几个典型的数学物理方程的物理解读*

徐　美
（北京科技大学数理学院应用物理系　北京　100083）

（收稿日期：2017－02－24）

摘　要：拉普拉斯方程、泊松方程、热传导方程（扩散方程）和波动方程是大学物理教学中常见的几个典型的微分方程，分别涉及到了流体力学、电磁学、热学和波动等重点教学内容.探索了如何用直观明确而容易理解的物理语言解读这些方程.从拉普拉斯方程的物理本质出发，通过改变该方程右端的形式，分别引出泊松方程、热传导方程（扩散方程）和波动方程，详细阐述了上述方程与相关物理现象之间的内在联系，提出了一种关于以上方程的纵向对比讲授法，为学生深入理解典型的数学物理微分方程的物理含义提供了可行的思路.

关键词：数学物理方程　拉普拉斯方程　二阶偏导数　极值

数学是物理学的语言，它逻辑严密、描述准确，可以使物理思想和物理规律以和谐而简练的形式呈现出来.例如，物理学中的很多问题都可以用高等数学中的微分方程来进行表述，这些方程通常被称为“数学物理方程”.对初学大学物理课的学生来说，数学语言不免有点枯燥而生硬、难解而无趣，往往令人望而生畏；如果能用大学生乐于接受的语言，用他们容易理解的逻辑，结合人们熟知的物理现象，来讲解物理学中的数学问题，其效果一定会事半功倍.这种做法既不能牺牲数学的严谨和高雅，也不是一味追求平庸的简单易懂，而是将物理现象的本质与数学表述联系起来，用通俗易懂的语言深入浅出地阐释数学物理方程的内涵.

我们以数学物理方程中最简单的拉普拉斯方程为例，探讨这种“数学方程的物理讲解”，探讨过程中力求避免纯粹的数学语言，而是着重于陈述与方程相关的物理事实；并由拉普拉斯方程出发，逐步改变方程右端的表达式，依次得到泊松方程、热传导方程（扩散方程）和波动方程[1].

1　拉普拉斯方程

对于自然界中很多现象的分析，都可以归结为求解拉普拉斯方程，例如薄膜的平衡、无热源区域的热平衡状态、理想不可压缩流体的平面定常无旋运动、源区以外的磁场和电场等等[2～6].这么多不同的物理现象居然能够统一到一个完全一样的方程之上，反映了一种深刻的内涵：物理世界是和谐统一的.反过来，同一个方程可以描述诸多性质相去甚远、形式迥然不同的现象，这使我们不禁感叹数学工具的强大有力.

拉普拉斯方程的形式简单而对称，结构和谐而美观；在三维直角坐标系中，可以写成

$$\nabla^2\Phi\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

方程左端各项是函数关于空间坐标 x,y,z 的二阶偏导数，而此三者之和等于零[7].数学家早已详尽无遗地证明了拉普拉斯方程的各种性质，如定义域内无极值等等[6,8]，那么，这些性质如何体现在物理现象中呢？

在刚刚学习微积分时我们就知道，一个函数的二阶导数的正负决定了相应曲线的“凹凸”.如图 1 所示，函数的二阶导数大于零，则曲线向下凹陷，形成“山谷”，函数存在极小值；二阶导数小于零，则曲线向上凸起，形成“山峰”，函数存在极大值；而如果函数的二阶导数等于零，则曲线既不下凹，也不上凸，即为直线，曲线在定义域内不存在极值.将这一

* 北京科技大学青年教学骨干人才培养计划；北京科技大学 2015 年度教育教学改革与研究项目，项目编号：JG2015Z02，JG2015M30

作者简介：徐美（1979－　），女，讲师，主要从事光电功能材料研究和大学物理教学工作.

结果推广至三维情况,我们就可以用最简单的微积分知识理解拉普拉斯方程的重要性质——“定义域内无极值”.

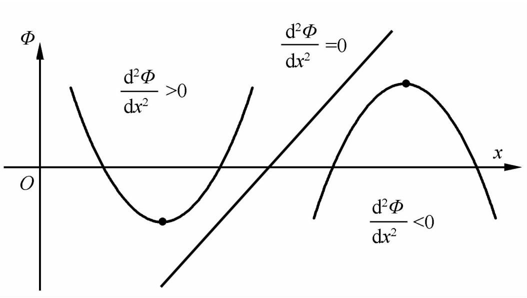

图 1　二阶导数的正负与曲线的形状关系

标量场中某一点的拉普拉斯值代表在该点附近无穷小区域内,场的平均值同该点本身的场值之差[9],因此,满足拉普拉斯方程$\nabla^2\Phi=0$的点不可能是局部极值.实际上,拉普拉斯方程的解取决于边界条件,我们以二维的情况为例来进行说明.例如,一个铁丝圈,上面张着肥皂泡薄膜.如果不考虑重力,则薄膜的形状完全由周边铁丝圈的形状和扭曲情况决定.如果铁丝圈是平面,整个薄膜一定是一个以铁丝圈为边界的平面;如果铁丝圈存在扭曲,薄膜将会跟着边界发生扭曲,但一定是趋向于一个最伸展的曲面,其上既无“山峰”(极大值),也无“山谷”(极小值),即“定义域内无极值”.这是二维拉普拉斯方程的情况,三维的情况与此类似.

通过以上分析,我们对拉普拉斯方程的性质和内涵有了物理上的直观认识.下面将以拉普拉斯方程的形式为基础,进一步分析几个典型的数学物理方程.

2　泊松方程

如果用一个不恒等于零的空间坐标函数 $f(x,y,z)$ 代替拉普拉斯方程右端的零,则得到如下的泊松方程

$$\nabla^2\Phi\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=f(x,y,z) \qquad (2)$$

在此情况下,定义域内有“源”或“汇”存在:在 $f(x,y,z)>0$ 的地方,$\nabla^2\Phi>0$,函数 Φ 具有极小值,函数曲面向下凹陷,形成“山谷”,相当于“汇”;而在 $f(x,y,z)<0$ 的地方,$\nabla^2\Phi<0$,函数 Φ 具有极大值,函数曲面向上凸起,形成“山峰”,相当于“源”.

例如,在静电场中,电势Φ所满足的泊松方程为

$$\nabla^2\Phi=\nabla\cdot(\nabla\Phi)=\nabla\cdot(-\boldsymbol{E})=-\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

在$\rho>0$处(此时空间存在正电荷),$\nabla^2\Phi<0$,说明Φ随空间的分布存在极大值,而Φ极大处即为电场的“源(源头)”,电场线正是由此发出.我们以一个正电荷为例,如图 2(a) 所示,若取无穷远处为电势零点,则正电荷处的电势为无穷大,电场线由正电荷发出,终止在无穷远处;沿着电场线的方向,电势不断降低,直至降为零.相反的,在$\rho<0$处(此时空间存在负电荷),$\nabla^2\Phi>0$,说明Φ随空间的分布存在极小值,而Φ极小处即为电场的“汇(尾闾)”,电场线终止于此.以一个负电荷为例,如图 2(b) 所示,电场线由无穷远的电势零点发出,沿着电场线的方向,电势不断降低,直至负电荷处,降为负无穷大.特别的,如果在某一区域内$\rho=0$,则$\nabla^2\Phi=0$(此时泊松方程退化为拉普拉斯方程),即在这一区域内Φ没有极值,电场中既无“源头”也无“尾闾”,因此电场线在这一区域内呈一系列平行线,如图 2(c) 所示.

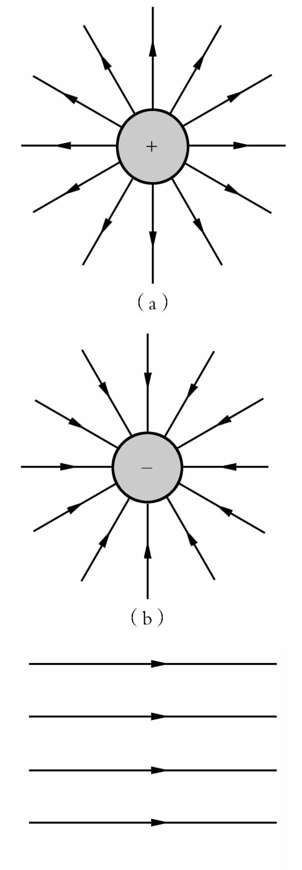

图 2　静电场中电势的泊松方程的物理图像

3　热传导方程(扩散方程)

在拉普拉斯方程中,若函数 Φ 随时间变化,并且用 $\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial t}$($\alpha$ 为大于零的常数)代替拉普拉斯方程右端的零,则得到热传导方程(扩散方程)

$$\nabla^2\Phi\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial t}\tag{4}$$

此处 Φ 表示温度或者扩散物质的密度.

前面说过,在 $\nabla^2\Phi>0$ 的地方,函数 Φ 向下凹陷,对应于"山谷"—— 区域内存在温度极小值,此时,极值点的温度低于周围温度,它的自然趋势是接受周围传来的热量,使该点的温度随时间升高,即 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}>0$. 相反,在 $\nabla^2\Phi<0$ 的地方,函数 Φ 向上凸起,对应于"山峰"—— 区域内存在温度极大值(热源),其自然趋势是热量从该点传向周围,使该点的温度随时间降低,即 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}<0$. 这就是热传导方程的物理意义. 类似地可以解释扩散方程的物理意义.

4　波动方程

在拉普拉斯方程中,若函数 Φ 随时间变化,且用 $\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$($\beta$ 为大于零的常数)代替拉普拉斯方程右端的零,则得到波动方程

$$\nabla^2\Phi\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\tag{5}$$

下面以一维弹性绳为例来说明波动方程的物理意义. 此时 Φ 表示绳上的质元偏离平衡位置的位移,则方程右端的 $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$ 表示绳上质元在 t 时刻的加速度. 根据牛顿第二定律,此加速度正比于该质元所受的回复力. 在 $\nabla^2\Phi>0$ 的地方,函数向下凹陷,对应于"波谷",区域内存在位移极小值,此时回复力应指向使位移增大的方向,因此加速度大于零,即 $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}>0$. 相反,在 $\nabla^2\Phi<0$ 的地方,函数 Φ 向上凸起,对应于"波峰",区域内存在位移极大值,此时回复力则应指向使位移减小的方向,因此加速度小于零,即 $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}<0$. 这样,弹性绳就产生了波动.

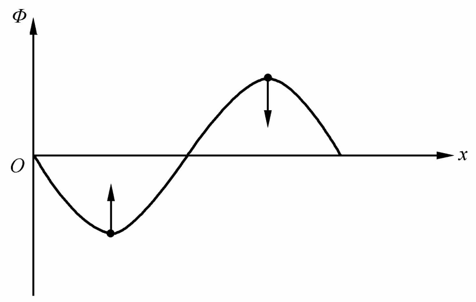

图 3　弹性绳中的波动方程的物理图像

5　结束语

通过上面的论述可以看出,拉普拉斯方程、泊松方程、热传导方程(扩散方程)和波动方程在数学表述上具有共通性:

$$\nabla^2\Phi=\begin{cases}0 & \text{拉普拉斯方程}\\ f(x,y,z) & \text{泊松方程}\\ \alpha\frac{\partial\Phi}{\partial t} & \text{热传导方程(扩散方程)}\\ \beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} & \text{波动方程}\end{cases}\tag{6}$$

方程右端不同的函数形式分别体现了各方程的物理内涵. 这一组方程分别涉及到了流体力学、电磁学、热学和波动等重点教学内容,因此,在大学物理教学过程中采用这种纵向对比的讲授方法,将使学生能够融会贯通地理解和真正接受与上述方程相关联的物理知识,同时将有助于学生体会到数学物理的美之所在.

参 考 文 献

1　严镇军. 数学物理方程(第 2 版). 合肥:中国科学技术大学出版社,1996. 5 ～ 6
2　Landau LD,Lifshitz EM. Fluid Mechanics . 2ndEdition. Oxford: Pergamon Press,1987. 1 ～ 40,445 ～ 447
3　吴望一. 流体力学(下册). 北京:北京大学出版社,1983. 1 ～ 153
4　胡友秋,程福臻. 电磁学与电动力学(下册). 北京:科学出版社,2008. 37 ～ 92
5　廊道,栗弗席兹. 场论. 任浪,袁炳南,译. 北京:人民教育出版社,1978. 75 ～ 122
6　复旦大学数学系. 数学物理方程(第 2 版). 上海:上海科学技术出版社,1978. 10 ～ 21,145 ～ 157
7　叶其孝,沈永欢. 实用数学手册(第 2 版). 北京:科学出版社,2007. 364

(下转第 39 页)

这样利用 Tracker 追踪单摆运动的轨迹，得到单摆运动曲线，分析其是否做简谐运动，再通过计算得到单摆运动周期，并探究单摆振幅、质量、摆长对周期的影响及单摆周期与摆长的关系，算出重力加速度，达到新课程标准对单摆知识的内容要求，提高单摆教学的效率，说明了视频分析软件在单摆教学中的有效性. 在文中只给出 Tracker 软件在单摆教学中的应用部分，在进行实际教学时，物理教师们要结合黑板、粉笔、单摆实验仪器等传统教学手段，如在分析视频时教师可用摆钟或摆钟视频作为情境引入，体现从生活走进物理的理念. 总之，视频分析软件的应用要结合传统的教学手段和其他教学手段，优势互补.

3　结束语

将视频分析软件与中学物理中合适的内容，如单摆、自由落体及平抛运动等内容的教学相整合，把软件作为一种教学工具，化抽象为直观，准确快速地得到实验数据，帮助学生更好地理解知识，解决传统教学中遇到的困难，提高教学效率，促进中学物理的教学. 但是需要注意，并不是所有的教学课题都适合用视频分析软件，适合用的教学课题也不是整堂课都要使用，要避免为了使用信息技术而使用视频分析软件. 此外，由于教师在课前要先拍视频，分析视频与收集数据，故此，需要教师花费更多的时间去备课. 所以，教师需要根据实际情况，如自己的教学经验、学生的特点、学校的设备等，分析如何将视频分析软件与其他的教学手段相结合，在课前充分准备，以优化教学为目的，形成自己的教学设计.

参 考 文 献

1　黄德群. 十年来我国信息技术与课程整合研究的回顾与反思. 电化教育研究，2009(8)：86 ～ 88

2　Loo Kang Wee，Charles Chew ，Giam Hwee Goh，et al . Using Tracker as a pedagogical tool for understanding projectile motion. Physics Education，2012，47(4)：448 ～ 455

3　刘婷，彭朝阳. 应用视频分析软件测单摆周期和重力加速度. 物理教学探讨，2016，34(4)：56 ～ 57

（上接第 35 页）

8　MathewsJ，Walker RL. Mathematical methods of physics. 2nd Edition. California：TheBenjamin/cummings Publishing Company，1970. 217 ～ 219

9　F·W·拜仑，R·W·富勒. 物理学中的数学方法（第一卷）. 熊家炯，曹小平，译. 北京：科学出版社，1982. 30 ～ 32

Physical Interpretation of Several Typical Mathematical Physics Equations

Xu Mei

(Department of Applied Physics，School of Mathematics and Physics，
University of Science and Technology Beijing，Beijing　100083)

Abstract：Laplace′s equation，Poisson equation，diffusion equation (heat conduction equation) and wave equation are some of the most common and typical equations in college physics teaching，which are involved in the teaching key points such as hydromechanics，electromagnetism，thermologyand undulatory theory. In this paper，we explore how to understand the aforementioned mathematical physics equationsusing clear and easy physical language. At first，the physical nature of Laplace′s equation is explained and then Poisson equation，diffusion equation (heat conduction equation) and wave equation are introduced by changing the right side of Laplace′s equation. The intrinsic connection between these equations and the relevant physical phenomena is described in detail. Students can understand the physical meaning of the typical mathematical physics differential equations more deeply by this longitudinal comparative teaching method for above equations.

Key words：equations of mathematical physics；Laplace′s equation；second-order partial derivative；extreme value