深度剖析一类带电体在复合场中的运动规律

刁涵鑫　　刁品全
（无锡市辅仁高级中学　江苏 无锡　214023）

（收稿日期：2017－01－09）

摘　要：带电粒子在匀强磁场中运动时如果除了受洛伦兹力外还受到重力或者电场力时，粒子如何运动，隐含的规律是怎样的．从多个角度来深度分析、探讨，找到它们的共同规律．

关键词：复合场　带电粒子　高考与竞赛

带电粒子在复合场中运动的问题在高考以及竞赛中不时出现，而在高考题中，命题者为了降低难度往往先预设了一些条件，这样便于学生分析讨论，但为何会有这些预设的条件，学生是无法洞悉的，同时这些预设条件是否严谨，也许更加值得教师进一步去思考、分析．下面就近年来出现的一些题目进行深度剖析，从不同角度来认识，以深化我们对带电体在复合场中运动规律的理解．

【例 1】（2008 年高考江苏卷）在磁感应强度为 B 的水平匀强磁场中，一质量为 m，带正电 q 的小球在 O 点由静止释放，小球的运动曲线如图 1 所示．已知此曲线在最低点的曲率半径为该点到 x 轴距离的 2 倍，重力加速度为 g．求：

（1）小球运动到任意位置 $P(x,y)$ 的速率 v；

（2）小球在运动过程中第一次下降的最大距离 y_m；

（3）当在上述磁场中加一竖直向上电场强度为 $E\left(E>\dfrac{mg}{q}\right)$ 的匀强电场时，小球从 O 点由静止释放后获得的最大速率 v_m．

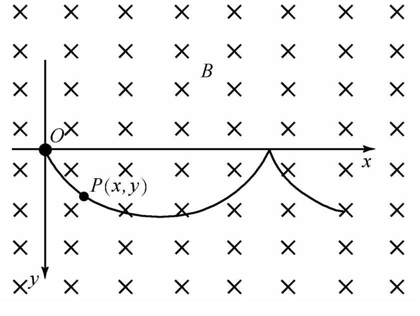


图 1　例 1 题图

原高考解析就不去展开了．

深入思考：题中给了一预设条件，“此曲线在最低点的曲率半径为该点到 x 轴距离的 2 倍”，这又是为什么呢？首先要明确的是题中带电小球在复合场中做的不是圆周运动，对中学生来说，运动轨迹的“曲率半径”是无法确定的，因此无法直接利用向心力来分析曲线运动，而题设计巧妙之处就在于预设了条件，下面就这个预设条件进一步思考．

深度剖析之一：由于带电小球在磁场中还受到重力，可构造一向右的匀速运动，速度 v_0 满足 $qv_0B=mg$，即

$$v_0=\frac{mg}{qB}$$

这样带电小球在重力与洛伦兹力共同作用下向右匀速运动，但带电小球原来初速度为零，因此同时还必须构造一向左的运动，且满足 $v'=v_0$，这一运动同样也受到洛伦兹力作用，那么带电小球在此洛伦兹力作用下做角速度为 ω 的匀速圆周运动，该圆周运动是逆时针的圆周运动，这样带电小球的运动便由一向右的匀速运动与逆时针的匀速圆周运动复合而成．

水平方向运动为

$$x(t)=v_0t-R\sin\omega t$$

竖直方向运动则为

$$y(t)=R-R\cos\omega t$$

式中

$$v_0=\frac{mg}{qB}$$

$$R=\frac{mv_0}{qB}=\frac{m}{qB}\frac{mg}{qB}=\frac{m^2g}{q^2B^2}$$

而

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$$

由于对于参数方程而言,它的曲率半径为

$$\rho = \frac{\left\{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|}$$

将 $x(t)$、$y(t)$ 代入上式,那么题中带电小球运动的曲率半径为

$$\rho = \frac{[(v_0 - R\omega\cos\omega t)^2 + (R\omega\sin\omega t)^2]^{\frac{3}{2}}}{|(v_0 - R\cos\omega t)R\omega^2\cos\omega t - (R\omega^2\sin\omega t)R\omega\sin\omega t|}$$

在最低点时对应的也就是经过了半个周期,即 $\omega t = \pi$,将 $\omega t = \pi$ 代入上式得

$$\rho = \frac{[(2v_0)^2]^{\frac{3}{2}}}{\left|-2v_0v_0\dfrac{qB}{m}\right|} = \frac{4v_0m}{qB} = \frac{4m^2g}{(qB)^2}$$

结合刚才的运动分析结论可知,最低点时

$$y_m = 2R = 2\frac{mv_0}{qB} = 2\frac{m\dfrac{mg}{qB}}{qB} = 2\frac{m^2g}{(qB)^2}$$

显然

$$\rho = 2y_m$$

这样所得结论与原预设条件契合.

深度剖析之二:运动到任意一点 $P(x,y)$ 速度为(v_x,v_y), y 方向受力为

$$F_y = mg - qv_xB$$

即

$$ma_y = -(qv_xB - mg)$$

而 x 方向受力为

$$F_x = qv_yB$$

即

$$m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = q\frac{\Delta y}{\Delta t}B$$

也就是

$$m\Delta v_x = q\Delta yB$$

将该微元表达式求和,得

$$mv_x = qyB$$

即

$$v_x = \frac{qyB}{m}$$

代入 $ma_y = -(qv_xB - mg)$ 得

$$ma_y = -\frac{q^2B^2}{m}\left(y - \frac{1}{\dfrac{q^2B^2}{m}}mg\right)$$

令

$$Y = y - \frac{1}{\dfrac{q^2B^2}{m}}mg = y - D$$

显然 $a_y = a_Y$,则

$$ma_Y' = -\frac{q^2B^2}{m}Y$$

显然这是一个简谐运动方程

$$\omega^2 = \frac{q^2B^2}{m^2}$$

其轨迹方程为

$$Y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

速度为

$$v_Y = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

那么

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{\dfrac{q^2B^2}{m}}mg =$$

$$A\cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{m^2g}{q^2B^2}$$

$$v_y = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

当 $t = 0$ 时,$y = 0$,$v_y = v_Y = 0$,则

$$A\cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{m^2g}{q^2B^2} = 0$$

也就是

$$-\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

得

$$A = -\frac{m^2g}{q^2B^2} \qquad \varphi_0 = 0$$

那么 y 方向运动方程为

$$y = -\frac{m^2g}{q^2B^2}\cos(\omega t) + \frac{m^2g}{q^2B^2}$$

显然,当 $\omega t + \varphi_0 = (2k+1)\pi$ 时

$$y_{\max} = 2\frac{m^2g}{q^2B^2} \qquad v_y = 0$$

还可以将 x 方向运动再讨论一下,x 方向受力为 $F_x = qv_yB$,即

$$m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = q\frac{\Delta y}{\Delta t}B$$

也就是

$$m\Delta v_x = q\Delta yB$$

求和得

$$mv_x = qyB$$

将上面所求 y 表达代入得

$$v_x=\frac{qyB}{m}=\frac{q\left(-\frac{m^2g}{q^2B^2}\cos\omega t+\frac{m^2g}{q^2B^2}\right)B}{m}=$$

$$-\frac{mg}{qB}\cos\omega t+\frac{mg}{qB}$$

即

$$v_x=-\frac{mg}{qB}\cos\omega t+\frac{mg}{qB}$$

显然水平方向最大速度为

$$v_{x\max}=2\frac{mg}{qB}$$

该速度也就是最大速度，积分得

$$x=\int_0^t v_x\mathrm{d}t=\int_0^t\left(-\frac{mg}{qB}\cos\omega t+\frac{mg}{qB}\right)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{mg}{qB\omega}\sin\omega t+\frac{mg}{qB}t$$

即

$$x=-\frac{mg}{qB}\frac{1}{\omega}\sin\omega t+\frac{mg}{qB}t=-\frac{m^2g}{q^2B^2}\sin\omega t+\frac{mg}{qB}t$$

而第(3)小问中只要将$(qE-mg)$等效为(2)问中 mg 即可，则最大速度为

$$v_{\mathrm{m}}=\frac{2}{qB}(qE-mg)$$

【例 2】(2011 年高考福建卷) 如图 2(a) 所示，在 $x>0$ 的空间中存在沿 y 轴负方向的匀强电场和垂直于xOy平面向里的匀强磁场，电场强度大小为E，磁感应强度大小为 B. 一质量为 m，带电荷量为 $q(q>0)$ 的粒子从坐标原点 O 处，以初速度 v_0 沿 x 轴正方向射入，粒子的运动轨迹如图 2(a) 所示，不计粒子的重力.

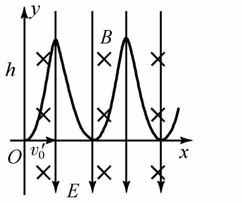
(1) 求该粒子运动到 $y=h$ 时的速度大小 v.

(2) 现只改变入射粒子初速度的大小，发现初速度大小不同的粒子虽然运动轨迹(y-x 曲线) 不同，但具有相同的空间周期性，如图 2(b) 所示；同时，这些粒子在 y 轴方向上的运动(y-t 关系) 是简谐运动，且都有相同的周期 $T=\frac{2\pi m}{qB}$.

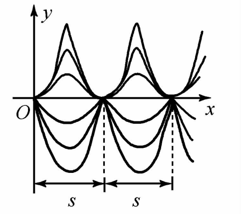
Ⅰ. 求粒子在一个周期内，沿 x 轴方向前进的距离 s；

Ⅱ. 当入射粒子的初速度大小为 v_0 时，其 y-t 图像如图 2(c) 所示，求该粒子在 y 轴方向上做简谐运动的振幅A，并写出 y-t 的函数表达式.

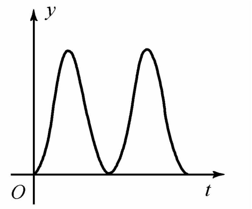
原高考解析暂不展开.



(a)



(b)



(c)

图 2　例 2 题图

深入思考：题中第(2) 小问中预设了粒子运动的条件，一是具有相同的空间周期性(从题意上看应该是水平方向有空间周期性)，二是这些粒子在 y 轴方向上的运动(y-t 关系) 是简谐运动，且都有相同的周期 $T=\frac{2\pi m}{qB}$.

原来福建高考提供的参考解析中描述："所有粒子在一个周期 T 内沿 x 轴方向前进的距离相同，即都等于恰好沿 x 轴方向匀速运动的粒子在T时间内前进的距离." 问题是为何有这样的匀速运动？粒子水平方向实际上又是否为匀速呢？因此这种描述显然来得相当模糊，没有物理学上的严谨.

那么它们的实际运动规律又如何呢，为什么会是这样的呢？下面再作深度剖析.

深度剖析：与例 1 分析类似，构造一个恰好沿 x 轴正方向的匀速运动，速度大小为 v_1，且 $qv_1B=qE$，同时构造一沿 $-x$ 轴方向的运动，速度大小为 v_1，这样粒子的运动就是沿 x 轴正方向以速度 v_1 的匀速运动，同时以(v_0-v_1)做逆时针转动的匀速圆周运动，那么粒子运动方程如下.

水平方向运动为

$$x(t)=v_1t-R\sin\omega t$$

(下转第 52 页)

$$at^2=\frac{a(t_0-2t)^2}{2}$$

解得

$$t=\frac{\sqrt{2}t_0}{2}$$

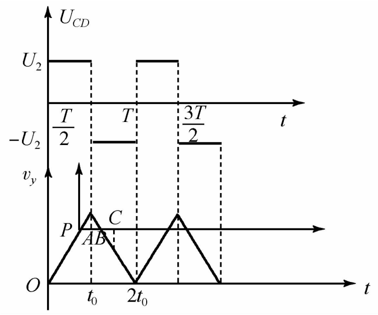


图 3　平移坐标原点

从图 3 我们也可以看出，电子在 y 方向上，t_{PA} 时间内做匀加速运动，t_{AB} 时间内做匀减速运动，B 时刻 y 方向速度为零，t_{BC} 时间内反方向匀加速运动.

带电粒子在交变电场中的运动属于较难的问题，多个物理过程、多个物理量、多个物理方程导致学生在解答这类题目的时候出现很多问题，比如物理过程不清楚，物理方程丢三落四，以及解物理方程组存在的问题等等. 本文利用物理图像以及坐标原点平移法来解决此类问题，使学生对复杂过程一目了然，缩短了解题时间，提高了得分率.

（上接第 50 页）

竖直方向运动则为

$$y(t)=R-R\cos\omega t$$

式中

$$R=\frac{m(v_0-v_1)}{qB}\qquad\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{qB}{m}$$

从表达式来看，y 方向是一简谐运动，运动周期为

$$T=\frac{2\pi m}{qB}$$

y 方向振幅为

$$R=\frac{m(v_0-v_1)}{qB}=\frac{m\left(v_0-\dfrac{E}{B}\right)}{qB}$$

那么 x 方向一个周期 T 内运动的位移为

$$s=v_1(t_1+T)-x(t_1)=\{v_1(t_1+T)-R\sin[\omega(t_1+T)]\}-(v_1t_1-R\sin\omega t_1)=v_1T$$

这样所得结论与原预设条件契合. 当然也可参照例 1 中深度剖析方法去分析，由于篇幅关系，这里就不再赘述了. 2013 年高考福建卷也有类似问题，完全可以参考这种方法去深度思考、探究.

从上面思考分析来看，用动能定理分析带电体在某处的速度大小是最为快捷的，但运动速度的方向、位移这些细节则无法确定，而带电体的运动规律则可以用等效法，将带电体运动分解（或构造）为一个匀速运动与一个圆周运动，如果初速度不为零则其中有两个圆周运动，当然也可将两个圆周运动作为一个圆周运动处理，这里涉及到矢量运动，略显复杂. 当然还有另一种理解 —— 将粒子运动分解为两个相互垂直的运动：与匀速运动方向垂直的简谐运动，另一方向则是一简谐运动与匀速运动叠加.

而更为严谨的是用微元法与积分法的综合应用，这些对中学生来说可能偏难，但对中学教师以及参加物理竞赛的学生来说是非常有必要掌握的.

Deep Analysis on the Movement Law of a Class of Charged Body in the Compound Field

Diao Hanxin　Diao Pinquan

（Furen High School，Wuxi，Jiangsu　214023）

Abstract：When the charged particle moves in the strong magnetic field，if the particle is subjected to gravity or electric field force，the particle moves，and what is implied. This paper analyzes and discusses the common law from multiple angles.

Key words：compound field；charged particles；college entrance examination and competition