

文章编号:1001-4888(2006)03-0381-06

SR-CT 技术乘型迭代算法的研究^{*}

汪 敏, 胡小方

(中国科学技术大学 中科院材料力学行为和设计重点实验室, 合肥 230026)

摘要: 算法为 SR-CT(synchrotron radiation computed tomography)技术中的重要组成部分,其中乘型迭代算法为该技术的一种有效算法。本文对乘型迭代算法进行了研究,并对该算法中的一些重要参数,如迭代步长、迭代次数及初始解进行了优化分析,给出了这些参数对重建图像及运算时间的影响关系以及这些参数间的相互影响关系,同时给出了获取较优初始解的方法以及迭代步长和迭代次数的最佳取值范围。

关键词: SR-CT; 迭代步长; 迭代次数; 相关

中图分类号: TP301 **文献标识码:** A

0 引言

SR-CT 技术独特的优点使得它越来越被广泛地应用在各个研究领域^[1-3],其重建算法及重建图像质量一直以来为众多学者的研究热点^[4-5]。迭代重建法又称直接重建法。它分为:ART(Algebraic Reconstruction Techniques)型及 SIRT(Simultaneous Iterative Reconstruction Techniques)型。而 ART 中又可分为加型和乘型等^[6]。在 SR-CT 技术中,应用乘型迭代算法进行运算时,迭代步长、迭代次数及初始解是影响重建结果精度的关键因素,同时也是影响重建运算时间的重要因素,并且迭代次数直接受迭代步长及初始解的影响。为此,有必要对这些参数及其相互关系进行系统的研究。

1 乘型迭代算法

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{x}^{(0)} \quad \text{初始解, } J \text{ 维, 自己定义} \\ & x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} \left[\frac{p_i}{\mathbf{r}_i^T \mathbf{x}^{(k)}} \right]^{\lambda_{ij}}, \quad j = 1, 2, \dots, J \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

乘型迭代算法公式如(1)式所示。式中, k 表示迭代次数; J 表示维数,本文指重建图像含有的像素数; λ 表示迭代步长, $0 < \epsilon \leq \lambda \leq 1$; x_j 为图像矢量 $\mathbf{x}$ 中的一个元素,大于零,本文指重建图像中的一个像素,为待求解的量; $\mathbf{x}^{(0)}$ 为 x_j 的初始解,取全等矢量; r_{ij} 为加权因子,可通过射线经过的路径求得; T 为数学符号,表示转置; p_i 表示第 i 条射线的投影值,由投影像直接获得。可以证明:在一定条件下,式(1)所得的解收敛于 $R\mathbf{x} = \mathbf{p}$ 的最大熵解^[6]。

2 重建结果评价参数

本文利用计算机对原始图像生成了一组投影数据,原始图像的大小为 240×240 (单位:像素),具体

^{*} 收稿日期: 2005-07-24; 修订日期: 2006-05-28

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(10232030)、面上项目(10472113)与 BSRF 共同资助

通讯作者: 汪敏(1979-),男,博士研究生。主要从事 SR-CT 技术的研究及材料内部微结构损伤演化的检测。E-mail: ustcwm@126.com

图像如图 2 中 *a* 所示,图中黑色部分元素(像素)的值为 0.01(灰度值为 0),白色区域元素(像素)的值为 0(灰度值为 255)。本文中由于原始图像是已知的,故而可引用相关法对乘型迭代算法重建生成的图像进行质量评价。其基本思想就是计算重建图像与原始图像间的标准化协方差相关系数 c ,相关系数 c 取值范围为 $[-1, 1]$,即当重建图像与原始图像完全一致时, $c=1$,完全不一致时, $c=0$,完全相反时, $c=-1$ ^[5],也即相关系数值越大,重建图像越接近原始图像,其误差越小;反之,重建图像远离原始图像,其误差越大。相关系数 c 的计算公式如(2)式,式中 $\mathbf{x}$ 表示重建的结果, $\mathbf{x}^r$ 表示原始图像中的元素值, $\bar{x}$ 、 $\bar{x}^r$ 均表示平均值。

$$c = \frac{\sum_j (x_j - \bar{x})(x_j^r - \bar{x}^r)}{\sqrt{(\sum_j (x_j - \bar{x})^2)(\sum_j (x_j^r - \bar{x}^r)^2)}} \quad (2)$$

3 影响乘型迭代算法的主要参数

为了考察参数 k 、 λ 及 $\mathbf{x}^{(0)}$ 对乘型迭代算法的影响模式及这些参数间的相互影响方式,本文采用乘型迭代算法在不同 k 、 λ 及 $\mathbf{x}^{(0)}$ 值时对原始图像计算机生成的投影数据进行重建运算,后得到了一系列重建图像。将这些图像与原始图像进行标准化协方差计算,并获得了它们与原始图像间的相关系数,从而为分析这些参数对乘型迭代算法的影响模式及参数间的相互影响关系提供了数值基础。详细分析如下。

3.1 迭代步长对乘型迭代算法及迭代次数的影响

为了便于考察迭代步长对乘型迭代算法的影响,先将 $\mathbf{x}^{(0)}$ 设为全 1 矢量,即 $x_j^{(0)} = 1$ ($j=1, 2, \dots, 240 \times 240$)。图 1 为乘型迭代算法在不同迭代步长、不同迭代次数时对投影数据进行运算而获得的重建图像与原始图像间的相关系数曲线图。

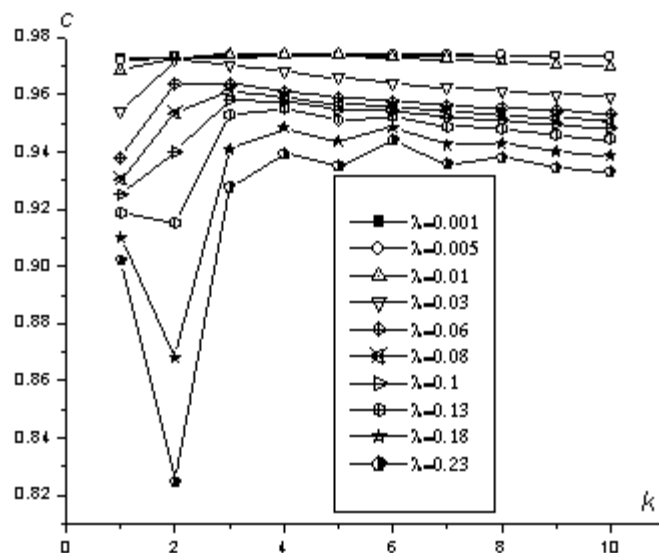


图 1 乘型迭代算法在不同迭代步长、不同迭代次数下的重建图像与原始图像间的相关系数

Fig. 1 Shows the correlation coefficient between the original image and these reconstruction images acquired by multiplication algebraic reconstruction technique in different iterative length and iterative times

图 1 表明,当初始解一定时,对于所有迭代步长,乘型迭代算法都存在一最佳迭代次数(k')。即当迭代运算进行一定次数后,继续迭代会使得重建图像的质量下降。因此由图 1 可得相同初始解下不同迭代步长的最佳迭代次数及其对应重建图像与原始图像的相关系数值,其具体数值如表 1 所示。由图 1 及表 1 可知, λ 值越小,重建结果与真实解的相关系数值就越大,也就是重建图像的质量越高。结果表

明 λ 值的大小直接影响重建图像的质量。同时由表 1 可知 $k'-\lambda$ 的关系,即 λ 值小到一定极限后,随 λ 的减小, k' 值增加很大;当 λ 值大到一定极限后,随 λ 的增大, k' 值也将增大,并在这种情况下 c 值随着 k 值的变化曲线出现振荡,且 λ 值越大振荡的幅度就越大。考虑到重建精度及重建时间,根据表 1,建议迭代步长值宜取在 0.01~0.1 之间。下表 1 为初始解为全 1 时,乘型迭代算法在不同迭代步长下所对应的最佳迭代次数及其重建图像与原始图像间的相关系数值。

表 1 乘型迭代算法在不同迭代步长下的最佳迭代次数及其对应重建图像与原始图像间的相关系数
Tab. 1 The best iterative times for multiplication algebraic reconstruction technique in different iterative length and the correlation coefficient between the original image and the reconstruction image acquired in the preceding condition

λ	0.001	0.005	0.01	0.03	0.06	0.08	0.1	0.13	0.18	0.23
k'	>10	6	4	2	3	3	3	4	6	6
c	>0.9735	0.9742	0.9742	0.9721	0.9641	0.9611	0.9582	0.9549	0.9487	0.9441

图 2 中 b、c、d 分别表示初始解为 1, $\lambda=0.23$ 时,迭代次数分别为 4、6、8 次的重建图像。由图 b、c、d 可知,迭代 6 次的重建图像最接近原始图像(图 2a)。



图 2 a 为原始图像,b 为 $\lambda=0.23$ 、 $k=4$ 时乘型迭代算法重建图像,c 为 $\lambda=0.23$ 、 $k=6$ 时乘型迭代算法重建图像,d 为 $\lambda=0.23$ 、 $k=8$ 时乘型迭代算法重建图像

Fig. 2 a Shows the original image, b shows the reconstruction image acquired by multiplication algebraic reconstruction technique when $\lambda=0.23$ and $k=4$, c shows the reconstruction image acquired by multiplication algebraic reconstruction technique when $\lambda=0.23$ and $k=6$, d shows the reconstruction image acquired by multiplication algebraic reconstruction technique when $\lambda=0.23$ and $k=8$

3.2 初始解对乘型迭代算法及迭代次数的影响

同上,为了便于考察初始解 $x^{(0)}$ 对重建图像质量的影响,先设定 $\lambda=0.01$ 。图 3 为乘型迭代算法在不同初始解、不同迭代次数时对投影数据进行运算而获得的重建图像与原始图像间的相关系数曲线图。

由图 3 可知,当迭代步长一定时,对于所有初始解,乘型迭代算法都存在一最佳迭代次数。因此由图 3 可得相同迭代步长下不同初始解的最佳迭代次数及其对应重建图像与原始图像的相关系数值,其具体数值如表 2 所示。由图 3 和表 2 可知,初始解为 0.01 时,乘型迭代算法重建图像的质量最好,同时最佳迭代次数最小。并且由图 3 可知,不同的初始解对乘型迭代算法的影响比较一致。下表 2 为 $\lambda=0.01$ 时,乘型迭代算法在不同初始解下所对应的最佳迭代次数(k')及其重建图像与原始图像间的相关系数值。

表 2 乘型迭代算法在不同初始解下的最佳迭代次数及其对应重建图像与原始图像间的相关系数
Tab. 2 The best iterative times for multiplication algebraic reconstruction technique in different initial solution and the correlation coefficient between the original image and the reconstruction image acquired in the preceding condition

$x^{(0)}$	0.001	0.005	0.008	0.01	0.02	0.05	0.1	1
k'	4	3	3	3	3	3	3	4
c	0.97636	0.97707	0.97715	0.97717	0.97712	0.97684	0.97647	0.97420

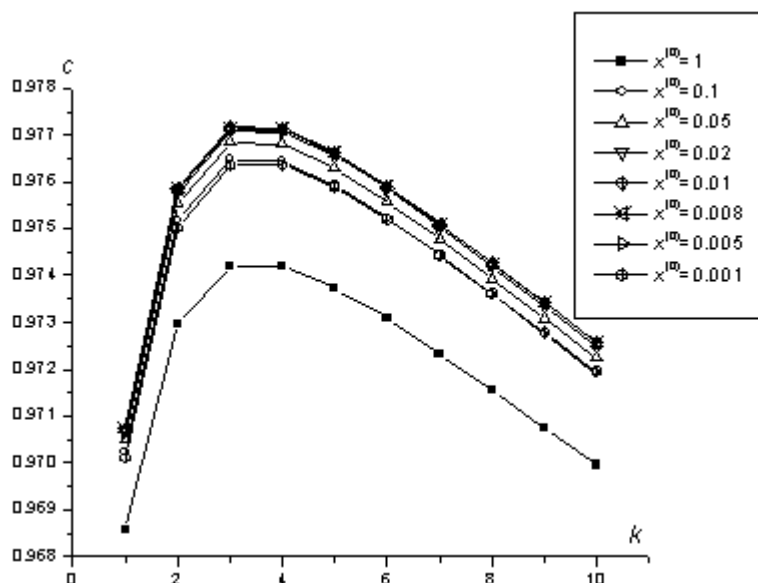


图 3 乘型迭代算法在不同初始解、迭代次数下重建图像与原始图像间的标准化协方差相关系数

Fig. 3 Shows the standard covariance coefficients between the original image and the reconstruction image acquired by multiplication algebraic reconstruction technique in different initial solution and iterative times

3.3 影响乘型迭代算法中较优初始解的因素

由图 1 可知,迭代步长对乘型迭代算法的影响非常复杂,而由图 3 可知,初始解对乘型迭代算法的影响基本相似。为此,继续考察了不同迭代步长下,乘型迭代算法所对应的最优初始解及最佳迭代次数。对于特定迭代步长而言,初始解可以为无穷多种,所以无法获得该迭代步长下乘型迭代算法所对应的最优初始解,只能获取被考察初始解中的较优解,在这里,上文中 8 种初始解被考察。同样,通过重建图像与原始图像的相关计算,获得了不同迭代步长下,乘型迭代算法的较优初始解与最佳迭代次数及其对应重建图像与原始图像间的相关系数。其结果如表 3 所示。

表 3 乘型迭代算法在不同迭代步长下的较优初始解和最佳迭代次数及其对应重建图像与原始图像间的相关系数
Tab. 3 The better initial solution and the best iterative times for multiplication algebraic reconstruction technique in different iterative length and the correlation coefficient between the original image and the reconstruction image acquired in the preceding condition

λ	0.01	0.02	0.03	0.04	0.06	0.08	0.1
$\mathbf{x}'^{(0)}$	0.01	0.01	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008
k'	3	2	2	2	2	3	3
c	0.97717	0.97758	0.97808	0.97716	0.97122	0.96643	0.96261

由表 3 可知,对于不同的迭代步长,被考察的 8 种初始解中较优初始解集中在 0.008 和 0.01,表明迭代步长对较优初始解的大小基本无影响,也即乘型迭代算法的较优初始解与迭代步长无关,而应受其它因素影响。为此,研究了初始解和与原始图像中各元素值和(又称真实解和)的关系。现定义符号 $sumo$ 为初始解和,符号 $sumr$ 为真实解和,符号 δ 为初始解和与真实解和之间的相对差系数,即

$$sumo = \sum_j x_j^{(0)}, \quad sumr = \sum_j x_j^r, \quad \delta = \frac{sumo - sumr}{sumr} \quad (3)$$

按照(4)式,计算得到了上述 8 种初始解和及其与真实解和之间的相对差系数值。其结果如表 4 所示。

表 4 真实解和与初始解和
Tab. 4 The sum of real solution and the sum of initial solution

$\mathbf{x}^{(0)}$	0.001	0.005	0.008	0.01	0.02	0.05	0.1	1
$sumr$	251.33	251.33	251.33	251.33	251.33	251.33	251.33	251.33
$sumo$	57.6	288	460.8	576	1152	2880	5760	57600
δ	-0.77	0.15	0.83	1.29	3.58	10.46	21.92	228.18

由表 4 可知,当 $\mathbf{x}^{(0)}=0.008$ 时, $\delta=0.83$;当 $\mathbf{x}^{(0)}=0.01$ 时, $\delta=1.29$ 。结果表明,8 种被考察的初始解中, $\delta=1$ 左右的初始解为较优初始解,因此,可认为真实解和是影响乘型迭代算法中较优初始解大小的因素。

3.4 实际重建运算中较优初始解的求解方法

从上面的分析可以看出, $\mathbf{x}^{(0)}$ 及 λ 的确定对重建图像的质量及 k' 值均有着重大的影响,并且 $\mathbf{x}^{(0)}$ 的选取也关系到 λ 的确定。所以,本文认为 $\mathbf{x}^{(0)}$ 的选取是迭代运算中最为关键的问题。为此,我们首先来讨论如何根据已知信息科学确定 $\mathbf{x}^{(0)}$ 。由上述部分可知,只要知道 $sumr$ 值就可以确定根据(3)式求得 $sumo$ 值。但是在实际重建运算中, $\mathbf{x}^r$ 是未知的,所以不可通过 $\mathbf{x}^r$ 直接计算 $sumr$ 值。但可以通过间接方法求解 $sumr$ 值,其方法就是通过某一角度的投影数据和获得,这里就不详细介绍了。

至此,初始解的取值步骤如下:第一步,对某一角度的投影数据进行累积求和,得出值 $sumr$ 。第二步,根据(3)式求得 $sumo$ 值。第三步,由式 $x_1 = x_2 = \cdots = x_j = \cdots = \frac{sumo}{J}$,求得初始解。其中 $j=1,2,\cdots,J$ 。

4 结论与展望

本文通过计算分析研究了初始解、迭代步长及迭代次数对乘型迭代算法的影响及这些参数间的相互影响,得出如下结论:

- (1) 乘型迭代算法中,初始解的选取在迭代重建运算中非常重要,它直接影响着重建图像质量及迭代运算次数,并且也影响迭代步长的选取。本文所提的初始解求解法可以提高重建图像质量和减少重建运算量,可推广应用到实际重建运算中。
- (2) 乘型迭代算法中,迭代步长对重建图像质量及迭代次数同样有着重要影响。初始解远离真实解时,迭代步长越小重建图像质量越高,但当初始解较为接近真实解时,这种关系不成立。如果按本文方法选取初始解,结合重建精度及运算时间,建议迭代步长的取值范围为 0.01~0.1。
- (3) 乘型迭代算法中,当初始解及迭代步长已确定时,就会存在最佳的迭代次数。但在实际运算中,很难确定这一数值。如果按照本文的方法确定初始解及选择迭代步长,建议选取迭代次数为 2 或 3。

参考文献:

[1] 景小宁, 胡小方, 赵建华, 王亚鸥, 田玉莲. SXR-CT 技术应用研究烧结陶瓷三维微结构拓扑形貌[J]. 材料科学与工程学报, 2003, 21(3):327~330 (JING Xiaoning, HU Xiaofang, ZHAO Jianhua, WANG Yaou, TIAN Yulian. Application of synchrotron computed microtomography to study 3D pore topology and density distribution in sintered cermics. Journal of Materials Science & Engineering, 2003, 21(3): 327~330 (in Chinese))

[2] 胡小方, 景晓宁, 赵建华, 王亚欧, 田玉莲. 应用 SXR-CT 技术研究陶瓷材料的孔隙结构及密度分布[J]. 实验力学, 2003,18(4):485~489 (HU Xiaofang, WANG Yaou, JING Xiaoning, ZHAO Jianhua, TIAN Yulian, Study on the Porosity and Density Distribution of Ceramics Using SXR-CT Technique. Journal of Experimental Mechanics, 2003,18(4): 485~489 (in Chinese))

[3] A Elmoutaouakkil, G Fuchs, P Bergounhon, R Peres and F Peyrin. Three-dimensional quantitative analysis of

- polymer foams from synchrotron radiation X-ray microtomography[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2003, 36: A37~A43.
- [4] 姚红兵, 贺安之. 光学层析重建算法改进的研究[J]. 光学学报, 2004, 24(2): 158~161 (YAO Hongbing, HE Anzhi. Improvement of the reconstruction algorithm of optical computerized tomography. Acta optical sinica, 2004, 24(2): 158~161 (in Chinese))
- [5] Chukalina M, Golosio B, Simionovici A, Funke H. X-ray tomography: how to evaluate the reconstruction quality [J]. Spectrochimica Acta Part B, 2004, 59: 1755~1758.
- [6] 庄天戈. CT 原理与算法[M]. 上海交通大学出版社, 1992: 30~62 (Zhuang Tiange. The theory and arithmetic of computed-tomography. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1992: 30~62 (in Chinese))

The Research on Multiplication Algebraic Arithmetic of SR-CT Technique

WANG Min, HU Xiao-Fang

(CAS Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: In the technique of synchrotron radiation computed tomography (SR-CT), the arithmetic is an important part. And the multiplication algebraic arithmetic is an effective arithmetic of SR-CT technique. In order to understand the relation between reconstruction images and the multiplication algebraic arithmetic, the arithmetic is studied in this paper. The important parameters in the arithmetic such as size of iterative step, iterative times and initial solution are analyzed and optimized in detail. As a result, the relations of reconstruction images quality and computational time affected by the three parameters above are acquired. The impact models among these parameters are also obtained. The method to get the better initial solution is given. And the ranges of selecting the iterative step and iterative times are gained.

Key words: synchrotron radiation computed tomography; iterative length; iterative times; correlation