

# 带电小球在碰撞中的能量问题

孙作江 高 卓

(防化学院基础部物理教研室 北京 102205)

(收稿日期:2016-03-08)

碰撞是物质间作用的常见形式,也是中学物理和大学物理的重要内容.碰撞过程中伴随着能量的转化和转移,带电小球的碰撞更是有趣的和多彩的,却很少有人讨论.

在此,笔者通过对两个例题的分析,初步讨论了静电能向动能转化的问题,起一个抛砖引玉的作用,供大家参考,具体如下.

## 1 静电能向动能的部分转化

**【例 1】**如图 1 所示,光滑绝缘的水平面上,  $M$  与  $N$  两点处有两个完全相同的金属小球  $A$  和  $B$ , 所带电荷量分别为  $+q$  和  $+2q$ . 现在使小球以相等的初动能  $E$  沿同一直线相对运动, 发生接触碰撞后又各自返回. 若在碰撞过程中无机械能和电磁能损失, 它们返回  $M$  和  $N$  两点时的动能分别为  $E_1$  和  $E_2$ , 则  $E_1, E_2, E$  的大小关系是?



图 1

**答案:**  $E_1 = E_2 > E$ .

**解析:** 设  $M$  与  $N$  两点间的距离为  $l$ , 两球碰前的

库仑力为  $F = k \frac{2q^2}{l^2}$ , 两球碰后的库仑力为

$$F' = k \frac{2 \cdot 25q^2}{l^2} > F$$

在它们返回  $M$  和  $N$  两点的过程中电场力做功大于碰前电场力做的功, 所以动能增大.

**问题的提出:**  $E_1 + E_2 > 2E$ , 动能增加了, 增加的动能从哪里来的?

**问题的解析:** 设  $M$  与  $N$  两点相距  $l$ , 金属小球  $A$  和  $B$  的半径为  $R$ . 碰撞前, 两金属小球系统在  $M$  与  $N$

两点的静电能为

$$\begin{aligned} W &= W_{A自} + W_{B自} + W_{AB互} = \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{4q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 l} = \\ &= \frac{5q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{4q^2}{8\pi\epsilon_0 l} \end{aligned}$$

碰撞后, 两小球系统在  $M$  与  $N$  两点的静电能为

$$\begin{aligned} W' &= W'_{A自} + W'_{B自} + W'_{AB互} = \\ &= \frac{2 \cdot 25q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{2 \cdot 25q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{2 \cdot 25q^2}{4\pi\epsilon_0 l} = \\ &= \frac{4 \cdot 5q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{4 \cdot 5q^2}{8\pi\epsilon_0 l} \end{aligned}$$

碰撞前后, 两小球系统静电能的减少量为

$$\begin{aligned} \Delta W &= W - W' = \\ &= \frac{5q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{4q^2}{8\pi\epsilon_0 l} - \frac{4 \cdot 5q^2}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{4 \cdot 5q^2}{8\pi\epsilon_0 l} = \\ &= \frac{0.5q^2}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{0.5q^2}{8\pi\epsilon_0 l} > 0 \end{aligned}$$

由能量守恒定律可知, 两小球的自能减少了  $\frac{0.5q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$ , 一部分  $\frac{0.5q^2}{8\pi\epsilon_0 l}$  变成了两小球间的相互作用能, 一部分  $\left(\frac{0.5q^2}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{0.5q^2}{8\pi\epsilon_0 l}\right)$  变成了两小球的动能, 实现了静电能向动能的部分转化.

## 2 静电能向动能的完全转化

**【例 2】**如图 2 所示, 光滑绝缘的水平面上,  $M$  和  $N$  两点处有两个完全相同的金属小球  $A$  和  $B$ , 所带电荷量分别为  $+q$  和  $-q$ . 现在使小球以相等的初动能  $E$  沿同一直线相对运动, 发生接触碰撞后又各自返回. 若在碰撞过程中无机械能和电磁能损失, 它们返回  $M$  与  $N$  两点时的动能分别为  $E_1$  和  $E_2$ , 则  $E_1, E_2, E$  的大小关系是?

# 质点沿竖直光滑曲线运动时脱离约束点研究

田宝国 吴世永 宿德志

(海军航空工程学院基础部 山东烟台 264001)

(收稿日期:2015-03-23)

**摘要:**利用质点运动动力学方程和机械能守恒定律,对质点在竖直平面内沿任意光滑曲线运动时脱离曲线的条件进行了研究,根据曲线方程的不同形式给出了质点脱离约束时的一般公式,并通过具体实例进行了验证.

**关键词:**光滑曲线 脱离约束 牛顿运动定律

在质点沿竖直平面内光滑曲线自由下滑过程中,如果在某处质点所受的支持力为零,则质点就会脱离曲线的约束而运动. 在一些教材中,主要针对曲线为圆和抛物线的情况进行了讨论<sup>[1,2]</sup>. 本文利用质点运动的动力学方程和机械能守恒定律以及各种曲线方程的曲率半径公式,推导出了质点在竖直平面内沿任意光滑曲线自由下滑时脱离曲线约束的一般结论,给出了在各种曲线方程形式下质点脱离曲线时的一般公式,并借此对圆、抛物线、正弦曲线等具体曲线的例子进行了研究.

## 1 质点脱离曲线的一般公式

在如图1所示的直角坐标系中,设质量为  $m$  的质点沿竖直平面内的光滑曲线自由下滑,初始时刻质点位于点  $A(x_0, y_0)$  处,下滑到任意点  $B(x, y)$  时的速度为  $v$ ,方向与  $Ox$  轴的夹角为  $\theta$ ,受力情况如图1所示. 根据牛顿第二定律,质点在法向上的动力学方程为

$$mg \cos \theta - F_N = m \frac{v^2}{\rho} \quad (1)$$



图2

**答案:**  $E_1 = E_2 > E$ .

**解析:**两球碰前的库仑力做正功,动能增加;两球碰后,正、负电荷中和,没有了库仑力,在它们返回  $M$  与  $N$  两点的过程中电场力不做功,所以动能增大.

**问题的提出:**  $E_1 + E_2 > 2E$ ,动能增加了,增加的动能从哪里来的?

**问题的解析:**设  $M$  与  $N$  两点相距  $l$ ,金属小球  $A$  和  $B$  的半径为  $R$ . 碰撞前,两金属小球系统在  $M$  与  $N$  两点的静电能为

$$W = W_{A自} + W_{B自} + W_{AB互} =$$

$$\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} =$$

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l}$$

碰撞后,两小球系统在  $M$  与  $N$  两点的静电能为

$$W' = 0$$

碰撞前后,两小球系统静电能的减少量为

$$\Delta W = W - W' =$$

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} - 0 =$$

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} > 0$$

由能量守恒可知,两小球系统的静电能减少了  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l}$ ,全部变成了两小球的动能,实现了静电能向动能的完全转化.