用于时延估计的一种相关峰内插算法

黄建人

（东南大学　南京　210018）

1995年5月29日收到

摘要　本文介绍一种基于余弦函数的相关峰内插算法．在时延估计系统中，为了减少运算量和增加观察时间，采用内插算法是必要的．因为在频率估算时应用了迭代算法，所以无论对于 $\cos x$、$\sin x/x$ 或实际的相关峰，都有相当高的内插精度．

关键词　时延估计，内插，相关函数

An interpolation algorithm of the correlation peak for time delay estimation

Huang Jianren

(*Southeast University*, *Nanjing* 210018)

Abstract　We report the an inner interpolation algorithm of the correlation peak. The interpolation is necessary for reducing the sample frequency and increasing the observation time. We use a Three Point Iteration Method in the frequency estimation, and consequently the interpolation method has higher precision for the $\cos(x)$ or the $\sin(x)/x$ function of the correlation peak, in the time delay estimatiom system. Simulating results are given in this paper.

Key words　Time delay estimation, Inner interpolation, Correlation function

1　引言

在采用相关法或广义相关法的时延估计系统中，峰值位置的分辨率取决于采样频率．为了提高分辨率，必须提高采样频率．如果数据量的增加受设备量的限制，则只能缩短观察时间，而观察时间的缩短会增加估计误差．内插算法是解决这一矛盾的较好方法，它可以使采样频率适当降低，而使观察时间适当加长．本文提出一种精度比较高的三点余弦迭代内插算法．

2　原理

由相关函数的特性可知，当用于求相关函数的谱为一 δ 函数时，相关函数为一余弦函数；当谱为白谱时，相关函数为 δ 函数；而当谱为白色的矩形谱时，相关函数具有 $\sin x/x$ 的形式，对于实际信号的谱，为了克服某些强噪声的干扰，一般采用带通滤波，并进行预白化处理，其谱将有矩形白色特点．有些情况

下，由于某些频率分量比较强，信噪比比较高，所以往往不作预白处理，而作最大似然处理，故实际信号的频谱虽有矩形谱的特点，但不一定是白色的，所以，相关峰的形状就介于 $\sin x/x$ 和余弦函数之间.

对于余弦函数 $\cos x$，在 $x=0$ 附近作 Taylor 展开，有

$$\cos x \simeq 1 - x^2/2$$

对于 $\sin x/x$，在 $x=0$ 附近作 Talyor 展开，有

$$\sin x/x \simeq 1 - x^2/6$$

所以，$\cos x$ 和 $\sin x/x$ 都具有相似的抛物线形状，因此，对于 $\cos x$ 或 $\sin x/x$ 都可以采用 $\cos x$ 函数的内插以求取极值的坐标.

设离散的余弦函数如图 1 所示. 在最大值附近的三采样点分别为 a_1、a_2、a_3. 设余弦信号的频率为 f_p，则反映内插时延 $\Delta\tau$ 的相角 θ 为

$$\theta = 2\pi f_p \cdot \Delta\tau$$

故有

$$\Delta\tau = \theta/(2\pi f_p) \tag{1}$$

内插时延 $\Delta\tau$ 为极值点与 a_2 点的横坐标间隔所代表的时间，设 a_2 点时延为 $\Delta\tau$，故总的时延 τ 为 $\tau=\tau_0+\Delta\tau$.

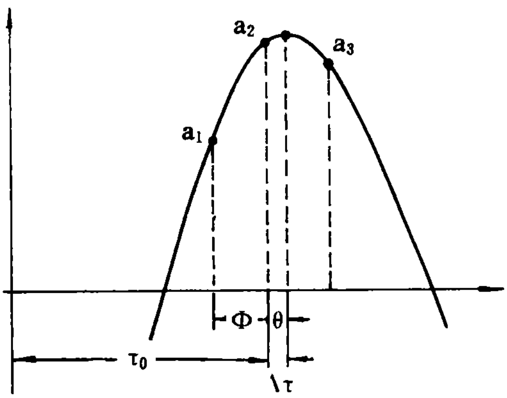

图 1　余弦函数三采样点示意图

余弦信号的频率 f_p 为未知数，我们可以通过迭代运算求得. 先假设余弦信号的频率为 f_0，实际采样频率为 f_s，令 $m=f_s/f_0$，则 $T=1/f_s=1/mf_0$，每一采样间隔 T 相对于 f_0 的相位角 φ:

$$\varphi = 2\pi f_0 T = \frac{2\pi}{m} \tag{2}$$

由于假设的频率 f_0 不一定等于 f_p，所以余弦信号的实际频率 f_p 可以表示为

$$f_p = f_0 + \Delta f_0$$

则采样间隔 T 相对于 f_p 的相位角 ϕ 可表示为

$$\phi = 2\pi f_p T = 2\pi(f_0 + \Delta f_0)T = \frac{2\pi}{m} + \nu \tag{3}$$

这里

$$\nu = \frac{2\pi}{m} \cdot \frac{\Delta f_0}{f_0}$$

$$\Delta f_0 = \frac{m\nu}{2\pi} \cdot f_0$$

所以

$$f_p = f_0(1 + \frac{m\nu}{2\pi}) \tag{4}$$

式中 ν 可以通过 a_1、a_2、a_3 求得，其中 a_1、a_3 为紧靠 a_2 的左右采样点. 当 f_0 接近 f_p 时，$\Delta f_0 \ll f_0$，ν 为一小量，故有

$$a_2 = A\cos\theta \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= A\cos[\phi - \theta] = A\cos[(\frac{2\pi}{m} + \nu) - \theta] \\ &\simeq A[(\cos\frac{2\pi}{m} - \nu\sin\frac{2\pi}{m})\cos\theta \\ &\quad + (\sin\frac{2\pi}{m} + \nu\cos\frac{2\pi}{m})\sin\theta] \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= A\cos[\phi + \theta] = A\cos[(\frac{2\pi}{m} + \nu) + \theta] \\ &\simeq A[(\cos\frac{2\pi}{m} - \nu\sin\frac{2\pi}{m})\cos\theta \\ &\quad - (\sin\frac{2\pi}{m} + \nu\cos\frac{2\pi}{m})\sin\theta] \end{aligned} \tag{5.3}$$

令

$$\alpha = \frac{a_3 + a_1}{2a_2} \tag{6}$$

因为

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{m} - \nu\sin\frac{2\pi}{m}$$

则有

$$\nu = \frac{\cos\frac{2\pi}{m} - \alpha}{\sin\frac{2\pi}{m}} \tag{7}$$

由式(4)、(6)、(7)构成迭代公式组，将求得的 f_p 代替 f_0 求 m，继续迭代运算，当 $\nu \leqslant \nu_0$ 时，迭代结束，这里 ν_0 为一控制精度的小数.

为求解 θ，令

$$\beta=\frac{a_3-a_1}{2a_2}=(\sin\frac{2\pi}{m}+\nu\cos\frac{2\pi}{m})\mathrm{tg}\theta \tag{8}$$

故

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\beta}{\sin\frac{2\pi}{m}+\nu\cos\frac{2\pi}{m}}=\mathrm{tg}^{-1}\chi \tag{9}$$

这里

$$\chi=\frac{\beta}{\sin\frac{2\pi}{m}+\nu\cos\frac{2\pi}{m}} \tag{10}$$

用近似公式计算 θ，得

$$\theta\simeq\chi-\frac{\chi^3}{3}+\frac{\chi^5}{7.5} \tag{11}$$

最后，$\Delta\tau$ 即可用式(1)求得.

3 计算机模拟

内插运算是在求得相关峰以后进行的，由于三点余弦迭代内插局域收敛，如采样频率太低会出现发散现象，故要求相关峰附近三点(a_1、a_2、a_3)的值大于零. 迭代次数依赖于初值 f_0 和 ν_0，一般迭代一至三次即可满足要求.

在计算机模拟时，式(7)和式(8)中的正弦、余弦用 Taylor 级数展开：

$$\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)\simeq\left(\frac{2\pi}{m}\right)-\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^7}{7!}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)\simeq 1-\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^6}{6!}$$

表 1 为由 $\cos x$ 和 $\sin x/x$ 求得的 a_1、a_2、a_3 样点在不同采样频率(f_s/f_p 不同)时的内插结果. 表中 $\Delta\tau_c$ 表示由 $\cos x$ 给出 a_1、a_2、a_3 求得的内插结果，$\Delta\tau_s$ 表示由 $\sin x/x$ 给出 a_1、a_2、a_3 求得的内插结果.

表 1 不同采样频率时的内插模拟 ($\nu_0=0.001$)

f_s/f_p		36.000	18.000	10.286	8.182	7.200	4.000
标准 $\Delta\tau$		0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000
内插	$\Delta\tau_c$	0.2000	0.2000	0.2001	0.2000	0.2001	0.2000
	$\Delta\tau_s$	0.1995	0.1981	0.1939	0.1890	0.1863	0.1345

表 2 表示标准时延值不同时，由 $\cos x$ 和 $\sin x/x$ 产生的 a_1、a_2、a_3 样点的内插结果. $\Delta\tau_c$、$\Delta\tau_s$ 同表 1.

表 2 不同时延值的内插模拟 ($f_s/f_p=10.286$ $\nu_0=0.001$)

标准 $\Delta\tau$		0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
内插	$\Delta\tau_c$	0.0000	0.1000	0.2001	0.3000	0.4000	0.5000
	$\Delta\tau_s$	0.0000	0.0965	0.1939	0.2929	0.3945	0.4996

表 3 为本文内插与 F. A. Reed[1]提出的

表 3 两种内插方法比较 (标准 $\Delta\tau=0.2000$ $\nu_0=0.001$)

f_s/f_p	36.000	18.000	10.286	8.182	7.200	4.000
$\Delta\tau_s$(本文)	0.1995	0.1981	0.1939	0.1890	0.1863	0.1345
$\Delta\tau_R$(文献[1])	0.1990	0.1958	0.1872	0.1797	0.1735	0.1087

内插的结果比较，该内插公式为

$$\Delta\tau_R = \frac{a_3 - a_1}{2a_2 - (a_3 + a_1)} \cdot \frac{1}{2} \qquad (12)$$

4 结束语

本文介绍的三点余弦迭代内插算法与文献[1]提出的方法相比具有较高的精度. 虽然运算量有所增加，但当采用了信号处理器以后，这不是主要困难. 本算法已在广义相关时延估计系统取得了较理想的效果.

参 考 文 献

[1] Reed F A, Feintuch P L, Bershad N J. *IEEE Trans ASSP*, 1981, **29**(3): 561—576.

[2] 王劲林，李启虎，声学学报，1992，**17**(3)：208—216.

(上接第 32 页)

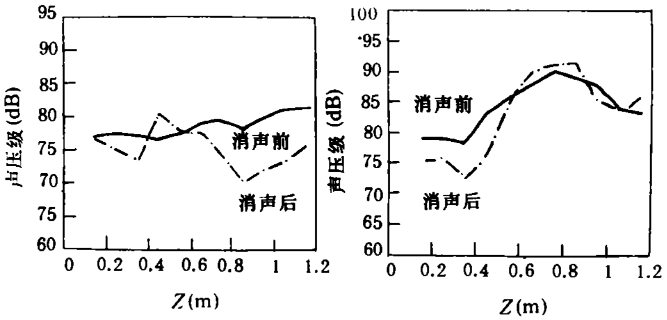

图 7 声腔内消声区域的变化

初级噪声频率 f=1850 Hz，测点在(θ, r)平面投影分别为 (a) (−30°, 0.15), (b) (30°, 0.15)

内有源控制外声场声透射是有效的. 在声腔低模态密度条件下的频率范围内能取得好的消声效果；自适应有源消声器对宽带噪声的抵消效果令人鼓舞；误差传感器置于圆柱声腔两端，未能取得消声效果；消声区域与声腔模态分布有关.

4 讨论

由于圆柱体内外均处于水介质中，结构-声腔耦合较强，引入次级声源能够在较宽的频率范围内取得好的降噪效果. 为了将来的工程实际应用，还应该在以下几个方面进一步加以改进.

(1) 为了提高宽带噪声降噪效果，应该对参考信号的拾取方式加以研究，以使得参考信号与误差传感器取得的信号相关性最大；改进自适应有源消声器及其算法；作为次级声源的发射换能器应尽量满足低频宽带条件.

(2) 为了使不同初级噪声频率下的消声区域一致并且空间范围足够大，单个或几个误差传感是不够的，改进的方法包括增加有源消声器通道数，优化误差传感器位置及利用误差信号的内插虚拟多个误差传感器[5].

(3) 次级源还可采用次级声源与次级力源的组合形式，以提高降噪效果.

参 考 文 献

[1] Ma Y L, Chen K A, *Advanes in Natural Science*, 1994, **4**(6): 715—719.

[2] Pan J, Bies D A, *J. Acoust, Soc. Amer.*, 1990, **87**(2): 691—707.

[3] 陈克安，马远良，孙进才. 声学学报，1994，**19**(6)：434—443.

[4] 陈克安，马远良，孙进才. 应用声学，1993，**12**(5)：7—12.

[5] 陈克安，马远良. 声学学报，1992，**18**(5)：357—366.