

文章编号: 1001-4888(2013)02-0180-07

## 光弹性—数字散斑相关混合法 在光弹条纹主应力分解中的应用

李 斌<sup>1</sup>, 杨国标<sup>1,2\*</sup>

(1. 同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092; 2. 同济大学 国家力学实验教学示范中心, 上海 200092)

**摘要:** 光弹性法是研究结构内部应力分布问题的一个有效方法。光弹性实验中, 通常可以方便地得到等色线条纹图。确定了等色线条纹级数以后, 为获得平面模型中任意点的应力完全解, 需要借助其它方法给出一个补充方程。本文将光弹性法与数字散斑相关法相结合, 提出一种用于光弹性法分离主应力的新方法: 光弹性—数字散斑相关混合法。在理论研究的基础上, 设计了光弹性—数字散斑相关混合法实验系统, 并通过相应的三点弯曲实验对该方法和实验系统的有效性做出分析和论证。该研究为光弹全场应力分解以及动态光弹性—数字散斑相关混合法提供了理论和实验基础。

**关键词:** 光弹性; 数字散斑相关; 混合法; 等色线条纹; 主应力分离

**中图分类号:** O348.11 **文献标识码:** A **DOI:** 10.7520/1001-4888-12-115

### 0 引言

光弹性实验应力分析是一种光学应力分析方法, 它的突出优点是直观性强, 可以得到全场应力, 由于实验可以得到应力条纹图, 即等色线和等倾线, 因而可以从模型条纹图上直接观察应力集中部位, 并能准确确定应力集中系数和模型边界点的应力数值, 因此是解决构件应力集中问题的有效方法, 但是对于模型内的任意点, 由于利用等色线只能获得任意点的主应力差  $\sigma_1 - \sigma_2$  (三维问题为次主应力差  $\sigma'_1 - \sigma'_2$ ), 要得到任意一点的主应力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ , 达到全场定量分析的目的, 还需要进行主应力分离。

主应力分离的问题是光弹法应用中的一个难题, 国内外也有不少学者对此进行了研究, 提出了一些分离主应力的方法, 其基本思路主要是借助其它方法给出补充方程与应力光学定律结合进行应力场的定量分析<sup>[1, 2]</sup>。根据目前的研究情况, 主应力分离的方法大概可分为: 特殊法 (利用特殊的几何模型和特殊边界)<sup>[3, 4]</sup>、混合法<sup>[5, 6]</sup>、相移法<sup>[7-9]</sup>等。这些方法都不同程度的存在适合模型范围窄、辅助设备昂贵、计算繁琐等缺点。

本文将光弹性法与数字散斑相关法相结合, 提出一种用于光弹分离主应力的新方法: 光弹性—数字散斑相关混合法 (Photoelasticity-Digital Speckle Correlation Hybrid Method, 简称 P-DSC HM)。该方法是对现有主应力分离方法的丰富和补充, 在分解效率上有较大的提升。在理论研究的基础上, 设计了光弹性—数字散斑相关混合法实验系统, 并通过相应实验对该方法和实验系统的有效性做出分析和论证。该研究为动态光弹性—数字散斑相关混合法提供了理论和实验基础。

\* 收稿日期: 2012-09-14; 修订日期: 2012-12-06

基金项目: 国家自然科学基金(10972160), 国家自然科学基金(11272239)资助

通讯作者: 杨国标(1969—), 男, 博士, 教授。研究方向: 实验力学与图像处理。E-mail: yanggby@tongji.edu.cn

## 1 光弹性—数字散斑相关混合法

### 1.1 光弹性法

光弹性法以应力—光学定律为基础,利用环氧树脂、聚碳酸酯等光弹性材料在应力作用下产生的暂时双折射现象,通过偏振光场获得全场的等色线条纹图<sup>[1,2]</sup>。

对平面应力问题,在荷载和正入射的偏振光场下,应力—光学定律可以表达为:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_\sigma}{h} \quad (1)$$

式中,  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  为模型内任一点的两个主应力;  $N$  为条纹级数;  $f_\sigma$  为材料条纹值;  $h$  为模型厚度。

常用的光弹性实验系统组成,如图1所示。

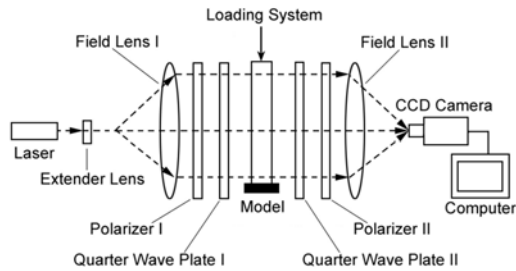


图1 光弹性实验系统示意图

Fig.1 Schematic diagram of photoelasticity experimental system

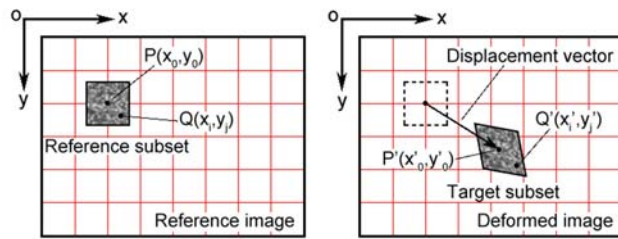


图2 数字相关法基本原理

Fig.2 Basic principle of digital speckle correlation method

### 1.2 数字散斑相关法

数字图像相关方法通过处理被测对象表面变形前的数字图像（Reference image）和变形后的数字图像（Deformed image），从而获得位移和应变信息<sup>[10]</sup>。该方法的基本原理,如图2所示。

数字散斑相关实验系统的组成如图3所示。在待测试件表面进行人工制斑,或者直接利用试件表面的自然纹理作为标记。CCD摄像机的光学主轴垂直于试件表面。在加载过程中,忽略试件表面微小的离面位移影响,假设试件表面只有面内位移。

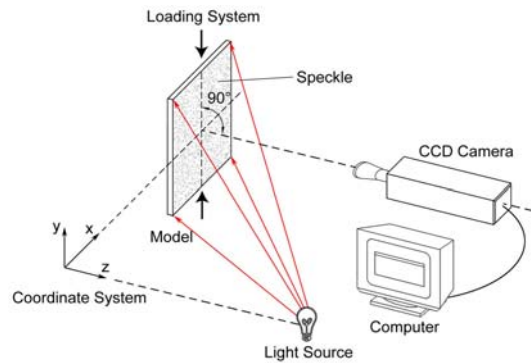


图3 数字散斑相关实验系统示意图

Fig.3 Schematic drawing of digital speckle correlation experimental system

### 1.3 光弹性—数字散斑相关混合法

光弹性—数字散斑相关混合法的基本原理是:

利用数字散斑相关法得到二维光弹性模型表面(其表面进行过人工制斑处理)沿  $x$  轴和  $y$  轴的两个位移场分量  $u_x$  和  $u_y$ :

$$\begin{aligned} u_x &= f(x, y) \\ u_y &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

对  $u_x$ 、 $u_y$  微分后可以得到:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

根据 Hooke 定律:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (4)$$

可以得到

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (5)$$

与此同时,对二维模型进行光弹实验。

对于平面应力问题,在正入射的偏振光场下,应力—光学定律可以表达为:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_\sigma}{h} \quad (6)$$

将式(5)与式(6)联立可计算出  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 即:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{2(1-\nu)}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{f_\sigma}{2h}N \\ \sigma_2 &= \frac{E}{2(1-\nu)}(\epsilon_x + \epsilon_y) - \frac{f_\sigma}{2h}N\end{aligned}\quad (7)$$

在理论研究的基础上,本文设计了光弹性—数字散斑相关混合法实验系统,其组成如图 4 所示。

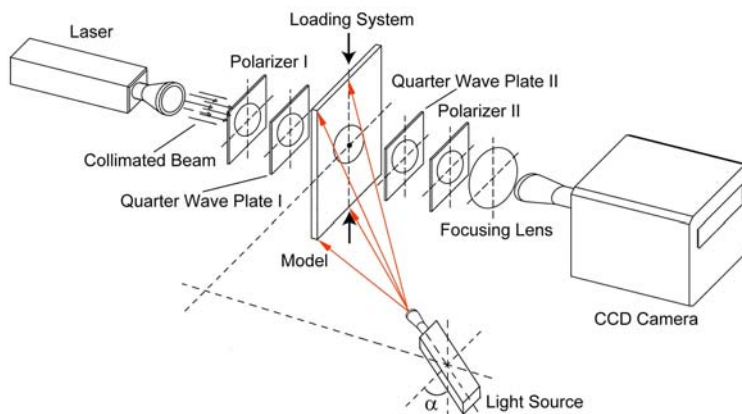


图 4 光弹性—数字散斑相关混合法实验系统

Fig. 4 Schematic drawing photoelasticity-digital speckle correlation hybrid method experimental system

根据光弹性—数字散斑相关混合法特点,实验系统采用了轴对称荷载作用的轴对称光弹模型,并对模型表面进行如图 5 所示处理。模型对称轴左边用于进行数字散斑相关实验,右边进行光弹性实验。

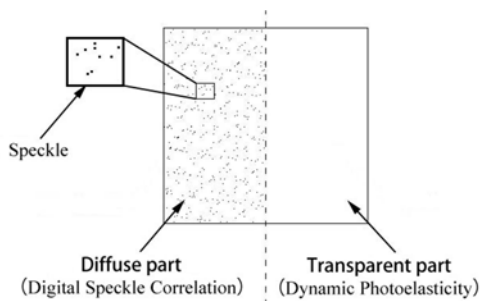


图 5 实验模型表面

Fig. 5 The surface of model

光弹性—数字散斑相关混合法实验系统可以同时进行数字散斑相关实验和光弹性实验,即通过一次实验可以同时得到模型表面的散斑场(图 5 中对称轴左边)和光弹性等色线条纹图(图 5 中对称轴右边)。通过对两部分图像分别进行处理,即可计算出该模型左半边表面的位移场信息(式(2))及主应力差信息(式(6))。由于模型和荷载都具有对称性,模型对称轴两边应变具有对称分布的特点,利用这一特点再根据前述理论推导即可实现光弹性主应力分离。

## 2 实验及结果

### 2.1 实验方案

以三点弯曲简支深梁为对象,利用光弹性—数字散斑相关混合法实验系统(如图6所示)进行实验。试件尺寸及实验加载示意图如图7所示。试件采用环氧树脂材料,其材料条纹值为 $1.20 \times 10^4 \text{ N/m} \cdot \text{级}$ ,弹性模量为 $3445 \text{ MPa}$ ,泊松比为 $0.36$ ,荷载 $F$ 为 $880 \text{ N}$ 。

对试件表面进行如图8的处理,其中左半部分为人工散斑,首先采用哑光白色(NO. 1007 MATT WHITE)BOTNY自动喷漆对试件左半部分进行均匀喷涂,形成白色背景。干燥通风环境放置两小时后,采用哑光黑色(NO. 4 MATT BLACK)喷漆对试件左半部分的白色背景上进行随机喷涂,形成人工散斑。干燥通风环境放置两小时后,试件即可进行实验。喷涂过程中要对试件右半部分进行密封遮挡,防止喷漆沾污试件右半部分。试件中缝处可能会有稍许喷漆“侵入”显现,这将直接影响到该区域的实验结果,可采用酒精棉签进行局部处理。在使用该方法进行正式实验前,还要分别采用标准实验对数字散斑相关实验和光弹性实验进行单独标定。

本次实验选取了 $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$ 以及其关于试件轴对称点 $A', B', C', D', E', F', G', H', I', J', K'$ 作为测点。



图6 实验设备

Fig. 6 Experimental set-up

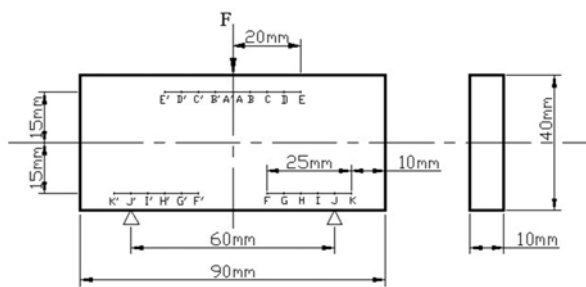


图7 试件尺寸及实验加载示意图

Fig. 7 Specimen geometry and loading condition

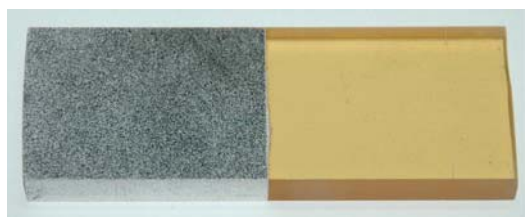


图8 试件实物图

Fig. 8 Specimen

### 2.2 实验结果

图9为本次实验采集到的参考图像和变形后图像。



图9 参考图像(a)和变形后图像(b)

Fig. 9 The reference (a) and deformed (b) image of the three-point bending experiment

对实验采集到的图像进行分析处理,其中 Part I 进行数字散斑相关分析,Part II 进行光弹性等色线条纹分析。图 10 为光弹性实验部分等色线条纹级数。

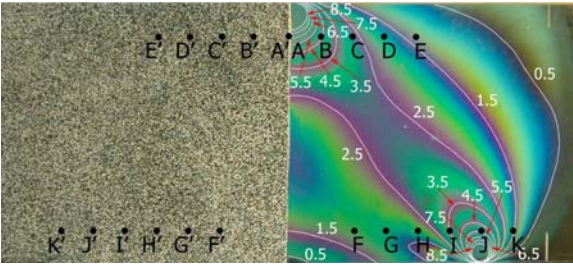


图 10 光弹性实验部分等色线条纹级数

Fig. 10 Fringe order of the isochromatics observed in the photoelastic experiment

分别读取 Part I 和 Part II 测点的分析数据,如表 1 所示,其中 A-K 测点处的  $\epsilon_x + \epsilon_y$  值是由 A'-K' 测点的  $\epsilon_x + \epsilon_y$  值根据轴对称关系计算得到的。A'-K'测点的  $\epsilon_x + \epsilon_y$  值是通过数字散斑相关法测得的。

表 1 光弹性(P)和数字相关(DSC)计算结果

Tab. 1 The results of the photoelasticity method and digital speckle correlation method

|     |                           | A    | B    | C    | D    | E    | F    | G    | H    | I    | J    | K    |
|-----|---------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| DSC | $\epsilon_x + \epsilon_y$ | 1929 | 1098 | 553  | 329  | 206  | 331  | 336  | 462  | 887  | 1157 | 216  |
| P   | N                         | 7.00 | 4.75 | 2.75 | 1.83 | 1.30 | 1.75 | 2.00 | 2.00 | 3.50 | 4.83 | 1.50 |

注: N 的单位为级,  $\epsilon_x + \epsilon_y$  的单位为  $\mu\epsilon$

将以上计算数据代入公式(7)可得  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ ,如表 2 所示。

表 2 光弹性—数字相关混合法分解结果(单位:MPa)

Tab. 2 The principal stress obtained by P-DSC HM (unit: MPa)

|            | A         | B        | C        | D        | E        | F        | G        | H        | I        | J        | K        |
|------------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\sigma_1$ | -0.80319  | -0.16284 | 0.09483  | 0.13598  | 0.12293  | 1.47490  | 1.17390  | 0.97275  | 1.01560  | 0.61103  | -0.16745 |
| $\sigma_2$ | -11.18760 | -6.07340 | -2.88310 | -1.64010 | -0.98659 | -0.31035 | -0.63499 | -1.51770 | -3.76270 | -5.62160 | -1.33160 |

注:  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的单位为 MPa

### 3 分析

为了进一步证明该方法的有效性,本文还采用 ANSYS 有限元分析软件对实验模型进行了计算。根据模型以及荷载的对称性,取 1/2 平面模型进行计算,弹性模量为 3445MPa,泊松比为 0.36,单元为 PLAN42,单元宽度为 0.5mm。有限单元法计算结果如表 3 所示。

表 3 有限单元法计算结果(单位:MPa)

Tab. 3 The principal stress obtained by FEM (unit: MPa)

|            | A        | B        | C        | D        | E        | F        | G        | H        | I        | J        | K        |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\sigma_1$ | -0.92831 | -0.15223 | 0.09005  | 0.12763  | 0.11493  | 1.38293  | 1.11017  | 1.03547  | 0.95031  | 0.57915  | -0.15778 |
| $\sigma_2$ | -9.40791 | -6.39551 | -2.71924 | -1.55452 | -0.92585 | -0.29347 | -0.60021 | -1.42259 | -3.55283 | -5.30129 | -1.41531 |

将光弹性—数字散斑相关混合法获得的数据与有限单元法计算结果进行对比,如图 11 所示。通过对比发现:两种方法在测点 B,C,D,E,F,G,H,I,J,K 的计算结果非常接近,但在测点 A 处发生了较大的偏离。通过对误差分析(如表 4 和表 5),我们发现在测点 B,C,D,E,F,G,H,I,J,K 处两种方法的相对误差在 6.52%以内,在测点 A 处相对误差高达 15.90%。造成这种现象的主要原因是光弹性—数字散斑相关混合法是对试件左右两边分别进行计算,在散斑图像边缘部分,数字散斑相关法计算结果误差较大,而 A 点正好处在散斑图像的边缘处,导致最终计算结果出现较大偏差。因此在使用该方法进行计算时,需要对对称轴上的点进行单独修正。此外,经过大量实验发现:荷载大小对实验精度影响

较小,平均误差均小于 6.93%。这里要说明的是:实验中参考图像需要选取在消除模型与加载装置之间系统间隙之后的图像。

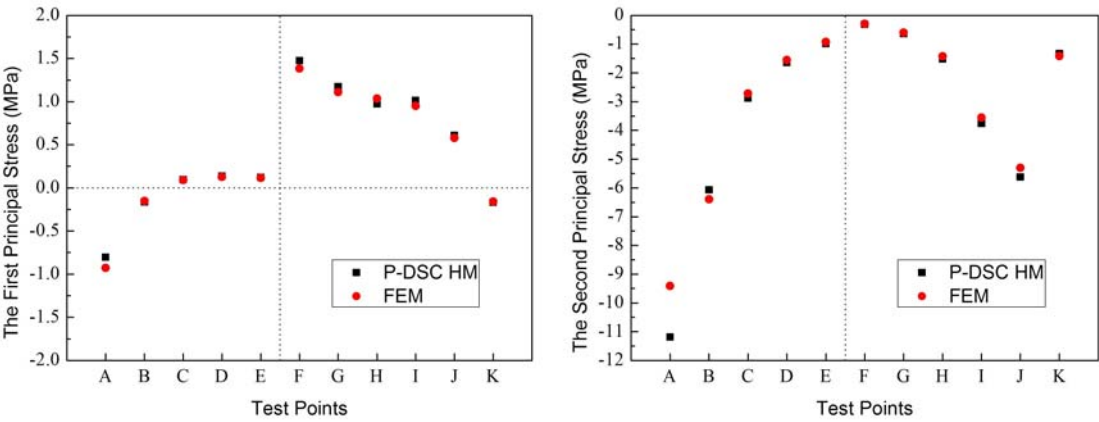


图 11 光弹性—数字散斑相关混合法和有限单元法计算结果  
Fig. 11 Comparison between the P-DSC HM and the FEM results

表 4 第一主应力结果误差  
Tab. 4 The absolute and relative errors of the first principal stress

|          | A        | B        | C       | D       | E       | F       | G       | H       | I       | J       | K        |
|----------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| P-DSC HM | -0.80319 | -0.16284 | 0.09483 | 0.13598 | 0.12293 | 1.4749  | 1.1739  | 0.97275 | 1.0150  | 0.61103 | -0.16745 |
| FEM      | -0.92831 | -0.15223 | 0.09005 | 0.12763 | 0.11493 | 1.38293 | 1.11017 | 1.03547 | 0.95031 | 0.57915 | -0.15778 |
| 绝对误差     | 0.12512  | 0.01061  | 0.00478 | 0.00835 | 0.00800 | 0.09197 | 0.06373 | 0.06272 | 0.06469 | 0.03188 | 0.00967  |
| 相对误差     | 15.58%   | 6.52%    | 5.04%   | 6.14%   | 6.51%   | 6.24%   | 5.43%   | 6.45%   | 6.37%   | 5.22%   | 5.77%    |

表 5 第二主应力结果误差  
Tab. 4 The absolute and relative errors of the second principal stress

|          | A        | B        | C        | D        | E        | F        | G        | H        | I        | J        | K        |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| P-DSC HM | -11.187  | -6.0734  | -2.8831  | -1.6401  | -0.98659 | -0.31035 | -0.63499 | -1.5177  | -3.7627  | -5.6210  | -1.3316  |
| FEM      | -9.40791 | -6.39551 | -2.71924 | -1.55452 | -0.92585 | -0.29347 | -0.60021 | -1.42259 | -3.55283 | -5.30129 | -1.41531 |
| 绝对误差     | 1.77909  | 0.32211  | 0.16386  | 0.08558  | 0.06074  | 0.01688  | 0.03478  | 0.09511  | 0.20987  | 0.31971  | 0.08371  |
| 相对误差     | 15.90%   | 5.30%    | 5.68%    | 5.21%    | 6.15%    | 5.44%    | 5.48%    | 6.27%    | 5.58%    | 5.69%    | 6.29%    |

4 结论

本文主要提出一种用于光弹法分离主应力的新方法:光弹性—数字散斑相关混合法,在理论研究的基础上,设计了光弹性—数字散斑相关混合法实验系统,通过相应实验以及有限元仿真计算对该方法和实验系统的正确性和有效性做出分析和论证。该方法适用于几何对称结构及荷载对称的光弹模型等差条纹主应力分解。根据本文光弹条纹分解思路结合反射式光弹仪可以用于非对称荷载作用下的非对称模型。此外,该方法可以推广到动光弹法主应力分解中,相关实验研究正在进行中。本文为今后的研究提供了坚实的理论和实验基础。

参考文献:

[ 1 ] Dally J W, Riley W F, Kobayashi A S. Experimental Stress Analysis[M]. New York: McGraw-Hill Book Co. , 1978.  
[ 2 ] 赵清澄. 光测力学教程[M]. 北京:高等教育出版社, 1996(ZHAO Qingcheng. Optical Mechanics[M]. Beijing:

- Higher Education Press, 1996(in Chinese))
- [ 3 ] 苏先基, 马莲芬. 多火花动态光弹性仪及其初步应用[J]. 爆炸与冲击, 1984, 4(1): 56—66 (SU Xiangji, MA Lianfen. Multiple Spark Type Dynamic Photoelastic Instrument and Its Preliminary Application[J]. Explosion and Shock Waves, 1984, 4(1): 56—66 (in Chinese))
- [ 4 ] 朱振海, 魏有志. 爆炸应力场的动光弹性分析[J]. 力学与实践, 1987, 9(6): 43—46 (ZHU Zhenghai, WEI Youzhi. Dynamic Photoelastic Stress Analysis of explosive stress field[J]. Mechanics and Engineering, 1987, 9(6): 43—46(in Chinese))
- [ 5 ] 朱振海, 杨善元. 爆炸应力场的动态云纹—光弹分析[J]. 爆炸与冲击, 1987, 7(1): 34—39 (ZHU Zhenghai, YANG Shangyuan. Dynamic Photoelastic Stress Analysis of explosive stress field[J]. Explosion and Shock Waves, 1987, 7(1): 34—39(in Chinese))
- [ 6 ] 邹同彬, 陆渝生, 连志颖. 动光弹实验中的主应力分离方法[J]. 解放军理工大学学报(自然科学版), 2004, 5(4):72—75 (ZOU Tongbin, LU Yusheng, LIAN Zhiying. Separation of Principal Stress in Dynamic Photoelastic Experiment[J]. Journal of PLA University of Science and Technology, 2004, 5(4):72—75(in Chinese))
- [ 7 ] Asundi A, Liu T, Chai G B. Phase shifting method with a normal polariscope [J]. Applied Optics, 1999, 38(28): 5931—5935.
- [ 8 ] Patterson E A, Wang Z F. Simultaneous observation of phase-stepped images for automated photoelasticity [J]. J. Strain Analysis, 1998, 33(1): 1—15.
- [ 9 ] Yoneyama S, Morimoto Y, Matsui R. Photoelastic fringe pattern analysis by real-time phase-shifting method [J]. Opt. Las. Eng., 2003, 39: 1—13.
- [10] Bing Pan, Kemao Qian, Huimin Xie, Anand Asundi. Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement: a review[J]. Measurement Science and Technology, 2009, 20(6):062001.

## On the Application of Photoelasticity-Digital Speckle Correlation Hybrid Method in Separation of Main Stress Photoelastic Fringes

LI Bin<sup>1</sup>, YANG Guo-biao<sup>1,2</sup>

(1. School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. The Paradigm Center of Mechanics Laboratory of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Photoelasticity is an effective method for structure internal stress distribution study, and is widely applied in engineering practice. Separation of principal stress is the key and difficult point in data analysis. In order to achieve that, an additional fuction is necessary. In this paper, Photoelasticity-Digital Speckle Correlation Hybrid Method is introduced to this problem. This method has combined photoelasticity method with digital speckle correlation method. On the basis of theory study, experimental system for Photoelasticity-Digital Speckle Correlation Hybrid Method were also designed. Corresponding three-point bending experiment was carried out to verify the effectiveness of this experimental system. This study may provide theoretical and experimental foundation for Dynamic Photoelasticity-Digital Speckle Correlation Hybrid Method.

**Keywords:** photoelasticity; digital speckle correlation; hybrid method; isochromatics; separation of principal stress