

转动木板上木块的静摩擦力

陈拥华

(浙江省菱湖中学 浙江 湖州 313018)

邱为钢

(湖州师范学院理学院 浙江 湖州 313000)

(收稿日期:2017-02-02)

摘要:由三维转动的矩阵表示,得到连续两次转动后多边形板倾斜角的余弦值.对于边缘上一端固定后滚动的倾斜圆形木板,得到了倾斜角与转动角的解析关系;进而给出了两种木板上小木块静摩擦力的解析表达式.

关键词:转动 木板 摩擦力

2003年北京市海淀区第一次高考物理模拟考试中,出现了这样一道考查转动倾斜木板上物体摩擦力的选择题,一个正方形木板转动两次后小木块保持静止,求小木块所受静摩擦力大小.由于题目有歧义,引起不少读者的争论^[1~7].这些文章分成两派,一派认为,木板ABCD在两次旋转之后AB和AD与桌面所成的夹角均为 θ ;另一派认为分别以AD和AB边为轴将平面ABCD旋转 θ 角.这个题目物理很清晰,难在数学处理上,即怎么计算转动两次后木板的倾斜角.按照第一派的理论,木板的倾角很容易求出,得到模拟题给出的参考答案.按照第二派的理论,木板的倾角很不容易求出,要用到繁琐的立体几何知识.我们认为,按照真实的转动过程,

也按照物理学经典教材上的处理方法,木板转动是第二种操作方法.这种转动不仅有明确的数学表达式(三维矩阵),也能很容易推广到任意形状的多边形木板转动模型上,也不需要画图.

先简要介绍三维空间的矢量和转动.一个转动,使得一个矢量变成另一个矢量.矢量可以表示为三乘一的矩阵,转动可以表示为三乘三的矩阵.转动操作就是三乘三的矩阵点乘在三乘一的矩阵上,得到一个新的三乘一的矩阵.一个平面用它的法向量表示,经过多次转动后,新的平面法向量与垂直地面方向夹角就是这个平面与地面夹角.设 $R(\mathbf{n}, \varphi)$ 表示绕 \mathbf{n} (单位矢量)方向转动 φ 角度的转动矩阵,由文献[8],具体形式为

$$R(\mathbf{n}, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)n_1^2 & (1 - \cos \varphi)n_1n_2 - \sin \varphi n_3 & (1 - \cos \varphi)n_1n_3 + \sin \varphi n_2 \\ (1 - \cos \varphi)n_1n_2 + \sin \varphi n_3 & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)n_2^2 & (1 - \cos \varphi)n_2n_3 - \sin \varphi n_1 \\ (1 - \cos \varphi)n_1n_3 - \sin \varphi n_2 & (1 - \cos \varphi)n_2n_3 + \sin \varphi n_1 & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)n_3^2 \end{pmatrix}$$

为简单起见,我们只考虑多边形板相邻边的连续两次转动.设多边形木板起始时刻在地面上,相邻两边的单位矢量分别为 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} ,木板的法向量是 \mathbf{l} .第一次沿 \mathbf{p} 转动 α 角度,第二次沿转动后的 \mathbf{q} 方向转动 $-\beta$ 角度.第一次转动后,木板的法向量变为 $R(\mathbf{p}, \alpha)\mathbf{l}$, \mathbf{q} 方向变为 $R(\mathbf{p}, \alpha)\mathbf{q}$.第二次转动后,木板的法向量变为 $R(R(\mathbf{p}, \alpha)\mathbf{q}, -\beta) \cdot R(\mathbf{p}, \alpha)\mathbf{l}$.设这时木板与地面的倾角是 θ ,那么由矢量点乘意义,倾角的余弦是两个法向量的点乘,即

如果此时木块还是保持静止不动,这时木块受到的静摩擦力就是 $mg \sin \theta$.以上计算用手算可能很麻烦,但现在数学软件很容易编程计算得到结果.如果多边形两边夹角是 γ ,计算得到转动两次后的木板倾角余弦值是

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta$$

由此得到木块受到的摩擦力是

$$f = mg \sqrt{1 - (\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta)^2}$$

如果两边交角等于 90° ,上式就回到文献[2]的结果.如果两次转动角度相等 $\alpha = \beta$,那么上式转化

$$\cos \theta = \mathbf{l} \cdot R(R(\mathbf{p}, \alpha)\mathbf{q}, -\beta) \cdot R(\mathbf{p}, \alpha) \cdot \mathbf{l}$$

为

$$f = mg \sin \alpha \cdot \sqrt{(1 - \cos \gamma)[1 + \cos \gamma + (1 - \cos \gamma) \cos^2 \alpha]}$$

这推广了文献[2]的结果.

如果多边形的边长数目趋向无穷,这个极限一般是圆盘.一个直接的推广就是转动圆盘上木块的静摩擦力.考虑这样的模型,如图1所示.其中 O 是圆心, B 是圆周上一端, BA 是垂直地面的杆,在转动过程中,保持 B 点固定不变.起始时刻, BC 和 BO 的夹角为零.

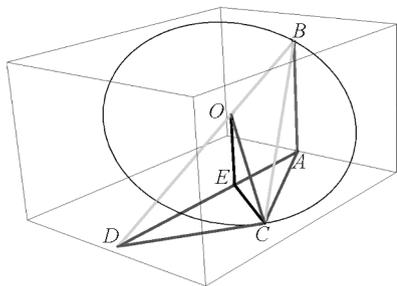


图1 多边形的边数趋向无穷极限为圆盘的模型

BO 连线交地面与 D 点, DC 垂直于平面 OEC , OE 垂直于地面,角 OCE 就是转动后圆盘平面与地面的夹角.设角 DOC 为 θ ,在直角三角形 OCD 中,斜边 OD 的长度是 $\frac{R}{\cos \theta}$.假设 AB 的长度是 h .在相似三角形 DOE 和 DBA 中,有相似比

$$\frac{OE}{BA} = \frac{OD}{DB}$$

由此解得 $OE = \frac{h}{1 + \cos \theta}$

于是圆盘斜面的正弦值为

$$\sin \alpha = \frac{OE}{OC} = \frac{h}{R(1 + \cos \theta)}$$

如果转动后圆盘上的小木块保持静止,那么小木块受到的静摩擦力为

$$f = \frac{mgh}{R(1 + \cos \theta)}$$

由此可见,三维转动后倾斜木板与地面夹角的计算,依据木板形状和转动操作,可以分别用中学的立体几何知识和大学的三维转动矩阵知识,来求解倾斜角的余弦(正弦)值,进而求得小木块的静摩擦力.

参考文献

- 1 李俊. 这道小题不可小看. 物理教学探讨, 2004, 22(17): 57 ~ 58
- 2 黄照欣. 这道小题确实不可小看. 物理教学探讨, 2005, 23(1): 35 ~ 36
- 3 于正荣. 对一道力学题及其改变题的解法的讨论. 物理教师, 2005, 26(8): 35 ~ 36
- 4 戴小民. 对一道误解习题的探讨. 物理教学探讨, 2006, 24(265): 35 ~ 37
- 5 张永胜. 剖析错解的静摩擦力典裂题. 中学物理, 2008, 26(9): 46 ~ 47
- 6 苏建东, 冷永飞. 对静摩擦力典型题中错误的纠正. 中学物理, 2009, 27(11): 38 ~ 40
- 7 李冬冬, 吴樵夫. 一道静摩擦力问题的错解分析. 物理教师, 2013, 34(12): 89 ~ 90
- 8 邱为钢, 等. 玩具中的物理: 镶嵌雪花片的滚动轨迹. 物理教师, 2014, 35(9): 70 ~ 71

The Static Friction on the Board of the Rotating Board

Chen Yonghua

(LinHu High School, Huzhou, Zhejiang 313018)

Qiu Weigang

(School of Science, HuZhou Teacher's College, Huzhou, Zhejiang 313000)

Abstract: The cosine of incline angle of a polygon board under two successive rotation is derived from the three dimensional matrix representation of rotation. The analytical relationship between incline angle and rotation angle is given for the rotational disk with an edge point fixed. Then the static force of a wood on these two kind of board are given analytically.

Key Words: rotation; board; friction