实心球最佳投掷角精确方程及数值解

葛兴烁　李　强
（石家庄石门实验学校　河北 石家庄　050024）
马钰莹
（天津英华国际学校　天津　301700）

（收稿日期：2017－07－12）

摘　要：体育运动与物理知识息息相关，其中以力学定律为主．以体育运动为载体的物理问题具有很强的实用性，物理知识对于解决和提高体育运动中的实际问题具有广泛的指导意义．物理教学中应注意培养学生分析解决实际问题的能力，提高学生的综合素养．本文就中考体育实心球项目中的物理模型进行研讨，指出关于实心球最佳投掷角计算公式中存在的问题，导出了最佳投掷角的精确方程和数值解，对提高项目分数具有指导意义．

关键词：体育　运动实心球　最佳投掷角　精确方程　数值解

原地双手后抛实心球被列为河北省体育中考项目，该项目在我省体育中考总分中占 10 分（体育中考总分为 30 分）．中学体育教师往往根据多年积累的教学经验，再结合其他投掷项目及学生特点总结出自己一套独特的教学方法．理论计算表明，在不计空气阻力，投掷角与球出手时的速度及高度有关，要使射程最远投掷角大约在 $38^\circ \sim 42^\circ$ 之间．但是，这些杂志[1，2] 在导出这一结论时忽略了考生手臂长度对投掷成绩的影响．

本文在原来物理模型的基础上进行分析讨论，指出关于实心球最佳投掷角计算公式中存在的问题，导出最佳投掷角的精确方程和数值解．旨在完善该项目的理论体系，更科学地指导考生对该项目的训练，为考生提高成绩提供最有效的数据．

1　原地双手后抛实心球技术分析存在不足

一般在投掷项目原理中，影响投掷成绩的因素有出手高度、投掷角度和出手速度 3 个因素，原地双手后抛实心球同样也受到这 3 个因素的影响．文献[3] 深入分析了原地双手后抛实心球的影响因素，并提出了原地双手后抛实心球成绩与 3 个因素间的关系

$$s=\frac{v\cos\alpha}{g}\left(v\sin\alpha+\sqrt{v^2\sin^2\alpha+2gH}\right) \qquad (1)$$

公式(1) 为实心球出手后的投掷距离．但是作者忽略了一个重要因素，即投掷者的手臂长度．一般在其他投掷类项目里面不考虑手臂长度，但是在该项目中，投掷者站在线的后方并且背对投掷方向投掷，这就决定实心球出手点一定在线后方．因此，只有在出手高度、出手速度、手臂长度一定时，投掷实心球的投掷距离才只取决于投掷角度．

原地双手后抛实心球的抛出点要高于落地点，通过观察原地后抛实心球物理模型示意图（图 1），发现手臂水平方向的分量 $L_0\cos\beta$ 在一定程度上减小了实心球的投掷距离．那么在投掷过程中，我们应尽量减小水平分量对投掷距离的消极影响，即手臂刚好在头顶上方伸直，与地面垂直．如果此时出手实心球，那么实心球将做平抛运动，则会失去最大投掷距离．文献[2] 在研究斜抛物体运动时，给出了斜抛物体最大投掷距离的表达式．其他条件相同时，在一定的角度范围内，斜上抛运动的投掷距离一定大于平抛运动的投掷距离．这就是为什么标枪、铅球等体育运动都是斜上抛运动而不是平抛运动．文献[4] 在研究投射体的投射角和落地角间的关系时，得出了无论何种情况投射角和落地角互余的关系．即投掷角一定要小于 90°．如果投掷点超出头顶，则此时将做斜下抛运动，投掷距离会更小．因此，原地双手后抛实心球它的抛出点应在头部后方．

2　不计空气阻力原地双手后抛实心球最佳投掷角的精确方程

如图 1 所示，建立原地后抛实心球物理模型．

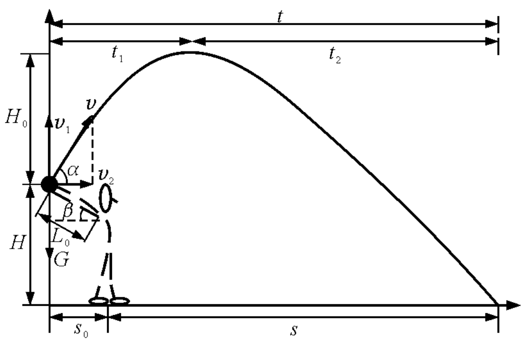

图 1　原地后抛实心球物理模型

不计空气阻力,水平方向做匀速直线运动,竖直方向做上抛运动,抛出点到球的落地点所用时间为 t. 原地双手后抛实心球的投掷距离 s 和出手高度 H,出手速度 v,投掷角度 α,手臂长度 L_0 之间的精确方程推导如下

$$s_0+s=v_2t=vt\cos\alpha$$

$$t=t_1+t_2$$

$$t_1=\frac{v_1}{g}=\frac{v\sin\alpha}{g}$$

$$H_0=\frac{v_1^2}{2g}=\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$$

由
$$H+H_0=\frac{1}{2}gt_2^2$$

可得到
$$t_2=\sqrt{\frac{v^2\sin^2\alpha+2gH}{g^2}}$$

联立上式化简得到

$$s_0+s=\frac{v\cos\alpha}{g}\left(v\sin\alpha+\sqrt{v^2\sin^2\alpha+2gH}\right)$$

在实心球出手的瞬间,实心球可以近似看作是一个以投掷者肩部为轴,手臂长度的圆周运动的一部分. 由于此过程加速时间较短,因此,可近似认为此过程为匀速运动. 手臂伸展后的高度高于人的身高,不会造成砸到人的情况. 那么在出手的瞬间实心球的速度 v 和手臂 L_0 垂直,即

$$\alpha+\beta=90^\circ$$

由
$$s_0=L_0\cos\beta$$

得到
$$s_0=L_0\cos(90-\alpha)$$

即
$$s_0=L_0\sin\alpha$$

显然,实心球出手瞬间球心在地面投影点至投掷线之间的水平距离为投掷角的函数. 综上所述,我们可以得到实心球的投掷距离和出手高度、出手速度、投掷角度、手臂长度之间的精确方程

$$s=\frac{v\cos\alpha}{g}\left(v\sin\alpha+\sqrt{v^2\sin^2\alpha+2gH}\right)-L_0\sin\alpha \tag{2}$$

求 s 的最大值,只要取 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}=0$,为了方便求导,令

$$\sin\alpha=\mu$$

则
$$\cos\alpha=\sqrt{1-\mu^2}$$

并令
$$\frac{2gH}{v^2}=A\qquad\frac{gL_0}{v^2}=B\qquad\frac{v^2}{g}=C$$

则方程(2) 改写为

$$s=C\mu\sqrt{1-\mu^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{A}{\mu^2}}-B/\sqrt{1-\mu^2}\right) \tag{3}$$

由于
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\alpha}$$

而
$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\alpha}=\cos\alpha\neq 0,(\alpha\neq 90^\circ)$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}=0$$

必有 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\mu}=0$. 这样只需要将式(3) 对 μ 求导并令其为零即可. 方程(3) 对 μ 求导并化简得到

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\mu}=$$
$$\frac{\mu^2\left(-2C-2C\sqrt{\frac{\mu^2+A}{\mu^2}}\right)+C+C\sqrt{\frac{\mu^2+A}{\mu^2}}-AC-BC\sqrt{\frac{\mu^2+A}{\mu^2}}\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2+A}{\mu^2}}\sqrt{1-\mu^2}} \tag{4}$$

由分式性质可知,方程(4) 解为零时,只能是分子为零,即

$$\mu^2\left(-2C-2C\sqrt{\frac{\mu^2+A}{\mu^2}}\right)+C+C\sqrt{\frac{\mu^2+A}{\mu^2}}-$$
$$AC-BC\sqrt{\frac{\mu^2+A}{\mu^2}}\sqrt{1-\mu^2}=0 \tag{5}$$

利用数学工具 Matlab[5] 对式(5) 进行化简最后得到一个一元十次方程

$$(-16B^2)\mu^{10}+(8B\varepsilon_1+16B^2-B^4)\mu^8+$$
$$(\varepsilon_5-\varepsilon_2^2-8B\varepsilon_2-2B^2\varepsilon_1)\mu^6+$$
$$(\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2-\varepsilon_5+2B^2\varepsilon_3-4AB\varepsilon_2)\mu^4+$$
$$(2\varepsilon_3\varepsilon_1-\varepsilon_4+4AB\varepsilon_2)\mu^2+\varepsilon_4-\varepsilon_3^2=0 \tag{6}$$

其中参数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ 分别为

$$\varepsilon_1=A^2+AB^2+2A-B^2$$

$$\varepsilon_2=2B-4AB$$

$$\varepsilon_3=AB^2+A$$

$$\varepsilon_4=4A^2B^2$$

$$\varepsilon_5=16AB^2$$

该方程就是我们要求的最佳投掷角的精确方程

解. 对于一元十次方程我们知道没有解析解(四次以下才有). 因此,我们不能导出投掷角 α 的简单公式. 并且试图通过降低方程的次数,来求解析解也不实际. 唯一的办法就是借助计算机求方程的数值解.

方程(6) 是否正确,我们可以通过一个特例来进行检验. 显然 $s_0 = L_0 \sin\alpha$ 中,若 $L_0 = 0$,即出手高度、出手速度一定时,投掷距离 s 只于投掷角 α 有关,这也就是以往大家研究的观点. 此时 $B = 0$, $\frac{2gH}{v^2} = A$ 将其代入方程(6) 化简得到

$$(A^2 + 2A)^2 \mu^4 - 2A(A^2 + 2A)\mu^2 + A^2 = 0$$

即 $$(A^2 + 2A)\mu^2 - A = 0$$

又因为 $$\sin\alpha = \mu$$

所以 $$\alpha = \mathrm{acrsin}\sqrt{\frac{v^2}{2(v^2 + gH)}} \tag{7}$$

这一结果与其他文献[1, 2] 中报道的结果相一致,这就表明我们推导的精确方程(6) 是正确的,同时也表明之前文献报道的结论只是我们导出方程的一个特解.

3　实心球最佳投掷角方程的数值解

在实际投掷中,每位考生的出手高度及臂长都不相同,即使初速度 v 相同,系数 A,B 也不同,相应的方程(6) 也有所差异. 现在举例说明,假设某考生的臂长 $L_0 = 0.53$ m,出手高度 $H = 1.8$ m,出手速度 $v = 10$ m/s,则相应的方程为

$$-0.0449\mu^{10} + 0.4044\mu^8 - 0.002\mu^6 - 0.7343\mu^4 + 0.6129\mu^2 - 0.1288 = 0$$

通过Matlab软件计算得到 $\mu = 0.584$,其最佳投掷角 $\alpha = 35.75°$ 如果用传统的公式(7) 计算得到最佳投掷角 $\alpha' = 40.63°$. 将这两个最佳投掷角分别代入方程(1)、(2) 分别求出投掷距离 $s = 11.2$ m,$s' = 11.8$ m,两者相差 $\Delta s = 0.6$ m. 显然,采取精确方程(6) 与传统方程(7) 求解投掷距离相差较大,因此,手臂长度对投掷成绩的影响在实际问题中不能忽略,这也说明我们模型更加准确.

4　最佳投掷角 α 与出手高度 H 和速度 v 的关系

保持 $v = 10$ m/s 和 $L_0 = 0.53$ m 不变,出手高度 H 变化,一般初中生的出手高度基本集中在 1.8 ～ 2.5 m,根据方程(6) 利用软件 Matlab 可以计算出不同 H 所对应的 α,如表 1 所示. 我们发现随着 H 的增加,α 逐渐减小. 但是,在出手高度 H 取边缘值时,最佳投掷角也只相差 $\Delta\alpha = 0.472°$,因此,在实际投掷实心球中,最佳投掷角 α 受 H 影响很小,可近似认为与 H 无关.

表 1　最佳投掷角与出手高度的关系

出手高度 H/m	1.8	2.0	2.3	2.5
最佳投掷角 α/(°)	35.772	35.652	35.454	35.300

如果已知考生的出手高度 H 和臂长 L_0,根据方程(6) 利用软件Matlab可以计算出不同 v 对应的 α. 根据调查,初中生实心球出手速度主要介于 4.5 m/s ～ 11 m/s,在这个范围内,我们假定出手高度 $H = 2.0$ m 和 $L_0 = 0.53$ m,表 2 给出了几组模拟数据.

表 2　最佳投掷角与出手速度的关系

出手速度 v/(m · s^{-1})	4.823	5.484	6.145	7.072	7.866	8.395	9.718	10.770
最佳投掷角 α/(°)	26.584	29.217	31.033	32.768	33.817	34.371	35.412	36.674

为了研究最佳投掷角与出手速度间的具体关系,我们先采用一次函数对散点进行拟合,我们发现拟合结果与散点基本吻合,如图 2 所示. 其中拟合方程为:$f(\alpha)_1 = 1.564v + 20.699$,拟合度 $R^2 = 0.91$. 为了得到更加精确的定量关系,我们又采用二次函数对散点进行拟合,其拟合结果如图 3 所示. 拟合二次方程为:$f(\alpha)_2 = -0.239v^2 + 5.278v + 7.187$,拟合度 $R^2 = 0.98$.

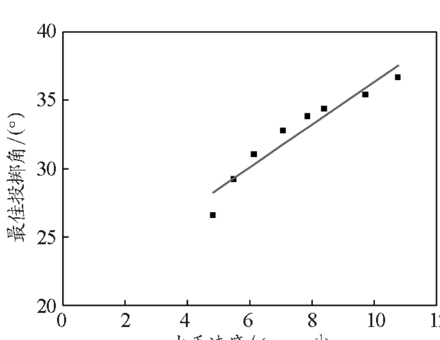

图 2　最佳投掷角与出手速度间的一次拟合关系

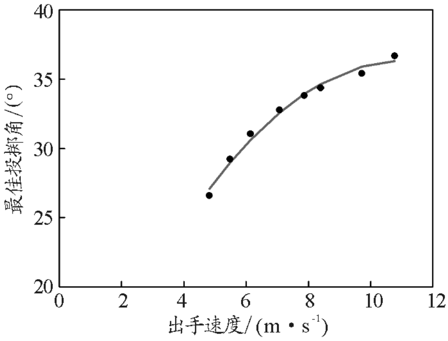

图 3　最佳投掷角与出手速度间的二次拟合关系

通过比较两次拟合结果,得到最大相对误差为

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}=4\%$$

可以忽略不计.因此一般情况下,我们仍就可以认为最佳投掷角与出手速度间为正相关关系[6].如果给出出手速度,利用方程 $f(\alpha)_1$ 我们可以计算出对应的最佳投掷角的近似值.

为了得到出手速度,我们可以用摄像机把投掷过程拍摄下来,根据自由落体运动及匀速直线运动公式,我们可以求出出手速度.在得到出手速度后,将其代入公式

$$f(\alpha)_1=1.564v+20.699$$

便可以得到最佳投掷角的近似值.通过调整投掷角来提高投掷实心球的成绩.

5　结论

物理不仅是一门实验科学,更是一门应用科学.球类运动蕴含着丰富的物理知识,本文通过对原地后抛实心球建立简单的物理模型,利用图像和数据定性分析了投掷实心球远近的影响因素.通过分析给出了最佳投掷角与出手速度之间的定量关系,将这一关系应用到我们实际的训练中,不仅可以正确指导学生训练,取得优异成绩,而且对球类运动的发展具有一定的指导意义.

参考文献

1　蔡志东.铅球最佳投掷角的精确方程及数值解.大学物理,2005(24):16～18

2　纪东亮.浅析斜抛物体的最佳投射角和最大射程.中国教育技术装订,2008(11):42

3　石俭,陈凤珍,卢启奇.原地双手后抛实心球的技术分析与训练方法研究——关于体育高考术科考试项目分析,2010,2(3):32～33,40

4　陈寿谦.抛射体投射角和落地角互为余角的条件.曲阜师范大学学报:自然科学版,1994(S2):111～112

5　张志涌,杨祖樱.Matlab教程.北京.北京航空航天大学出版社,2001

6　刘绍学.普通高中课程标准实验教科书数学必修3.北京.北京:人民教育出版社,2007.85～90

Precise Equation and Numerical Solution of Optimal Throwing Angle of Solidball

Ge Xingshuo　Li Qiang

(Shijiazhuang Shimen Experimental School,Shijiazhuang,Hebei　050024)

Ma Yuying

(TianjinYinghua International School,Tianjin　301700)

Abstract:Sports are closely related with the knowledge of physics, in which the law of mechanics is the main. The physical carrier in sports has a strong practical, physical knowledge has a wide range of guiding significance to solve and improve the practical problems in sports. We should pay more attention to the ability of students to analyze and solve practical problems and improve the students' comprehensive accomplishment. In this paper, we discuss the physical model in the solid ball project, and point out the problems in the formula of the optimal throwing angle of the solid ball. The precise equation and numerical solution of the optimal throwing angle of solid ball are derived, which is of great significance to improve the project score.

Key Words:sports; solid ball; optimal throwing angle; precise equation; numerical solution