间里的坐标,及该坐标随着图像序列的变化;进一步可以得到该面元的位移而获得整个表面的位移场分布,进而得到表面的应变场分布。德国 GOM 公司生产的 ARAMIS 4M 即是基于 DIC 技术而产生的一种测量试件表面变形的成熟系统,本文采用该设备测量材料的构型力。

2.1 测量的基本设置及试件细节

实验采用的含复杂缺陷试件如图 1(a,b)所示,尺寸为 $70 \times 60 \times 3 \text{ mm}^3$ 。该试件中心随机分布着 60 个直径为 0.5mm 的小孔,试件表面使用黑白漆喷涂成随机分布的散斑状态。将试件夹持在 MTS-880

试验机上,设置 ARAMIS 4M 于试件前,如图 1(c)所示。将 ARAMIS 4M 的两个镜头夹角设定为 25° ,两镜头中心距离试件距离设定为 325mm。在当前设定下,ARAMIS 4M 测量的空间体积约为 $65 \times 65 \times 50 \text{ mm}^3$;采用 19×19 像素作为一个面元,约为 $0.58 \times 0.58 \text{ mm}^2$ 。校验结果显示当前的测量误差约为 0.03 像素,结合当前的测量体积可以估计出位移测量偏差约为 $0.92 \mu\text{m}$;对于大部分情况,该设置下面内位移测量偏差小于 $1.3 \mu\text{m}$ 。试件采用 LY-12 铝合金,拟合该材料制成的标准试件的单向拉伸应力应变曲线,可以得到 LY-12 的线弹性杨氏模量 E 为 71GPa,泊松比 ν 为 0.33。

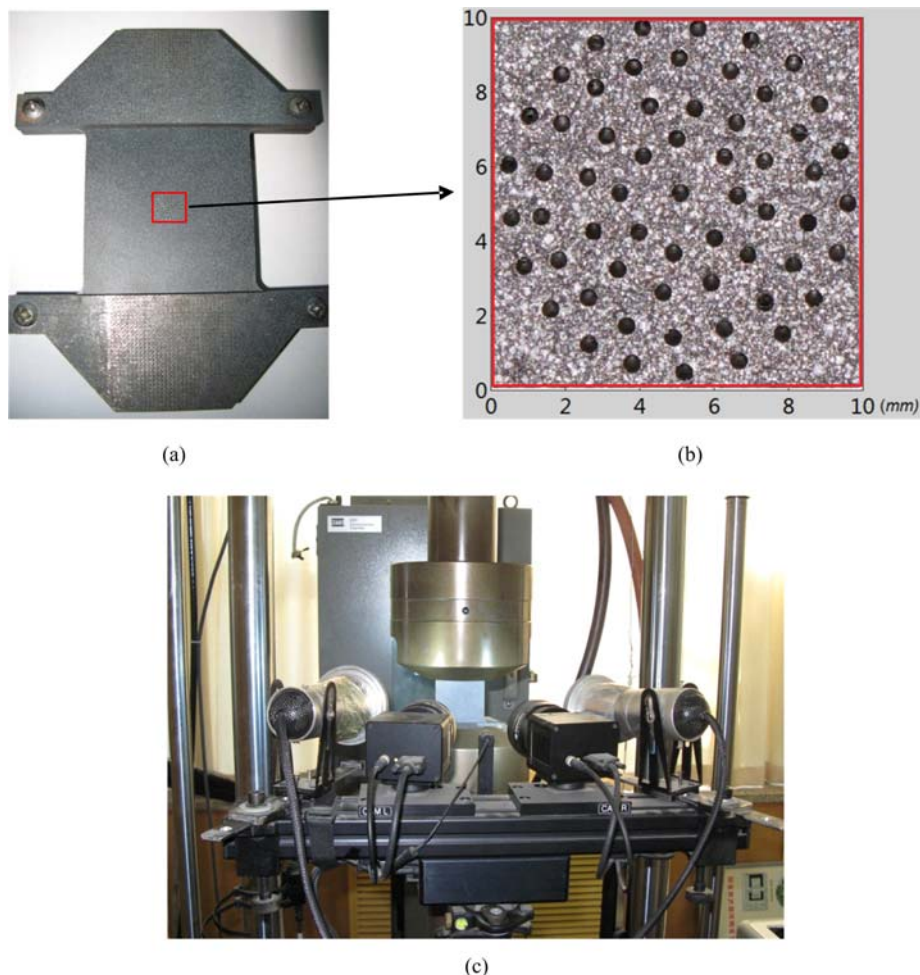


图 1 (a)LY-12 铝合金含复杂缺陷试件, (b)试件中心的缺陷细节,
(c)测量设备 ARAMIS 与 MTS-880 试验机的设置

Fig. 1 (a) The specimen made of LY-12 Aluminum alloy, (b) The defect pattern of the specimen painted by powder spray, (c) Experiment arrangement of specimens, MTS-880 machine, and ARAMIS

根据三类构型力的定义式(3)、(9)、(14),我们发现如果想获取其测量结果,必须知晓其位移 u_i 、应变 ϵ_{ij} 、位移偏导数 $\partial u_i / \partial x_j$ 、应力 σ_{ij} 、应变能密度 W 等信息。下面我们将详细阐述 DIC 技术测量构型力的方法和步骤。

2.2 位移数据的测量、平滑及偏导数的获取

通过 ARAMIS 4M 可直接获取试件表面的位移数据,但是直接测量得到的面内位移含有大量的噪声。DIC 方法的噪声信号来源较为复杂,其结果受到仪器的光学偏差、试件表面的平滑程度、表面散斑图样、面元匹配算法以及像素内插值算法等等因素的影响。在处理实验数据过程中,我们将试验数据分解为真实的位移场实验数据和叠加的独立同分布的随机变量场,因而可以使用 3×3 或 5×5 的均值滤波器对位移数据点进行平滑。考虑到实验数据在 x 轴和 y 轴上其坐标增量 Δx 、 Δy 均为 0.5 mm ,忽略

高阶项,则可估算出每次使用 3×3 均值滤波器,会对真实位移数据造成误差 $(\partial^2 u_x / \partial x^2 + \partial^2 u_x / \partial y^2) / 12$ 及 $(\partial^2 u_y / \partial x^2 + \partial^2 u_y / \partial y^2) / 12$; 而每次使用 5×5 均值滤波器则会对真实位移造成的偏移为 $(\partial^2 u_x / \partial x^2 + \partial^2 u_x / \partial y^2) / 4$ 及 $(\partial^2 u_y / \partial x^2 + \partial^2 u_y / \partial y^2) / 4$ 。对于试件表面大部分区域而言,可以估计出该偏差远小于 0.001 mm ,可忽略不计。另外,也可以对位移数据进行曲面拟合,从而得到较为平滑的位移场。图 2(a) 和(b)显示的即为载荷在 42 kN 时,经过平滑后的位移场 u_x 和 u_y 。需要强调的是,由于缺陷区域材料的不连续性导致位移测量数据在缺陷区附近不完整;而计算构型力及相应的守恒积分更关心缺陷区域外的参量,因而这并不影响材料构型力的计算精度。

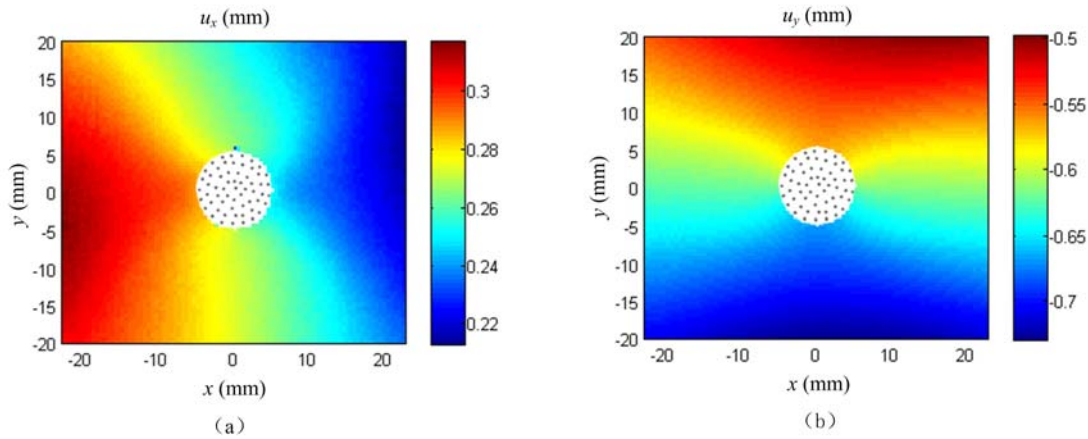


图2 测量得到并经过平滑后的面内位移场 (a) x 方向位移场 u_x , (b) y 方向位移场 u_y

Fig.2 The measured values of the displacements (a) u_x , (b) u_y

接下来在 x 和 y 方向上分别使用三次样条函数对位移数据进行拟合,然后求导数,得到小变形条件下的应变场 ϵ_x 和 ϵ_y 以及位移场的方向导数 $\partial u_x / \partial y$ 和 $\partial u_y / \partial x$, 分别如图 3(a)~(d) 所示。

2.3 应力场的计算及应变能密度场的获取

LY-12 铝合金为典型的非线性材料,其在整个单向拉伸过程中满足幂强化规律。因而当载荷低于屈服应力时,可以直接使用平面应力问题的线弹性本构方程求解应力,即

$$\begin{cases} \sigma_x = E(\epsilon_x + \nu \epsilon_y) / (1 - \nu^2) \\ \sigma_y = E(\epsilon_y + \nu \epsilon_x) / (1 - \nu^2) \\ \sigma_{xy} = E \epsilon_{xy} / (1 + \nu) \end{cases} \quad (18)$$

其中, E 和 ν 为材料的弹性模量和泊松比。而应变能密度可以表示为 $W = \int \epsilon_{ij} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} / 2$ 。

但当载荷使材料屈服时,直接使用线弹性本构方程会造成较大的应力计算误差;特别是由于试件中心分布的缺陷,缺陷可能导致塑性区蔓延至测量区域,因而引入 Ramberg-Osgood 弹塑性本构关系来描述材料的弹塑性特性。单向拉伸的 Ramberg-Osgood 本构方程如下式所示:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (19)$$

其中 σ_0 为残余应变为 0.2% 时的应力,并且存在 $\sigma_0 = E \epsilon_0$ 的关系。对于 LY-12 铝合金, σ_0 约为 287 MPa 。 α 和 n 分别为硬化系数和硬化指数。通过最小二乘拟合由 LY-12 标准试件的单向拉伸应力应变曲线,可以得到 $\alpha = 0.2587$ 及 $n = 18.81$ 。

对于复杂应力状态, Ramberg-Osgood 本构关系的表达式为:

$$\frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_0} = (1 + \nu) \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} - \delta_{ij} \nu \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_0} + \frac{3}{2} \alpha \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\sigma_0} \quad (20)$$

其中 $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3$ 为应力偏量; $\bar{\sigma} = \sqrt{3 s_{ij} s_{ij} / 2}$ 为等效应力;硬化系数 α 和硬化指数 n 与单向拉伸得到的拟合数据相同。

对于平面应力状态,式(20)可以简化为:

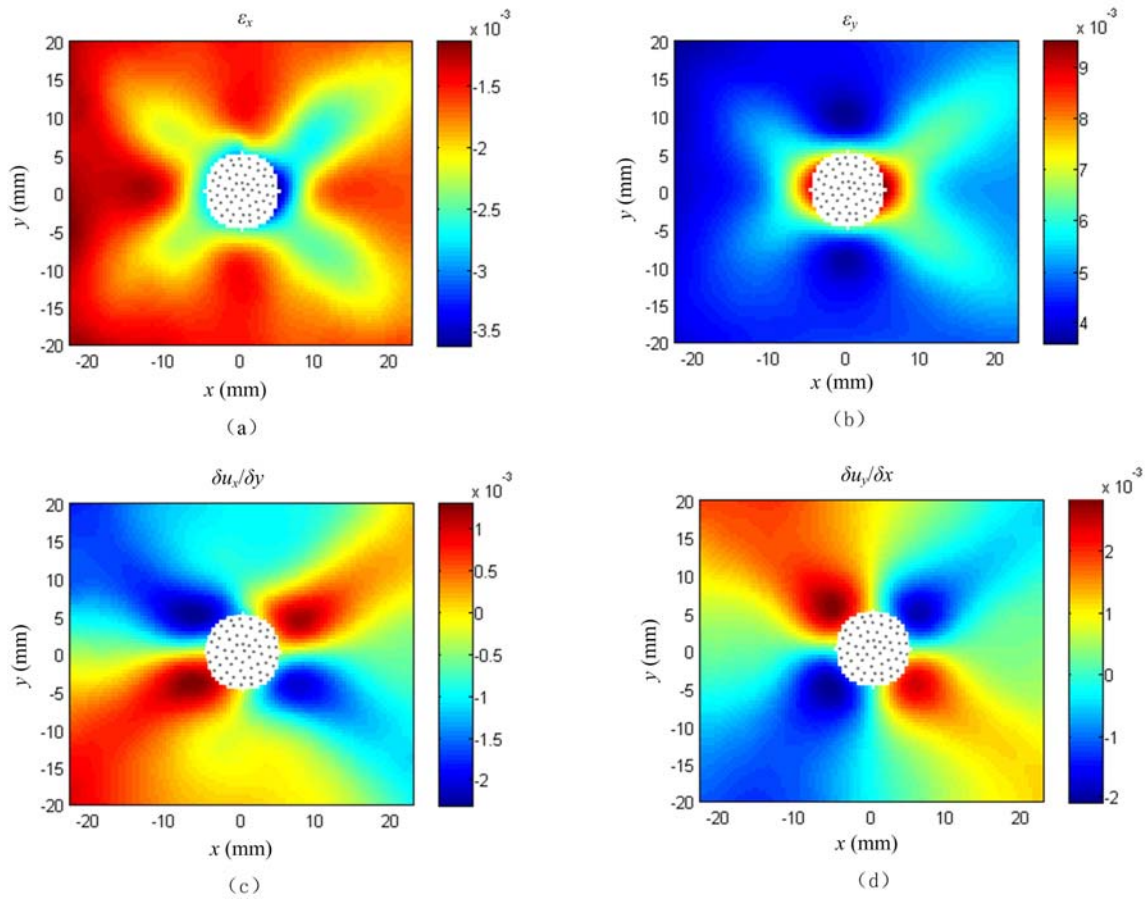


图 3 利用三次样条函数拟合位移场得到小变形应变场(a) ϵ_x , (b) ϵ_y ,
以及位移场的另外两个偏导数(c) $\partial u_x / \partial y$, (d) $\partial u_y / \partial x$

Fig. 3 The calculated values of strains (a) ϵ_x , (b) ϵ_y ,
The evaluated displacement gradient (c) $\partial u_x / \partial y$, (d) $\partial u_y / \partial x$

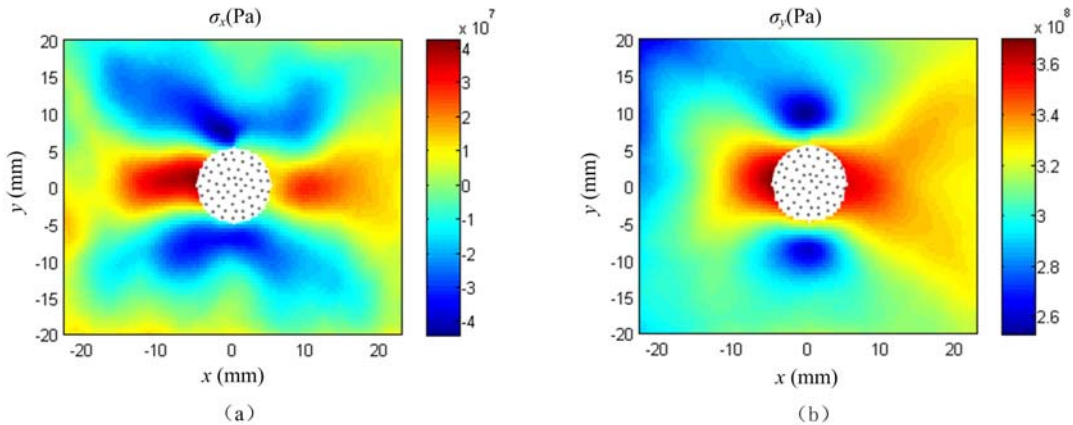


图 4 利用 Ramberg-Osgood 本构方程计算出的应力(a) σ_x , (b) σ_y

Fig. 4 The evaluated stresses by Ramberg-Osgood theory (a) σ_x ; (b) σ_y

$$\begin{cases} \epsilon_x = (1 + \nu) \sigma_x / E - \nu(\sigma_x + \sigma_y) / E + \alpha(\bar{\sigma} / \sigma_0)^{n-1} (\sigma_x - \sigma_y / 2) / E \\ \epsilon_y = (1 + \nu) \sigma_y / E - \nu(\sigma_x + \sigma_y) / E + \alpha(\bar{\sigma} / \sigma_0)^{n-1} (\sigma_y - \sigma_x / 2) / E \\ \epsilon_{xy} = (1 + \nu) \sigma_{xy} / E + 3\alpha(\bar{\sigma} / \sigma_0)^{n-1} \sigma_{xy} / (2E) \end{cases} \quad (21)$$

其中等效应力表示为 $\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xy}^2}$ 。 ϵ_x 、 ϵ_y 及 ϵ_{xy} 已由实验测量得到, σ_x 、 σ_y 及 σ_{xy} 为待求分量;

使用迭代法求解方程组(21), 可得到应力分量 σ_x 、 σ_y , 如图 4(a) 和(b) 所示。

对于弹塑性变形, 材料的应变能与变形过程相关, 因而需使用 $W = \int \epsilon_{ij} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ 计算某一点的应变能密度。根据 Ramberg-Osgood 本构方程, 推导得到应变余能 $W_c = \int \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\sigma_{ij}$ 的解析形式为:

$$W_c = \frac{\sigma_y^2 + 2\sigma_{xy}^2(1+\nu) + \sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_y\nu}{2E} + \frac{\alpha(\sqrt{\sigma_x^2 + 3\sigma_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2})^{n+1}}{E(1+n)\sigma_0^{n-1}} \quad (22)$$

则整个变形过程的变形能等于全功减去应变余能, 即 $W = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - W_c$:

$$W = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y\nu + 2\sigma_{xy}^2(1+\nu)}{2E} + \frac{n\alpha(\sqrt{\sigma_x^2 + 3\sigma_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2})^{n+1}}{E(1+n)\sigma_0^{n-1}} \quad (23)$$

如果采用数值方法计算应变能密度, 则可采用对一点的整个应力应变过程进行数值积分。即计算任意载荷下的应力应变状态, 并对该状态之前所有的应力应变变化过程进行数值积分, 进而可得到该状态的应变能密度。载荷为 42kN 时的应变能密度分布如图 5 所示。

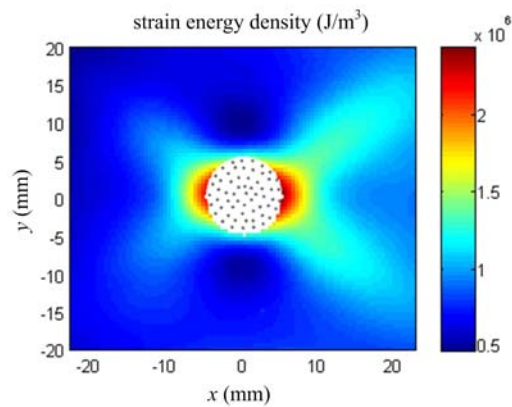


图 5 通过对应力应变过程积分得到的应变能密度

Fig. 5 The evaluated strain energy density by numerical integration of stress-strain curve

2.4 构型力的计算结果

通过上一节的讨论, 计算式(3)、(9)、(14)中的构型力所需要的分量, 即应变能密度分量 W 、应力分量 σ_{ij} 及位移偏导数分量 $u_{i,j}$ 均已求得, 可以直接带入构型力表达式(3)、(9)、(14)进行计算。载荷为 42kN 时的面内构型力分布如图 6(a)~(h) 所示。

根据上述计算得到的应力、位移梯度及构型力的场分布结果, 还可以获得一系列守恒积分。如图 7 所示为载荷 42kN 下, 不同正方形路径(边长为 s) 下 M 积分的归一化数值结果及与有限元模拟结果(图 8)对比。我们可以发现, 两者之间误差小于 10%, 此误差一方面来源于 DIC 中位移的实验测量误差, 其取决于镜头分辨率、散斑品质等环境因素; 另一方面来源于 MTS 实验试件工况与数值模拟载荷选取的误差。实际上, DIC 测量技术一方面可以用于测量材料构型力, 另一方面, 也可以有效的用于测量各种守恒积分。

3 结论

本文简要介绍了构型力的来源以及构型力与守恒积分之间的关系, 随后提出了一种基于 DIC 测量技术下计算弹塑性材料构型力的有效方法。该方法通过测量出试件表面的位移场, 利用三次样条函数拟合位移场并求导, 获取应变场和位移偏导数, 并通过非线性本构方程计算出材料的应力场和应变能密度场, 进而带入构型力表达式进行计算。本方法简便、有效、可行, 填补材料构型力学发展所遇到的实验工作空白。本方法能准确计算三类材料构型力, 还可以扩展应用于测量多缺陷材料的守恒积分, 如 J 、 M 和 L 积分; 此外, 本文提出的计算非线性材料表面的应力场、应变能场的方法可以直接应用于幂硬化材料的非线性变形测量中。

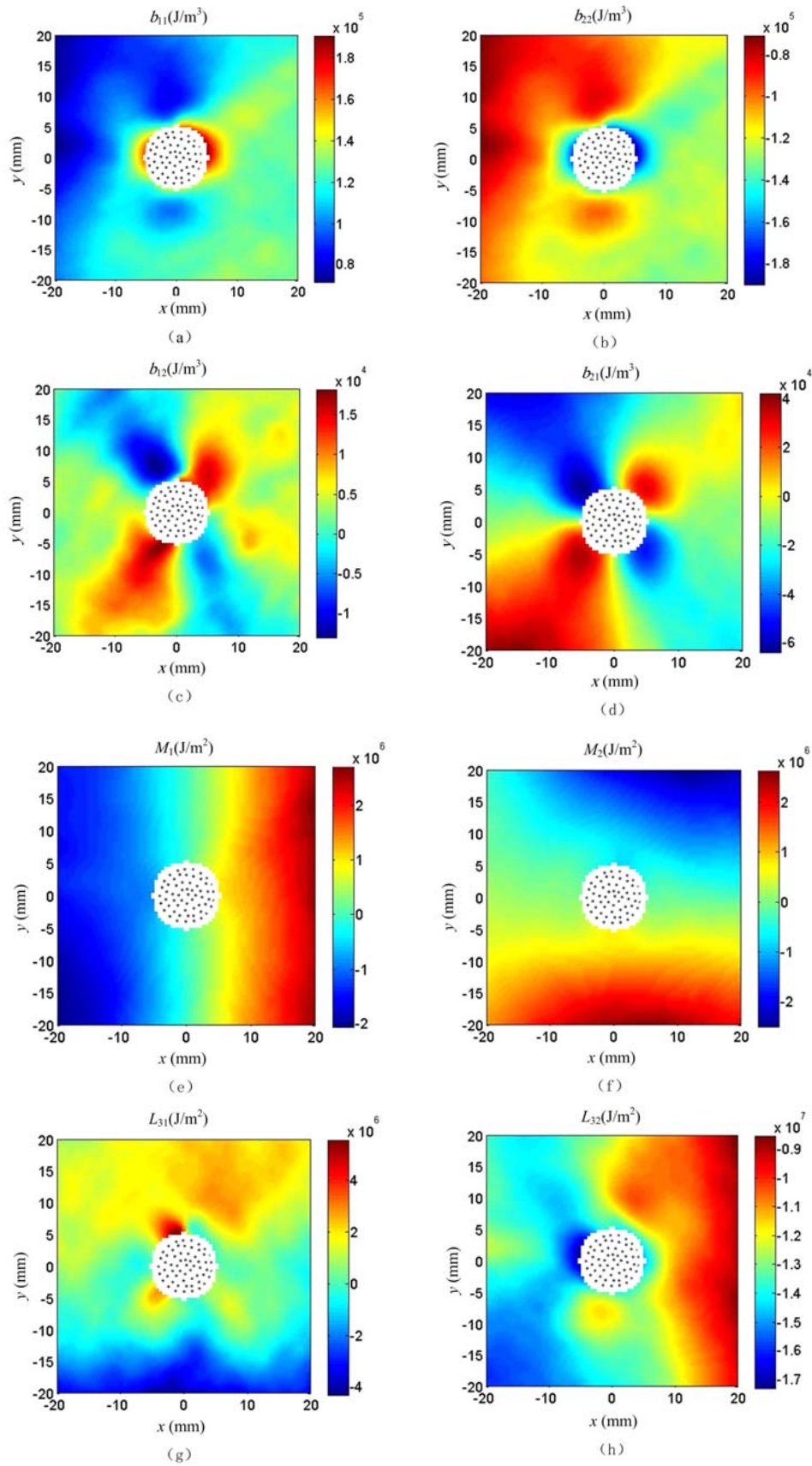


图 6 构型力实验数据 (a) b_{11} , (b) b_{22} , (c) b_{12} , (d) b_{21} , (e) M_1 , (f) M_2 , (g) L_{31} , (h) L_{32}

Fig. 6 The evaluated experimental configurational forces (a) b_{11} , (b) b_{22} , (c) b_{12} , (d) b_{21} , (e) M_1 , (f) M_2 , (g) L_{31} , (h) L_{32}

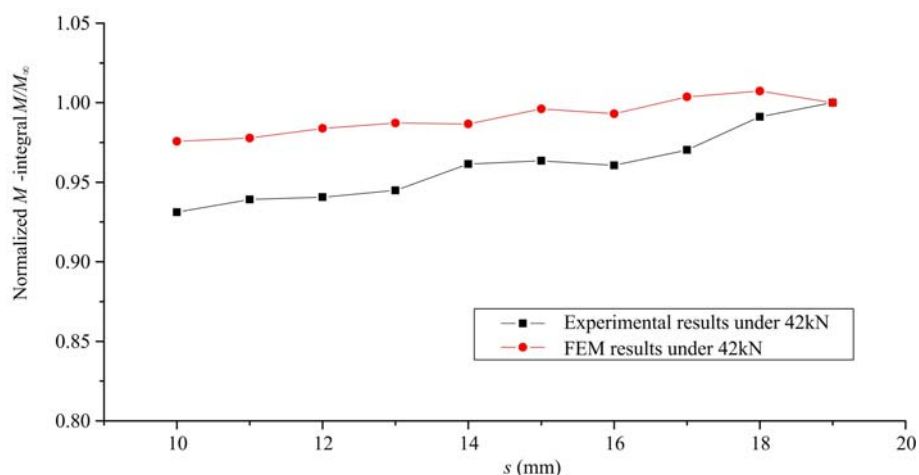


图 7 载荷为 42kN 时不同路径的 M 积分值与 FEM 模拟结果

Fig. 7 Comparison of the M-integral between experimental evaluations and FEM calculations under 42kN

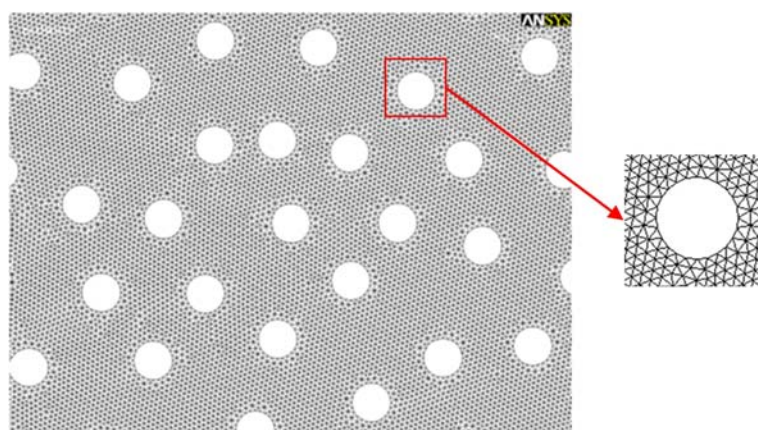


图 8 M 积分有限元计算模型缺陷区附近的单元划分

Fig. 8 Finite element mesh of the experimental specimen near the defect zone for calculating the M-integral in an elastic-plastic plate

参考文献：

- [1] Eshelby J D. The elastic energy-momentum tensor [J]. J. Elasticity, 1975, 5:321—335.
- [2] Pak Y E, Herrmann G. Conservation laws and the material momentum tensor for the elastic dielectric [J]. International Journal of Engineering Science, 1986, 24(8):1365—1374.
- [3] McMeeking R M. A J-integral for the analysis of electrically induced mechanical stress at cracks in elastic dielectrics [J]. International Journal of Engineering Science, 1990, 28(7):605—613.
- [4] Dascalu C, Maugin G. Energy-release rates and path-independent integrals in electroelastic crack propagation [J]. International Journal of Engineering Science, 1994, 32(5):755—765.
- [5] Suo C M. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1992, 40(4):739—765.
- [6] Chen Y H. Advances in conservation laws and energy release rates [M]. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [7] Rice J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notch and cracks [J]. J. Appl. Mech., 1968, 35:379—386.
- [8] Cherepanov G P. The propagation of cracks in a continuous medium [J]. J. Appl. Math. Mech., 1967, 31:503—512.
- [9] Bueckner H F. Field singularities and related integral representations [J]. Mechanics of fracture, 1973, 1:239—

- 314.
- [10] Knowles J K, Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics [J]. Arch. Rational Mech. Anal. , 1972, 44:187—211.
 - [11] Budiansky B, Rice J R. Conservation laws and energy release rates [J]. J. Appl. Mech. , 1973, 40:201—203.
 - [12] Herrmann A G, Herrmann G. On energy-release rates for a plane crack [J]. Journal of applied mechanics, 1981, 48:525.
 - [13] 郭树祥, 许希武. 任意多椭圆孔多裂纹无限大板的应力强度因子与 M 积分[J]. 固体力学学报, 2006, 27(1):7—14 (Guo Shuxiang, Xu Xiwu. The SIFS and M-integral of the Infinite Plane with Multiple Elliptical Holes and Cracks [J]. Aata Mechanica Solida Sinica, 2006, 27(1):7—14 (in Chinese))
 - [14] 李群, 王芳文. 含微缺陷各向异性复合材料中的 J_k 积分和 M 积分[J]. 西安交通大学学报, 2008, 42(1):60—64 (Li Qun, Wang Fangwen. J_k -Integral and M-integral in Anisotropic Composite Material Containing Multiple Defects [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, 42(1):60—64 (in Chinese))
 - [15] 王德法, 高小云, 师俊平. 三维固体问题中 M 积分与总势能变化关系的研究[J]. 水利与建筑工程学报, 2009, 7(1): 36—38 (Wang Defa, Gao Xiaoyun, Shi Junping. Study on Relation between M—integral and Change of Total Potential Energy in Three-dimensional Solids [J]. Journal of Water Resources and Architectural Engineering, 2009, 7(1): 36—38 (in Chinese))
 - [16] Chang J H, Chien A J. Evaluation of M-integral for anisotropic elastic media with multiple defects [J]. International Journal of Fracture, 2002, 114:267—289.
 - [17] Chang J H, Peng D J. Use of M integral for rubbery material problems containing multiple defects [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, 130:589—598.
 - [18] Chang J H, Wu W H. Using M-integral for multi-cracked problems subjected to nonconservative and nonuniform crack surface tractions [J]. International Journal of Solids and Structures, 2011, 48:2605—2613.

On the Algorithm of Material Configurational Force Based on Digital Image Correlation Measurement

YU Ning-yu^{1,2}, LI Qun¹

(1. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, Shaanxi, China; 2. School of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054, Shaanxi, China)

Abstract: The focus of material configurational mechanics is the free energy variation of a system due to the defects (such as inclusion, cavity, dislocation, crack and plastic zone etc.) configurational (such as shape, size and position etc.) evolution in material. In this study, nondestructive evaluation of material configurational force in elastoplastic materials was carried out. The displacement distribution of specimen was obtained through experimental measurement based on digital image correlation. According to the definition of material configurational force formula, the distribution of defect's configurational force in elastoplastic materials was calculated. The methods are summarized below: the displacement distribution of specimen is obtained through experimental measurement based on digital image correlation; the strain and displacement differential are calculated through the smoothed displacement by spline function technique; the surface stress distribution of elastoplastic materials is calculated based on Ramberg-Osgood theory; the total strain energy density is evaluated by integration of nonlinear strain-stress relation. The method proposed in this paper is applicable for both common elastic materials and elastoplastic materials, and can be used to evaluate the material configurational force for various defects and defect clusters.

Keywords: configurational force; digital image correlation (DIC); multi-defects