

对导体棒在匀强磁场中极限速度的讨论

葛晓东 余杰成

(浙江省杭州第二中学 浙江 杭州 310053)

(收稿日期:2015-05-12)

摘要:在中学物理教材中有这么一类变加速的问题,定性判断的结果是物体最终要做匀速运动,但是在通过对导体棒在磁场中运动情况进行严密的数学推导后得出了一个和常规理解不同的结论:匀强磁场中切割磁感线的导体棒有可能无法达到匀速的状态,对这一熟知的结论进行了修正,并且将该结论推广到高中其他类似的问题模型中去,比如在机车启动中的极限速度问题.

关键词:安培力 电磁感应 极限速度

1 题目

近日做到一道电磁感应方面的综合题:两条水平虚线之间有垂直于纸面向里,宽度为 d ,磁感应强度为 B 的匀强磁场.质量为 m ,电阻为 R 的正方形线圈边长为 $L(L < d)$,线圈下边缘到磁场上边界的距离为 h .将线圈由静止释放,其下边缘刚进入磁场和刚穿出磁场时刻的速度都是 v_0 ,则在整个线圈穿过磁场的全过程中(从下边缘进入磁场到上边缘穿出磁场,如图 1 所示),下列说法中正确的是

- A. 线圈可能一直做匀速运动
- B. 线圈可能先加速后减速
- C. 线圈的最小速度可能是 $\frac{mgR}{B^2 L^2}$

D. 线圈的最小速度一定是 $\sqrt{2g(h-d+L)}$

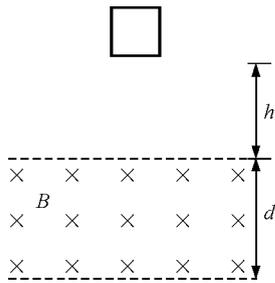


图 1

参考答案认为选项 C 也是正确的,理由是线圈的全程运动情况可以分为:进入磁场前自由落体,线圈下边缘进入后开始做加速度减小的减速运动,在线圈上边缘进入磁场前达到匀速,速度为 $\frac{mgR}{B^2 L^2}$,线

磁场作用.变阻器的滑杆和支架是高磁导率的铁质材料,磁阻远低于空气磁阻,正好为电阻丝线圈电流产生的磁场提供磁路. $20\ \Omega$ 的滑动变阻器瓷筒内还有一根连接两端支架的铁杆,能更好地构成闭合磁路.电阻丝线圈电流在其内部激发的磁场,一方面被瓷管产生的附加磁场抵消部分,另一方面磁场的磁感线在变阻器两端向金属支架汇聚,并通过金属滑杆形成磁通回路,这样“泄漏”到线圈外部空间的磁感线大幅减少,对电阻丝线圈电流的磁场进行了有

效“屏蔽”.因此,一般通电滑动变阻器在外围空间产生的磁场比地磁场弱很多,放在变阻器端头的小磁针很难显示其存在.

参考文献

- 1 赵凯华,陈熙谋.电磁学(上册).北京:人民教育出版社,1980.288 ~ 290
- 2 程守洙,江之永.普通物理学(第2册).北京:人民教育出版社,1982.243 ~ 261

圈完全进入磁场后又开始做加速度为 g 的匀加速运动, 在线圈下边缘刚要穿出磁场时其速度又增为 v_0 , 所以说在整个运动过程中线圈的速度在其匀速时达到最小值 $\frac{mgR}{B^2L^2}$.

这个解释乍一看很有道理, 但不难看出它只进行了定性分析, 于是笔者抱着怀疑的态度进行了定量运算, 证明了它的谬误并得到了一些副产物.

由于只研究线圈进入磁场时的运动情况, 所以本文将此过程一般化, 即转化为一根导体棒在匀强磁场内运动的情况.

2 引理

先证明一个引理.

引理: 在有限的时间内, 一个加速度 a 数值和速度 v 数值始终成正比的减速直线运动的速度不可能减为零.

引理的证明:

设 $a = -kv$, 其中 k 为大于零的常数. 记初速度为 v_0 ($v_0 > 0$). 运用数学归纳法:

(1) 时间 $t = 0 = \frac{0}{2k}$ 时, $v = v_0 > 0$.

(2) 假设 $t = \frac{n}{2k}$ ($n \in N$) 时 $v_n > 0$, 下证 $t = \frac{n+1}{2k}$ 时 $v_{n+1} > 0$:

由于该运动为减速运动, 故 $t \in [\frac{n}{2k}, \frac{n+1}{2k}]$ 时速度 $v \leq v_n$ 恒成立, 从而由题意可得

$$a = -kv \geq -kv_n$$

故

$$v_{n+1} = v_n + \sum_{t \in [\frac{n}{2k}, \frac{n+1}{2k}]} a \geq$$

$$v_n + \left(\frac{n+1}{2k} - \frac{n}{2k}\right) (-kv_n) = \frac{v_n}{2} > 0$$

结合上述讨论, 由归纳原理知对于任意 $n \in N^+$, 均有 $t = \frac{n}{2k}$ 时速度大于零.

反设速度 v 会在时间 T 后减为零, 易知存在足够大的自然数 n' 使得 $t = \frac{n'}{2k} > T$, 故 $t = \frac{n'}{2k}$ 时速度

$v = 0$, 这与上面的结论矛盾! 故假设不成立, 引理证毕.

运用微积分的知识可解出 $v = \frac{v_0}{e^{kt}}$, 但这不在本文的探究范围内. 求解过程如下:

$$kv = -a = -\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{v} = -k dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -k dt$$

$$\ln |v| + C = -kt$$

$$v = \frac{1}{e^{kt+C}}$$

将 $(t, v) = (0, v_0)$ 代入得 $v = \frac{v_0}{e^{kt}}$

顺带一提, 此运动的位移是有上界的, 证明如下:

记 $t = \frac{m}{k}$ 时速度为 v_m , 用反证法证明 $v_m + 1 \leq$

$$\frac{v_m}{2}.$$

反设 $v_m + 1 > \frac{v_m}{2}$, 由于该运动为减速运动, 故

$t \in [\frac{m}{k}, \frac{m+1}{k}]$ 时速度 $v \geq v_m + 1 > \frac{v_m}{2}$ 恒成立, 从而

由题意可得 $a = -kv < -\frac{kv_m}{2}$, 故

$$v_{m+1} = v_m + \sum_{t \in [\frac{m}{k}, \frac{m+1}{k}]} a < v_m +$$

$$\left(\frac{m+1}{k} - \frac{m}{k}\right) \left(-\frac{kv_m}{2}\right) = \frac{v_m}{2}$$

这与假设矛盾! 故假设不成立, 即 $v_{m+1} \leq \frac{v_m}{2}$.

从而易得 $v_m \leq \frac{v_0}{2^m}$.

于是位移

$$x = \sum v = \sum_{m \in N} \sum_{t \in [\frac{m}{k}, \frac{m+1}{k}]} v \leq$$

$$\sum_{m \in N} \left(\frac{m+1}{k} - \frac{m}{k}\right) v_m \leq \frac{1}{k} \sum_{m \in N} \frac{v_0}{2^m} = \frac{2v_0}{k}$$

故位移有上界.

利用 $v = \frac{v_0}{e^{kt}}$ 可算出位移关于时间的表达式

$$x = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{v_0}{e^{kt}} dt = \frac{v_0}{k} \left(1 - \frac{1}{e^{kt}} \right)$$

从而易得位移的最小上界

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_0}{k} \left(1 - \frac{1}{e^{kt}} \right) = \frac{v_0}{k}$$

但这不在本文的探究范围内。

由于只研究线圈进入磁场时的运动情况，所以本文将此过程一般化，即转化为一根导体棒在匀强磁场内运动的情况。

3 讨论

3.1 导体棒不受安培力以外的力

如图 2，足够长的水平导轨宽度为 L ，质量为 m 的导体棒电阻为 R ，导轨间充满磁感应强度为 B 的匀强磁场。 $t=0$ 时刻，导体棒开始以初速度 v_0 向右运动。

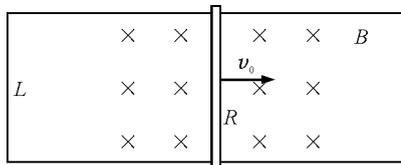


图 2

记某时刻速度为 v ，则

感生电动势

$$\epsilon = BLv$$

感应电流

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{BLv}{R}$$

安培力

$$F_I = BIL = \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

加速度

$$a = -\frac{F_I}{m} = -\frac{B^2 L^2}{mR} v$$

可见导体棒的加速度与其速度成正比！

由引理，导体棒在有限的时间内一直做减速运动。

通过计算可得 $v = \frac{v_0}{e^{kt}}$ 及位移 $x = \frac{v_0}{k} \left(1 - \frac{1}{e^{kt}} \right)$ ，其

中 $k = \frac{B^2 L^2}{mR}$ ，但这不在本文的探究范围内。

导体棒的速度图像如图 3 所示，为指数曲线，无限趋近于零。

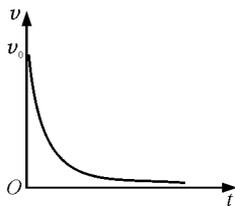


图 3

3.2 导体棒受恒定外力

如图 4，足够长的水平导轨宽度为 L ，质量为 m 的导体棒电阻为 R ，导轨间充满磁感应强度为 B 的匀强磁场。 $t=0$ 时刻，导体棒开始以初速度 v_0 向右运动，同时给导体棒施加一个水平向右的恒定外力。

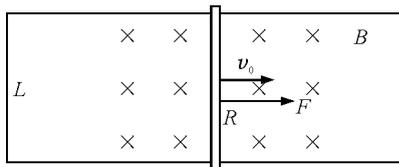


图 4

记某时刻速度为 v ，分 3 类情况讨论：

(1) $v_0 = \frac{FR}{B^2 L^2}$ ，则初始状态下

感生电动势

$$\epsilon = BLv_0$$

感应电流

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{BLv_0}{R}$$

安培力

$$F_I = BIL = \frac{B^2 L^2 v_0}{R} = F$$

故导体棒受力平衡，做速度为 v_0 的匀速运动。

(2) $v_0 > \frac{FR}{B^2 L^2}$ ，运用增量代换，记 $v_0 = \frac{FR}{B^2 L^2} + v'$ ，则初始状态下

感生电动势

$$\epsilon = BLv_0$$

感应电流

$$I = \frac{BLv_0}{R}$$

安培力

$$F_I = \frac{B^2 L^2 v_0}{R} = F + \frac{B^2 L^2 v'}{R}$$

加速度

$$a = \frac{F_I - F}{m} = -\frac{B^2 L^2}{mR} v'$$

可见加速度与 v' 成正比。

由引理, v' 在有限时间内不能减为零, 故导体棒一直做减速运动。

通过计算可得

$$v = \frac{F}{km} + v' \left(1 - \frac{1}{e^{kt}} \right)$$

及位移

$$x = \frac{tF}{km} + \frac{v'}{k} \left(1 - \frac{1}{e^{kt}} \right)$$

其中 $k = \frac{B^2 L^2}{mR}$, 但这不在本文的探究范围内。

若时间足够长, 其速度图像如图 5 所示, 为指数曲线, 无限趋近于

$$v_t = \frac{FR}{B^2 L^2}$$

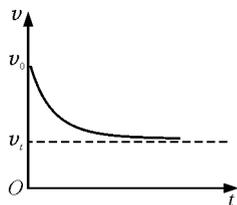


图 5

(3) $v_0 < \frac{FR}{B^2 L^2}$, 运用增量代换, 记 $v_0 = \frac{FR}{B^2 L^2} -$

v' , 则初始状态下

感生电动势

$$\varepsilon = BLv_0$$

感应电流

$$I = \frac{BLv_0}{R}$$

安培力

$$F_I = \frac{B^2 L^2 v_0}{R} = F - \frac{B^2 L^2 v'}{R}$$

加速度

$$a = \frac{F_I - F}{m} = \frac{B^2 L^2}{mR} v'$$

可见加速度与 v' 成正比。

由引理, v' 在有限时间内不能减为零, 故导体棒一直做加速运动。

通过计算可得

$$v = \frac{F}{km} - v' \left(1 - \frac{1}{e^{kt}} \right)$$

及位移

$$x = \frac{tF}{km} - \frac{v'}{k} \left(1 - \frac{1}{e^{kt}} \right)$$

其中 $k = \frac{B^2 L^2}{mR}$, 但这不在本文的探究范围内。

若时间足够长, 其速度图像如图 6 所示, 为指数曲线, 无限趋近于

$$v_t = \frac{FR}{B^2 L^2}$$

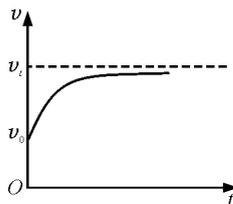


图 6

综上所述讨论, 可知在有限时间内, 导体棒的运动情况只可能为一直加速、一直减速或一直匀速。

4 结论

以上过程证明了导体棒在匀强磁场中的运动情况不可能为先变速后匀速, 故原题中线圈进入磁场时的运动情况在有限时间内不可能是先减速后匀速, 所以选项 C 是错误的。

额外的, 我们发现一些题干中有“导体棒经过时间 t 后变为匀速运动”或“受恒力的导体棒位移 x 后变为匀速运动”的高中物理题目从严格意义上说均是错题。

这可真是个有意思的结论. 而且这个结论应该也可以适用机车恒定功率加速的模型中, 按照本文的引理可以知道, 机车只能无限靠近恒速, 但是无法达到最终的匀速运动, 感兴趣的读者可以加以证明。