

# 用谐振来解释超声加工中的“局部共振”现象\*

徐可伟 朱训生 赵波

(上海交通大学机械工程学院 上海 200030) (焦作工学院机械工程系 焦作 454000)

2001年6月10日收到

**摘要** 本文采用机械阻抗方法分析了超声加工系统中出现的“局部共振”现象,通过对不同截面积比的变幅杆和工具杆组合系统的计算,得出“局部共振”是超声加工系统的某些固有频率和工具杆固有频率相接近时的现象,此时整个系统仍是全谐振。

**关键词** 局部共振,全谐振,阻抗综合法

## Using full resonance to explain “local resonance” phenomenon in ultrasonic machining

XU Kewei ZHU Xunsheng

(Mechanical School of Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

ZHAO Bo

(Mechanical Department of Jiaozuo Institute of Technology, Jiaozuo 454000)

**Abstract** In this paper the ‘local resonance’ in ultrasonic processing system is analyzed by the mechanical impedance method. Through computation of the different section area ratios of the horn and the tool, it is found that ‘local resonance’ happens when the natural frequency of the ultrasonic processing system is close to that of the tool, and thus the whole system is resonant.

**Key words** Local resonance, Full resonance, Compound resistance method

### 1 引言

1982年,我国的范国良教授在实验中首先发现超声加工工具系统中存在“局部共振现象”<sup>[1]</sup>,即:

(1) 当工具杆的直径(或面积)甚小于与之相接的变幅杆输出端直径(或面积),即在直径比小于0.30(或面积比约小于10%)时,工具杆可以独立于变幅杆单独共振,此时它的共振模式相当于一端固定、一端自由。共振时

\* 上海交通大学振动、冲击、噪声国家重点实验室开放课题基金资助(vsn200004)

杆端的位移振幅可以大于单独的驱动系统中变幅杆输出端的位移振幅。

(2) 在加工过程中工具发生磨损时, 不需要更换工具杆, 只要调节超声波发生器的频率, 仍可得到良好的加工效果。

在探讨其机理时, 范教授认为, 工具杆细长时和驱动系统的耦合很弱, 因此可以完全独立共振, 耦合系数和直径比的定量关系尚需深入分析。由于局部共振现象大大简化了超声加工系统的设计使之更加实用化, 已被应用到超声珩磨和超声振动钻削声学系统的设计上, 采用局部共振原理设计挠性杆和油石座, 出现了局部共振型超声珩磨系统<sup>[2]</sup>。以后陆续出现了几种理论解释局部共振现象, 其中文献[3]用广义变幅器的理论解释了等截面杆的放大作用, 同时认为“此时 D 系统在负载下 Q 值较低, 因而能在相当宽的频带内工作”, 文献[4]则提出“局部共振”是在“复合系统的某些频率与工具杆固定自由条件下的谐振频率一致或接近时出现的现象, 此时复合系统仍是全谐振的”, 文献[5]用两个弹性振子的耦合振动模型来模拟局部共振现象, 发现当耦合系数较小时, 通过理论计算得到的结果和实验值吻合较好, 但也存在耦合系数难以确定的问题。

本文尝试从整体组合系统的观点, 采用机械阻抗方法, 求得组合系统的固有频率。

## 2 阻抗综合法

阻抗综合法<sup>[6]</sup>是分析组合系统固有频率的有效方法, 它通过将整个组合系统分为若干个子系统, 单独求出每个子系统在连接点处的输入阻抗, 根据连接的具体形式, 求出组合系统在输入点的总输入阻抗。根据谐振时输入阻抗为零的原则, 令组合系统在输入点处的总输入阻抗为零, 即可以得到组合系统的固有频率方程。

对于单个坐标连接点组合系统, 假设两个子系统 A 和 B, 仅在一点 P 通过单一坐标  $X_P$  刚性连接在一起, 如图 1 所示, 该组合系统及其两个子结构 A 与 B, 在连接点 P 的位移阻抗, 可分别表示为:

$$\left. \begin{aligned} Z_P &= F_P / X_P \\ Z_P^A &= F_P^A / X_P^A \\ Z_P^B &= F_P^B / X_P^B \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $Z_P$ 、 $Z_P^A$  和  $Z_P^B$  分别代表组合系统、子系统 A、子系统 B 在连接点 P 处的机械阻抗,  $F_P$  代表组合系统在连接点 P 所受到的外部力, 而  $F_P^A$  与  $F_P^B$  分别代表两个子系统在连接点处实际所承受的外部激振力。

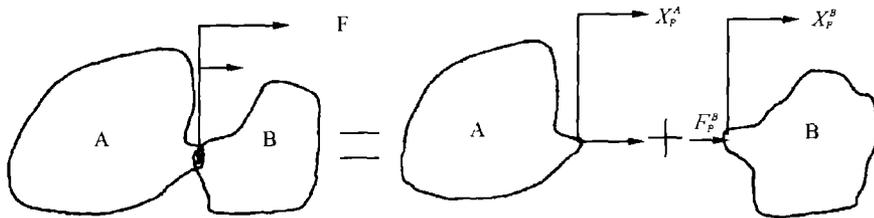


图 1 单一坐标联结的组合系统

根据连接点的力平衡和位移相容条件, 可得两个约束方程

$$\left. \begin{aligned} F_P &= F_P^A + F_P^B \\ X_P &= X_P^A + X_P^B \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由此可知:

$$Z_P = F_P / X_P = Z_P^A + Z_P^B \quad (3)$$

即: 整个系统在连接点的阻抗, 等于两个子系

统在连接点的阻抗之和。

若不计阻尼的影响，点阻抗  $Z_P$  及  $Z_P^A$  和  $Z_P^B$  均为激振频率  $\omega$  的实函数。当

$$\left. \begin{aligned} Z_P(\omega) = Z_P^A(\omega) + Z_P^B(\omega) = 0 \\ \text{或 } Z_P^A(\omega) = -Z_P^B(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

时，整个系统会产生共振。满足这一条件，则称交联的两子系统 A 和 B 阻抗是匹配的 (matching)。

图 2 即为常用的超声加工系统，可以分别求出变幅杆和工具杆在连接点处的输入阻抗  $Z_h$  和  $Z_t$ 。

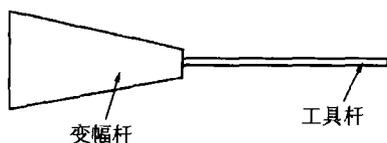


图 2 超声加工系统

### 3 系统固有频率方程

如图 3 所示的锥形变幅杆，设作用在两端

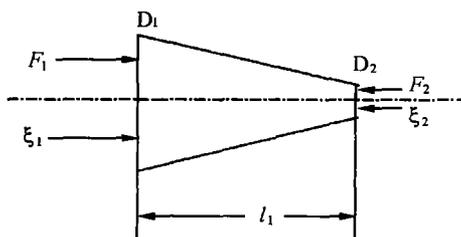


图 3 圆锥形变幅杆

面的力和位移分别为  $F_1$ 、 $\xi_1$ 、 $F_2$ 、 $\xi_2$ ，两端面的直径分别为  $D_1$  和  $D_2$ ，令

$$\alpha = \frac{D_1 - D_2}{D_1 l_1} = \frac{N - 1}{N l_1}, \quad N = \frac{D_1}{D_2}$$

根据弹性力学知识，变截面杆的振动微分方程是：

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + K^2 \xi = 0 \quad (5)$$

式中  $K$ —圆波数， $k = \frac{\omega}{c}$ ；

$c$ —纵波在细棒中的速度， $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 。

$A$ —杆的横截面面积函数， $A = A(x)$ ；

根据图 3 所示解式 (5) 可以得：

$$\xi = \frac{1}{x - 1/\alpha} (A_2 \cos kx + B_2 \sin kx)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{x - 1/\alpha} (-A_2 \cos kx + B_2 \sin kx) \\ - \frac{1}{(x - 1/\alpha)^2} (A_2 \cos kx + B_2 \sin kx) \end{aligned} \quad (6)$$

由边界条件  $\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$ ， $F_2 = -S_2 E \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l}$  及  $\xi_2 = \xi \Big|_{x=l}$  可以解得：

$$\begin{aligned} Z_H = \frac{F_2}{\xi_2} = -S_2 E \frac{\alpha}{\alpha \sin kl_1 - k \cos kl_1} \\ \cdot \left[ \left( \frac{k^2}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha l_1 - 1} \right) \sin kl_1 \right. \\ \left. + \left( k + \frac{k}{\alpha l_1 - 1} \right) \cos kl_1 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

工具杆的阻抗同理可求得：

$$Z_t = -E S_t k t g k l_2 \quad (8)$$

变幅杆和工具杆的材料相同，均为 45# 钢，所以式 (7) 和式 (8) 中的  $k$  值相同。由阻抗匹配原理：

$$Z_H + Z_t = 0 \quad (9)$$

即得组合系统的固有频率方程：

$$\begin{aligned} S_2 \frac{\alpha}{\alpha \sin kl_1 - k \cos kl_1} \\ \cdot \left[ \left( \frac{k^2}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha l_1 - 1} \right) \sin kl_1 \right. \\ \left. + \left( k + \frac{k}{\alpha l_1 - 1} \right) \cos kl_1 \right] \\ + S_t k t g k l_2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$k = \omega/c$ ， $k$  称为圆波数。

为和文献 [1] 中的实验相对照，取变幅杆的小端直径  $D_2$  为  $\phi 20\text{mm}$ ，长度为  $l_1 = 140\text{mm}$ ，

共振频率为  $f_1 = 20\text{kHz}$ ，工具杆和变幅杆的截面积比  $S = S_1/S_2$  分别为 0.05，0.1，0.2 和 0.3，设工具杆长度 195mm，固定-自由状态下频率方程为：

$$f_{TN} = (2N + 1)c/4L \quad (N = 0, 1, 2, \dots)$$

得到： $f_{T0} = 6.54\text{kHz}$ ， $f_{T1} = 19.62\text{kHz}$ ，

$f_{T2} = 32.70\text{kHz}$ （为便于比较，本文中的声速都取为  $C = 5100\text{m/s}$ ）。

表 1 为根据式（10）计算的不同截面积比下的组合系统固有频率和工具杆固定-自由状态下固有频率的关系：

表 1 不同截面积比下的组合系统共振频率

截面积比 $S_1/S_2$		0.05	0.1	0.2	0.3
组合系统固有频率	$f_{T0} = 6.54$	6.54	6.56	6.58	6.61
	$\Delta(\%)$	0	0.31	0.62	1.07
计算值	$f_{T1} = 19.62$	19.64	19.64	19.64	19.68
	$\Delta(\%)$	0.1	0.1	0.1	0.3
	$f_{T2} = 32.70$	32.95	33.24	34.06	35.39
	$\Delta(\%)$	0.76	1.65	4.16	8.23

由上表可见，当工具杆和变幅杆的截面积比小于 0.1 时，组合系统的固有频率和工具杆固定-自由状态的频率相差很小，随着截面积比的增大，组合系统的固有频率和工具杆固定-自由状态的频率差别增大，而且阶数越高，这种差别越明显。

为了分析上述振动系统的振幅分布，取变幅杆的小端直径为  $\phi 20\text{mm}$ ，长度为 140mm，共振频率为 20kHz，工具杆直径为  $\phi 6\text{mm}$ ，长度为 136mm，固有频率为 19kHz，截面积比  $S_1/S_2 = 0.1$ ，采用模态综合法<sup>[7]</sup> 求出组合系统在共振频率  $f = 9.67\text{kHz}$  条件下的共振模式如下图 4。

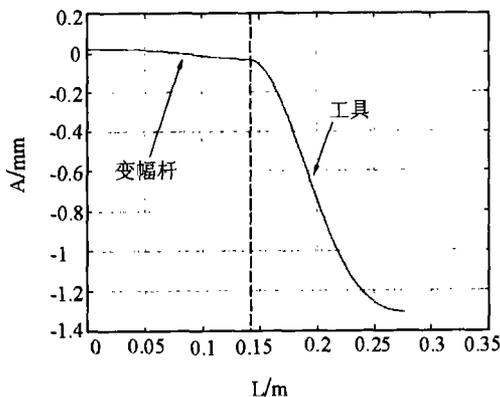


图 4 超声加工系统振动模式

图 4 中变幅杆（ $L=0-140\text{mm}$ ）的振幅相对于工具杆来说是很小的，变幅杆和工具杆连接处  $L=140\text{mm}$  的振幅相对于工具杆前端的振幅很小，这和文献 [1] 中的实验结论一致。

#### 4 结论

至此，文献 [1] 中的各种现象都得到了解释：

(1) 只有当截面积比  $S_1/S_2 \leq 0.1$  时才会出现组合系统的某一共振频率和工具杆固定-自由频率相接近的现象，当截面积比增大时，组合系统的频率和工具杆的频率偏差较大，截面积比越小，两者的频率越接近。

(2) 此时变幅杆的振幅较小，工具杆的前端振幅很大，而和变幅杆的连接处振幅很小，几乎为零。

综上所述，文献 [1] 中提出了“局部共振”现象。文献 [3] 和 [5] 从不同的侧面来分析并在一定程度上解释了“局部共振”现象，而文献 [4] 虽然已经提出了类似的论点，但算例不够充分，认为“局部共振”现象只是在工具杆一定长度和截面积下的特例，未能给出普遍规律。本文采用阻抗分析法比较了变幅杆和工具杆不

(下转第 7 页)

表 1 声像定位实验的统计结果

$\theta_s(^{\circ})$	0	15	30	45	60	75	90
A 组 $\theta_I$ 平均值 ( $^{\circ}$ )	0.0	17.4	30.0	48.0	66.6	—	—
均方差 $\sigma(^{\circ})$	0.0	1.8	3.1	4.5	5.0	—	—
B 组 $\theta_I$ 平均值 ( $^{\circ}$ )	0.0	16.0	29.0	43.6	57.6	69.6	79.2
均方差 $\sigma(^{\circ})$	0.0	2.0	3.1	4.2	4.9	3.6	5.1
C 组 $\theta_I$ 平均值 ( $^{\circ}$ )	0.0	13.6	30.4	43.0	47.6	56.8	57.2
均方差 $\sigma(^{\circ})$	0.0	2.6	2.9	4.5	4.9	4.7	5.9

倾听中不能定位,故没给出统计结果)。通过对比表 1 和前面图 3,可以看出,理论计算和实验结果基本符合。

对实验数据的更严格的分析可采用数理统计的方差分析方法<sup>[8]</sup>。每个 $\theta_s$ ,分别对三组倾听者求出 $|\theta_I - \theta_s|$ 的平均值,它表示(对每组倾听者)平均的声像位置畸变。利用实验数据,可以证明,在水平 0.05 下,对 $\theta_s = 0^{\circ}, 15^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}$ 的声像,三组倾听者的 $|\theta_I - \theta_s|$ 平均值在统计上无显著区别。但对侧向范围声像( $\theta_s = 60^{\circ}, 75^{\circ}, 90^{\circ}$ ),各组倾听者的 $|\theta_I - \theta_s|$ 平均值在统计上有显著差别,并以 B 组的为最小。

## 6 结论

理论和实验分析表明,用扬声器重发虚拟声时,重发效果和倾听者的头部尺寸有关。当实际倾听者的头部尺寸与虚拟声信号处理的头

部模型一致时,声像效果最为理想。当倾听者的头部尺寸与头部模型不相等时,前方范围内的声像位置畸变较小,但侧向的声像位置畸变较大。因而倾听者头部尺寸的不同是侧向的声像位置畸变的重要原因。这一点在多通路环绕声的虚拟重发等实际应用中应特别注意。

## 参 考 文 献

- 1 Bauck J, Cooper D H. *J.Audio.Eng.Soc.*, 1996, **44** (9): 683-705.
- 2 谢波荪. 电声技术, 2000, (2): 8-13.
- 3 Morse P M, Ingard K U 著, 吕如榆等译. 理论声学(中译本上册). 北京: 科学出版社, 1984. 392-404.
- 4 谢波荪. 同济大学学报, 1999, **27**(3): 361-365.
- 5 Blauert J. *Spatial Hearing*. Cambridge, MA: MIT Press, 1983.
- 6 管善群. 应用声学, 1995, **14**(6): 6-11.
- 7 Nelson P A, et al. *J.Audio.Eng.Soc.*, 1996, **44**(11): 990-1007.
- 8 庄楚强, 吴亚森. 应用数理统计基础. 广州: 华南理工大学出版社, 1992, 215-217.

(上接第 33 页)

同截面积比下的系统共振频率,对文献[1]中发现的现象作出了完满的解释,有助于解析超声加工系统“局部共振”的本质问题。

## 参 考 文 献

- 1 范国良, 应崇福, 林仲茂等. 应用声学, 1982, **1**(1): 2-7.

- 2 赵波等. 机械工艺师, 1998, (7).
- 3 汪承浩. 应用声学, 1982, **1**(4): 48.
- 4 周光平, 鲍善惠, 程存弟等. 应用声学, 1994, **13**(6): 39-42.
- 5 鲍善惠. 应用声学, 1998, **17**(4): 6-10.
- 6 左鹤声. 机械阻抗方法及应用. 北京: 机械工业出版社, 1987. 10.
- 7 季文美, 方同, 陈松淇. 机械振动. 北京: 科学出版社, 1985.