大截面超声变幅杆的近似设计理论

林书玉　　张福成

（陕西师范大学应用声学研究所）

1990年3月5日收到

本文研究了大截面圆形变幅杆的设计问题，通过引进变幅杆的等效半径，利用表观弹性法理论，分析了圆锥形、指数形及悬链线形三种常用变幅杆的耦合振动，给出了适用于工程应用的近似设计及计算公式．理论计算及实验表明，利用近似理论计算设计大截面变幅杆，物理意义明显，计算简单，利用计算器便可迅速得出所需数据。与一维理论的计算结果相比，考虑径向振动后所得到的大截面变幅杆的谐振频率更接近于实际测量值，并且设计频率与测量频率之间的误差也完全满足工程上的要求．

一、引　　言

目前，超声技术中所利用的各种变幅杆的计算基本上都是从变截面杆的一维运动方程出发而忽略了变幅杆径向振动的影响，这使得一维理论的计算结果受到变幅杆横向尺寸的限制．一般认为当变幅杆的径向尺寸小于四分之一波长时，一维理论的计算结果基本正确．然而在强功率超声的应用中，变幅杆的径向尺寸常常超过四分之一波长，此时一维理论的结果将会有较大的误差，需要进行修正，以寻求适合于大截面变幅杆的新理论．

近几年来，随着科学技术的发展，大截面变幅杆的研究有了许多新的发展．文献[1]及[2]分别利用有限元法及伴随法研究了变幅杆的振动，文献[3]则利用了表观弹性法对粗圆柱及厚圆盘的耦合振动进行了研究．本文在表观弹性法的基础上，通过引入变幅杆的等效半径，研究了几种常用的变幅杆径向与纵向之间的耦合振动，给出了适用于工程应用的近似设计公式，实测结果表明，变幅杆谐振频率的设计值与测量值基本符合．

二、大截面变幅杆的近似设计公式

1. 变幅杆一维理论的设计公式．

图1是单一变幅杆的示意图，其中 $S_1=\pi R_1^2$，$S_2=\pi R_2^2$，R_1 及 R_2 分别是变幅杆大小端的半径，l 是其长度，ξ_1，ξ_2 及 F_1，F_2 分别是其两端的位移及外力．

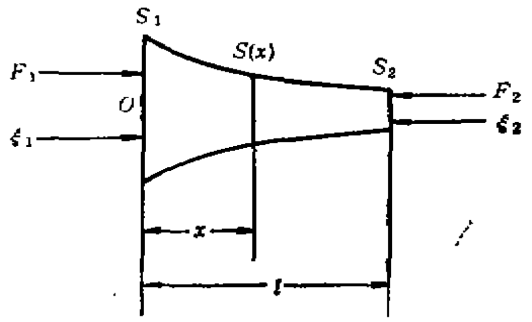

图1　一维振动变幅杆

在变幅杆的一维理论中，对于两端自由的情况，即 $F_1=0$，$F_2=0$，圆锥，指数及悬链线形变幅杆的纵向振动频率方程分别为，

$$\text{圆锥：}\quad \operatorname{tg} Kl=\frac{Kl}{1+\dfrac{N}{(N-1)^2}(Kl)^2} \tag{1}$$

$$\text{指数：}\quad \sin K_1 l=0 \tag{2}$$

$$\text{悬链线：}\quad K_2 l \operatorname{tg} K_2 l=-\sqrt{1-\frac{1}{N^2}}\ \mathrm{ch}^{-1} N \tag{3}$$

其中 $K=\omega/c$ 为波数，c 为细棒中声波的传播速度，$N=R_1/R_2$，$K_1=\sqrt{K^2-\beta^2}$，$K_2=\sqrt{K^2-\gamma^2}$，且有 $\beta l=\ln N$，$\mathrm{ch}\,\gamma l=N$，β 及 γ 是两个表示变幅杆截面变化规律的常数．

在上述三式中，由已知的 N 及设计频率即

可求出其长度，反之亦然，但由于没有考虑径向振动，如果用于大截面变幅杆，将产生较大的误差，因此必须对其进行修正。

2. 考虑径向振动后变幅杆的设计公式.

根据表观弹性法的理论[3]，大截面变幅杆的振动可以看成是由两种相互垂直的振动耦合而成，一种是表观弹性常数为 E_z 的纵向振动，另一种是表观弹性常数为 E_r 的径向振动。当考虑到上述因素后，变幅杆的纵向振动可看成是纯粹的细长棒的一维振动，而径向振动则可看成是薄圆盘的纯径向振动，其表观弹性常数 E_z 及 E_r 分别为，

$$E_z = \frac{E}{1 + \frac{2\nu}{n}} \tag{4}$$

$$E_r = \frac{E}{1 - \nu^2 + n\nu(1 + \nu)} \tag{5}$$

其中 E 和 ν 分别是变幅杆材料的杨氏模量及泊松系数，$n = -\sigma_z/\sigma_r$，称为耦合系数，σ_z 及 σ_r 为变幅杆中的纵向及径向应力。变幅杆的纵向及径向振动通过 n 相互耦合成为变幅杆的耦合振动

（1）变幅杆的纵向表观振动.

根据上文的分析，可得出耦合振动变幅杆纵向表观振动的频率方程.

圆锥：$$\operatorname{tg} K_z l = \frac{K_z l}{1 + \frac{N}{(N-1)^2}(K_z l)^2} \tag{6}$$

指数：$$\sin K_{1z} l = 0 \tag{7}$$

悬链线：

$$K_{2z} l \cdot \operatorname{tg} K_{2z} l = -\sqrt{1 - \frac{1}{N^2}}\ \mathrm{ch}^{-1} N \tag{8}$$

其中 $K_z = \omega/c_z$，$c_z = (E_z/\rho)^{1/2}$，$K_{1z} = \sqrt{K_z^2 - \beta^2}$，$K_{2z} = \sqrt{K_z^2 - r^2}$，$K_z$ 可以称为表观纵向波数，c_z 为耦合振动变幅杆中纵向振动的表观声速，ρ 为材料密度.

（2）变幅杆的径向表观振动.

如上所述，变幅杆的径向振动可看成是表观弹性常数为 E_r 的薄圆盘的纯径向振动，但是，由于变厚度薄圆盘的径向振动比较复杂，因此，为简化运算，便于工程应用，本文采用一种近似方法，把变幅杆的径向振动等效为一等厚度圆盘的振动，并求出其等效半径. 根据表观弹性法原理及薄圆盘的振动理论可得变幅杆径向振动的频率方程为，

$$(1 - \nu)J_1(K_r R) = K_r R \cdot J_0(K_r R) \tag{9}$$

式中 $J_0(K_r R)$ 及 $J_1(K_r R)$ 为零阶及一阶贝塞尔函数，$K_r = \omega/c_r$ 为表观径向波数，$c_r = (E_r/\rho)^{1/2}$，R 为变幅杆的等效半径.

假设等效圆盘与变幅杆的质量相等，则对于圆锥形，指数形及悬链线形三种变幅杆可得其等效半径分别为，

圆锥：$$R_c^2 = \frac{1}{3}(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) \tag{10}$$

指数：$$R_e^2 = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\ln N} \tag{11}$$

悬链线：$$R_H^2 = R_2^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{sh}2rl}{4\mathrm{ch}^{-1}N}\right) \tag{12}$$

利用上述三式求出等效半径 R，分别代入(9)式就可得圆锥，指数及悬链线形变幅杆的径向频率方程，结合(6)—(8)三式就给出了决定三种变幅杆尺寸及频率的耦合振动频率方程.

（3）大截面变幅杆的耦合振动频率方程.

频率方程(6)—(9)四式，不仅适用于基频，也适用于变幅杆的高次谐频. 为简化分析，本文仅限于讨论变幅杆的基频振动频率方程，在上述四式中，令其各自的第一个根分别为 G_1，G_2，G_3 及 G_4，可得，

圆锥：$$K_z l = G_1, \tag{13}$$
$$K_r R_c = G_{4c}, \tag{14}$$
指数：$$K_{1z} l = G_2 \tag{15}$$
$$K_r R_e = G_{4e} \tag{16}$$
悬链线：$$K_{2z} l = G_3 \tag{17}$$
$$K_r R_H = G_{4H} \tag{18}$$

其中 G_1, G_2, G_3 及 G_4（包括 G_{4c}，G_{4e} 及 G_{4H}）对应文献[4]中变幅杆的相长及广义相长. $G_2 = \pi$，G_1 和 G_3 是 N 的函数，G_4 是材料泊松系数 ν 的函数. 对上述各式进行变换可得三种变幅杆耦合振动频率方程的表达式，

圆锥：$Kl\sqrt{1+\frac{2\nu}{n}}=G_1$ (19)

$$KR_c\sqrt{1-\nu^2+n\nu(1+\nu)}=G_{4c} \tag{20}$$

指数：$Kl\sqrt{1+\frac{2\nu}{n}}=\sqrt{(\ln N)^2+\pi^2}$ (21)

$$KR_c\sqrt{1-\nu^2+n\nu(1+\nu)}=G_{4c} \tag{22}$$

悬链线：$Kl\sqrt{1+\frac{2\nu}{n}}=\sqrt{(\mathrm{ch}^{-1}N)^2+G_3^2}$ (23)

$$KR_H\sqrt{1-\nu^2+n\nu(1+\nu)}=G_{4H} \tag{24}$$

另外，由上述各式还可以推得决定变幅杆径向与纵向之间耦合系数 n 的公式，

圆锥：$\left[\nu(1+\nu)\frac{G_1^2}{G_{4c}^2}\right]n^2+\left[\frac{G_1^2}{G_{4c}^2}(1-\nu^2)-\left(\frac{l}{R_c}\right)^2\right]n-2\nu\left(\frac{l}{R_c}\right)^2=0$ (25)

指数：$\left[\nu(1+\nu)\frac{E^2(N)}{G_{4c}^2}\right]n^2+\left[\frac{E^2(N)}{G_{4c}^2}(1-\nu^2)-\left(\frac{l}{R_c}\right)^2\right]n-2\nu\left(\frac{l}{R_c}\right)^2=0$ (26)

悬链线：$\left[\nu(1+\nu)\frac{H^2(N)}{G_{4H}^2}\right]n^2+\left[\frac{H^2(N)}{G_{4H}^2}(1-\nu^2)-\left(\frac{l}{R_H}\right)^2\right]n-2\nu\cdot\left(\frac{l}{R_H}\right)^2=0,$ (27)

其中 $E(N)=\sqrt{(\ln N)^2+G_2^2}=\sqrt{(\ln N)^2+\pi^2}$,

$$H(N)=\sqrt{(\mathrm{ch}^{-1}N)^2+G_3^2}$$

当变幅杆的材料及大小端直径给定后，由上述各式就可求出变幅杆的 Kl 值. 这样，给定设计频率，就可得其长度，反之亦然.

另外，由上述各式可以推出均匀直棒的频率方程，例如，在(11)，(21)及(22)三式中，令 $R_1=R_2$，可得 $N=1$，$\ln N=0$，$R_c=R_1$，其耦合振动频率方程为，

$$Kl\sqrt{1+\frac{2\nu}{n}}=\pi \tag{28}$$

$$KR_1\sqrt{1-\nu^2+n\nu(1+\nu)}=G_{4c} \tag{29}$$

由此可见(28)及(29)式与文献 [3] 中的结果是完全一致的.

三、理论计算及实验

为验证文中给出的大截面变幅杆的近似设计理论，根据文中推得的公式，我们计算并加工了几个大截面变幅杆，然后对其谐振频率进行了测量. 变幅杆的材料为硬铝及钢，其声速分别为 $5150\mathrm{ms}^{-1}$ 及 $5250\mathrm{ms}^{-1}$，泊松系数为 0.34 及 0.28. 变幅杆设计频率 f_d 及实测频率 f_m 的数值见表 1，为便于比较，表中同时列出了不考虑径向振动时变幅杆的谐振频率 f_L. 图 2 为谐振频率的测试框图，其中 $TR1$ 及 $TR2$ 分别为宽频带发射及接收型压电换能器，表中指数(II)材料为钢，其余为硬铝.

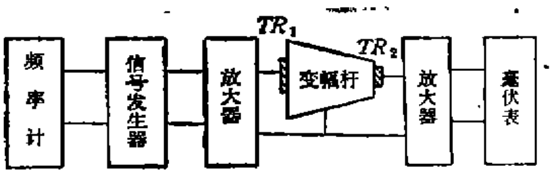

图 2 变幅杆谐振频率测试框图

表 1 变幅杆谐振频率的设计及测量值.

	R_1[mm]	R_2[mm]	l[mm]	N	f_L[Hz]	f_d[Hz]	f_m[Hz]	$\frac{\lvert f_L-f_m\rvert}{f_m}$(%)	$\frac{\lvert f_d-f_m\rvert}{f_m}$(%)
圆锥	30.00	16.00	82.24	1.875	32506.4	31436.9	31235.4	4.1	0.65
指数(I)	39.00	13.29	108.50	2.935	25087.5	24534.8	23874.0	5.1	2.8
指数(II)	39.00	10.00	137.00	3.900	20881.3	20709.0	20337.0	2.7	1.8
圆柱	15.00	15.00	55.50	1	46396.4	45124.6	44241.0	4.9	2.8

从上述数据可以看出，考虑径向振动后，变幅杆的谐振频率 f_d 与不考虑径向振动时变幅杆的谐振频率 f_L 相比，更接近于实际测量值 f_m

四、结　论

总结上述分析，可得出以下几点结论：

1. 本方法采用了一些近似，但得出的结果与实验基本符合.

2. 与有限元等一些数值计算方法相比，计算简单，不需要计算机就能迅速得出所需结果.

3. 在相同的径向尺寸下，圆锥形变幅杆的频率修正量最大，悬链线形最小，即对应相同的径向尺寸，圆锥形变幅杆的径向振动最显著，其次是指数形，最后是悬链线形.

4. 对于放大系数较大的单一变幅杆，即 R_1 较大，而 R_2 较小，此时，变幅杆的整体径向振动比较弱，频率的修正量不大.

参 考 文 献

[1] Gladwell G.M.L. and Vijay D. K., *Journal of Sound and Vibration*, 42(2), (1975), 137—145.

[2] 强盘富，声学学报，7-3，(1982)，186—193

[3] Mori E., Itoh K. and Imamura A., Ultrasonics International 1977 Conference Proceedings, 262.

[4] 侯立琪，林仲茂，马玉龙，应崇福，声学学报，7-4 (1982)，209—221.

发电机粗晶钢护环的不拆卸超声波探伤方法

魏 仲 远

（北京电力科学研究所）

1990年3月26日收到

本文提出的探伤方法是以晶界回波为参照确定探伤及判伤灵敏度；采用非粗晶钢（普通碳钢）材料代替粗晶钢材料制作标准试块；用声程定位法鉴别真伪缺陷；用晶界回波估测晶粒度；根据波长与晶粒直径的比值选取最佳探伤频率等. 应用本方法发现9台机组护环内壁上的应力腐蚀小裂纹.

一、前　言

发电机护环的嵌装面、紧力面 R 角等部位极易产生裂纹，危及设备的安全运行. 国内某电厂5# 发电机护环曾于1975年飞裂. 南非、美国、西德、加拿大等地也都发生过护环损坏事故. 近两年内，华北电网就发现18个护环有应力腐蚀小裂纹.

为检查大机组护环的内壁裂纹，以往是将护环拆卸下来进行，在拆装护环过程中，由于烘套时冷热交变应力，会使原有裂纹扩展或产生新的裂纹，转子线圈端部（简称端包）绝缘也易被破坏. 遇到难拔护环时，往复加热次数更多，既费工又费物，延误工期.

国内现有护环超声波探伤标准（JB4010-85），仅是针对制造成品（未套装前）的检验方法. 如为了确定探伤灵敏度，采用护环本体刻V形槽的方式，这种方式在套装后的护环上是不允许的；未套装的护环在探伤时也不会产生套装后的复杂结构透入波、轴齿压痕波、电烧伤及腐蚀坑等多种反射波形. 此外，国内已发表过的护环探伤文章，一是所探护环的晶粒度较细、机组小、壁厚薄；二是没有考虑声速修正；三