

一元二次方程解背后的物理情怀

邓有鸿

(广州市第二中学 广东 广州 510530)

(收稿日期:2015-04-25)

摘 要:本文讨论了一元二次方程有关的物理意义.

关键词:一元二次方程 陷阱 物理意义

1 引言

数学家彭加莱所说,“数学离开了物理就会步入歧途,物理学家不仅迫使人们面临大量的数学问题,而且能影响我们朝着梦想不到的方向前进.”他还说,“物理科学不仅给我们(数学家)求解问题的机会,而且还帮助我们发现解决它们的方法.”

高中物理讲解追及相遇问题时最后都落实到解一个一元二次方程,本来解一元二次方程是一个很简单的事,但是事实上并不是简单地求解方程这么容易,有时候需要对解出来的根进行取舍,有时候解出来的答案完全不符合题意,不是实际情况下所要求的结果.这中间物理和数学究竟发生了什么“恩怨”?是什么原因让它们不“和谐统一”?这里需要对数学和物理有一个简单的区分.一个数学方程所包含的意义是数量大小之间的某种关系,而物理定律反映的是,实际情况下研究的某几个物理量之间的定量关系.就拿一元二次方程来说,在数学里研究的是单纯的数量之间的大小关系,而物理的位移关系也是一个一元二次方程,但是这个方程除了数量之间的关系外,还赋予了实际意义,例如时间不能为负,某些物理量在实际情况下有一定的范围(如速度、加速度以及时间).平常教学中我们关注物理的意义偏多,而很少关注物理和数学的内在联系,这样就会使学生经常陷入一种物理是物理,数学是数学的尴尬境地.下面笔者就以追及相遇问题作为切入

点,领悟不同学科在“道”中统一的大美境界.

高中物理的追及与相遇问题一直都是运动学中的一个难点,教师在讲解这类问题时一般都会讲几种方法来拓展学生的思维,例如基本公式法、相对运动法、图像法.学生习惯用基本公式法来解相遇问题,这种方法思路简单,物理情景容易再现,关系式容易找到,常常需要求解一个关于时间 t 的一元二次方程,难点是对计算的结果不知如何取舍.方程中求解出来的根的个数是不是就是物体相遇的条件呢?下面我们从两方面来阐释数学和物理不同的美.

2 一元二次方程定义域的陷阱

【例 1】如图 1 所示, A、B 两物体相距 $s=7\text{ m}$, 物体 A 在水平拉力和摩擦力的作用下, 正以 $v_A=4\text{ m/s}$ 的速度向右匀速运动, 而物体 B 此时的速度是 $v_B=10\text{ m/s}$, 由于摩擦力作用向右匀减速运动, 加速度 $a=-2\text{ m/s}^2$. 那么, 物体 A 追上 B 所用的时间为多少?

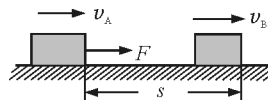


图 1

对于本题,学生通常有两种解法,表面上看这两种方法无懈可击,实际上结果并不正确.

错解 1: 设 A 物体在 t 时间内追上 B 物体, 根据

A 追上 B 时的位移关系得

$$s_A = s + s_B$$

即

$$v_A t = s + v_B t + \frac{1}{2} a t^2$$

代入数值整理得

$$t^2 - 6t - 7 = 0$$

解得

$$t_1 = 7 \text{ s} \quad t_2 = -1 \text{ s (舍去)}$$

错解 2: 设 A 物体在 t 时间内追上 B 物体, 由相对运动知识有

$$v_{AB} = -6 \text{ m/s}$$
$$a_{AB} = 2 \text{ m/s}^2$$
$$s_{AB} = 7 \text{ m}$$

式中 v_{AB} 为 A 物体相对于 B 物体的速度, a_{AB} 为 A 物体相对于 B 物体的加速度, s_{AB} 为 A 物体相对于 B 物体的位移. 由运动学公式得

$$s_{AB} = v_{AB} t + \frac{1}{2} a_{AB} t^2$$

代入数值整理得

$$t^2 - 6t - 7 = 0$$

解得

$$t_1 = 7 \text{ s} \quad t_2 = -1 \text{ s (舍去)}$$

以上两种解法表面看来是对的, 根据位移关系列方程没有错, 解这个一元二次方程也没有出错, 那究竟是什么地方出错呢? 对于初学的学生来说百思不得其解, 细究之下才发现原来 B 物体实际只运动 5 s 就停止不动了, 也就是说上面的一元二次方程只有在 $t \in [0, 5 \text{ s}]$ 范围内求解才是正确的, 定义域超出这个范围物体不再做匀减速运动, 与此同时物理规律就不再成立. 而学生列出方程后并没有注意这样一个有实际意义的方程其定义域是有范围的, 学生对这个一元二次方程是在全体实数范围内求解, 所以上面方程的解不合题意.

正解分析: A 做匀速运动, B 做匀减速运动, 最后停止. A 去追 B, 首先应该判断在 B 停止之前, A 是否能追上 B.

解析: 如果没有受到其他作用, B 物体将在 $t = \frac{0 - v_B}{a} = 5 \text{ s}$ 的时间内停下来, 所以首先看 5 s 内 A

能不能追上 B. 在 5 s 内 A 物体发生的位移

$$s_A = v_A t = 20 \text{ m}$$

B 物体发生的位移为

$$s_B = \frac{v_B}{2} t = 25 \text{ m}$$

所以 A 在 5 s 内不能追上 B, 此时 B 停止运动, A 和 B 之间的距离为 12 m, 还需要经过 $t = \frac{12}{v_A} = 3 \text{ s}$ 的时间才能追上 B, 所以 A 追上 B 共用 8 s 的时间.

再看一题, 也同样是定义域的问题.

【例 2】 一辆公共汽车在公路上以 $v_0 = 20 \text{ m/s}$ 的速度行驶, 某时刻发现其前方 $s = 11 \text{ m}$ 处有辆小汽车以 $v = 8 \text{ m/s}$ 的速度在做匀速直线运动, 公共汽车这个时刻开始以 $a = -2 \text{ m/s}^2$ 的加速度刹车, 则两车在运动过程中相遇多少次, 相遇对应的时刻为多少? (假设两车在两条车道上, 不会相撞)

解析: 根据位移关系列方程

$$v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = vt + s$$

代入数据化简整理得

$$t^2 - 12t + 11 = 0$$

解得 $t_1 = 1 \text{ s}, t_2 = 11 \text{ s}$. 于是学生就下结论: 相遇两次. 熟知定义域 $t \in [0, 10 \text{ s}]$ 才成立, 所以其中有一个根不符合题意, 有些学生注意到这一点后就说只能相遇一次. 这些情况都是没有很好理解一元二次方程在具体问题中成立是有条件的, 根据物理过程分析易得相遇两次, 那么还有一次相遇的时间应该根据相应的物理规律求得.

3 一元二次方程负根的物理意义

我们先看一道具体的题:

【例 3】 甲、乙两辆汽车同时沿一直线运动, 甲车做初速度 $v_1 = 10 \text{ m/s}$ 的匀速直线运动, 乙车做初速度 $v_2 = 4 \text{ m/s}$, 加速度 $a = 2 \text{ m/s}^2$ 的匀加速直线运动. 开始运动时甲在前, 乙在后, 相距 $s = 7 \text{ m}$. 求经过多少时间两车相遇?

解析: 根据位移关系列方程

$$v_2 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_1 t + s$$

代入数据整理得

$$t^2 - 6t - 7 = 0$$

解得

$$t_1 = -1 \text{ s} \quad t_2 = 7 \text{ s}$$

根据物理过程分析匀加速运动的物体一定能追上匀速运动的物体,且只能相遇一次.

但是从一元二次方程判别式角度看

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 7 = 8 > 0$$

分析知应有两个解,再根据韦达定理的两根之积

$$\frac{c}{a} = -7 < 0$$

得两根一正一负,我们对负根舍去.那么舍去的负根究竟有没有物理意义呢?首先我们对负根舍去的理由是时间不能为负,事实上时间也可以为负,相对我们所选的计时起点更早,那么时间为负时真能相遇吗?我们可以从时间的负方向看,原来向时间正方向做匀速运动的物体还是做匀速运动,原来做匀加速运动的物体向时间负方向是先做匀减速运动,速度减为零后再反向加速运动直到永远.打个简单的比方,向时间负方向看好比放电影的“倒带”过程.所以负根的意义就是:在“过去”的某个时刻相遇.一个具体的追及相遇问题我们只研究它的“今生”和“来世”,从来就没有人思考它的“前生”究竟发生了什么.因此从整个时空来看数学一元二次方程的根的个数跟物理追及相遇的次数是“和谐统一”的.

为了让讨论具有普遍性,我们把每个物理量都以字母形式表示,追及和相遇问题所涉及到的只有两种运动,一种是匀速运动,一种是匀变速运动,我们可以设两物体都做匀变速运动,当其中任意一个物体的加速度为零时就变成了匀速运动,这样讨论更具有普遍性.

两辆汽车同时沿一直线运动,甲车做初速度为 v_1 ,加速度为 a_1 的匀加速直线运动,乙车做初速度为 v_2 ,加速度为 a_2 的匀加速直线运动.开始运动时

甲在前,乙在后,相距 s .求经过多少时间两车相遇?

根据位移关系得

$$v_1 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 + s = v_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^2$$

化简整理得

$$(a_1 - a_2) t^2 + 2(v_1 - v_2) t + 2s = 0$$

根据一元二次方程的判别式

$$\Delta = 4(v_1 - v_2)^2 - 8(a_1 - a_2)s$$

当 $\Delta = 0$ 时,即有

$$(v_1 - v_2)^2 - 2(a_1 - a_2)s = 0 \quad (1)$$

我们惊喜地发现上面式(1)就是相对运动的结果,这也说明了数学和物理的统一.再比较例1和例3,我们又得到一大惊喜,它们化简得到最后的方程相同,说明不同的物理过程可以有相同的数学形式,这一点也可以由上面的式(1)来解析,因为速度和加速度可正、可负,还可以为零,包含了各种不同形式运动的追及相遇问题.我们如果把字母具体到数字时,可以根据判别式和韦达定理两根之积 $\frac{c}{a}$ 来判断相遇次数,这也反映数学和物理在形式和内容上的高度统一.

这里笔者只是从一元二次方程的解和物理问题中的追及相遇问题谈谈数学和物理所呈现的不一样的美,数学反映的是数字大小的定量关系,而物理除此以外还赋予了实际的意义,这就是每个公式背后的那份火热的人文情怀,在物理学里这种美无处不在,这也正印证了“万物在道中融汇一体”这句话.

莫尔斯所说,“数学是数学,物理是物理,但物理可以通过数学的抽象而受益,而数学则可通过物理的见识而受益.”数学家拉克斯说,“数学和物理的关系尤其牢固,其原因在于,数学的课题毕竟是一些问题,而许多数学问题是物理中产生出来的,并且不止于此,许多数学理论正是为处理深刻的物理问题而发展出来的.”