

# 声场重构的声辐射模态阶数分析

樊士贡<sup>†</sup> 姜哲

(江苏大学振动噪声研究所 镇江 212013)

**摘要** 利用声辐射模态法对椭球状声源辐射声场进行重构,分析了模态阶数对相对误差的影响,以及模态阶数与频率的关系;同时深入探讨了声源形状变化对模态阶数选取的影响。研究发现利用较少的模态阶数即可得到很好的重构效果,且声源形状的变化对重构所需模态阶数的影响较小,因此可将该方法用于任意形状声源的重构,体现了此方法在声场重构中的优越性。

**关键词** 声场重构, 相对误差, 模态阶数

**中图分类号:** TB532

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-310X(2012)06-0456-06

## Studies of the order of the acoustic radiation modes for sound field reconstruction

FAN Shigong JIANG Zhe

(Vibration and Noise Research Division, Jangsu University, Zhenjiang 212013)

**Abstract** The sound field from a spheroid object can be reconstructed by using acoustic radiation modes. The impact of modal order number on relative error and the relationship between the modal order number and frequency are analyzed in this paper. Meanwhile further discussion is made to the influence of change in the acoustic source shape on choice of modal order. Research result shows that we can get good reconstruction results by using a small number of modes, and that the change in the acoustic source shape has a little influence on the number of modes which are needed for reconstruction. Therefore, we can apply this method to the reconstruction of acoustic source of all shapes, which shows the superiority of this method in reconstruction of sound field.

**Key words** Sound field reconstruction, Relative error, Number of modes

## 1 引言

声场重构属于声辐射逆问题,它通过测量声场中若干点的信息来重构整个声场并可进行声源识

别,在工业生产和军事上有很高的应用价值,历来都是学者们研究的热点。上世纪80年代Williams<sup>[1-2]</sup>等提出近场声全息技术,通过近场测量含有倏逝波成分的声场信息,使源面场重建不受波长分辨率的

2012-05-09 收稿; 2012-07-25 定稿

作者简介:樊士贡(1983-),男,江苏连云港人,硕士研究生,研究方向:噪声与振动控制。

姜哲(1954-),男,教授,博士生导师。

<sup>†</sup>通讯作者:樊士贡, E-mail: fanshigong@126.com

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

限制, 但该法只限于对板状、柱状和球状声源的重构; Maynard<sup>[3]</sup>等的边界元法实现了对任意形状声源和声场的重构, 但其存在着奇异积分处理和解的非唯一性等问题; Wu<sup>[4-5]</sup>等的最小二乘法将声场表示为一组正交基函数系的线性叠加, 在最小二乘误差准则下由测量点上的声压数据计算出展开式中的待定系数, 进而确定声场中的声压和质点振速, 理论上可以分析任意形状声源的声辐射问题, 但其对长、宽、高相差很大的复杂声源重构效果较差, 应用受到限制。

文献[6]中采用声辐射模态法进行声场重构, 声辐射模态和声场分布模态不仅反映了振动声源的辐射性质和声场的分布模式, 具有鲜明的物理意义, 而且还包含了声源几何形状的影响。文献[7-8]中分别对板状、球状声源进行重构, 验证了方法的可行性, 但未对一般形状声源做深入讨论, 本文利用声辐射模态法就一般形状声源做一步研究, 并讨论了模态阶数与误差的关系以及形状的变化对重构效果的影响。

## 2 声场重构

### 2.1 声辐射模态与声场分布模态<sup>[9]</sup>

任意形状的振动表面  $S$  以圆频率  $\omega$  振动, 向无界空间辐射声场。在空间  $V$  中充满均匀介质, 介质的密度为  $\rho$ , 声速为  $c$ 。振动表面的辐射模态是辐射算子  $R_j$  的特征函数 (向量), 描述振动表面的辐射行为。通过数值计算将振动表面  $S$  划分成  $M$  个小单元  $S_i, i=1, 2, \dots, M$ , 则  $R_j$  的表示矩阵  $R$ , 矩阵  $R$  的元素为:

$$\text{当 } i \neq l \text{ 时: } R_{li} = \frac{(k^2 S_l)(k^2 S_i) \sin k r_{li}}{2\pi(k^2 S) k r_{li}}, \quad (1)$$

$$\text{当 } i = l \text{ 时: } R_{ii} = \frac{(k^2 S_i)^2}{2\pi(k^2 S)},$$

其中  $S_l$  和  $S_i$  分别为第  $l$  个单元和第  $i$  个单元的面积;  $S$  为振动表面的面积;  $k=\omega/c, \omega$  是给定的圆频率;  $r_{li}$  是单元  $S_l$  的中心点与单元  $S_i$  的中心点之间的距离。矩阵  $R$  是正的实对称矩阵。矩阵  $R$  的实特征向量为  $\varphi_i, i=1, 2, \dots, M$ 。将特征向量  $\varphi_i$  按对应的特征值从大到小进行排序, 并以下列方式正交:

$$\varphi_i^T A \varphi_l = \delta_{il} = \begin{cases} 1, i = l, \\ 0, i \neq l, \end{cases}$$

$l, i=1, 2, \dots, M$ , 其中  $A$  为对角矩阵, 对角线上的元素是  $S_l/S_l, i=1, 2, \dots, M$ 。特征向量  $\varphi_i$  描述了振动表面  $S$  的辐射行为, 称为第  $i$  阶辐射模态。所有特征向量  $\varphi_i$  构成  $M$  维向量空间的一组基向量。

振动表面辐射的声压  $P(Y, \omega), Y \in V$ , 可用 Helmholtz 单层势表示:

$$\frac{P(Y, \omega)}{\rho c} = \frac{jk}{2\pi} \iint_S V(X, \omega) G(X, Y, \omega) dS(X), \quad (2)$$

其中  $V(X, \omega)$  是定义在  $S$  上的复连续有界函数,  $V(X, \omega)$  可用辐射模态展开

$$V(X, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(\omega) \varphi_i(X), X \in S \quad (3)$$

$v_i(\omega)$  是复展开系数。将式(3)代入式(2)得到:

$$\frac{P(Y, \omega)}{\rho c} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(\omega) \frac{jk}{2\pi} \iint_S \varphi_i(X) G(X, Y, \omega) \times dS(X), Y \in V, \quad (4)$$

$$\text{令: } \psi_i(Y, \omega) = \frac{jk}{2\pi} \iint_S \varphi_i(X) G(X, Y, \omega) dS(X), \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, M, Y \in V$$

其中,  $\omega$  表示圆频率,  $j = \sqrt{-1}, k = \omega/c, r(X, Y)$  为  $S$  上点  $X$  与声场  $V$  中点  $Y$  之间的距离,

$$G(X, Y, \omega) = \frac{e^{-jkr(X, Y)}}{r(X, Y)}. \text{ 式(4)写成:}$$

$$\frac{P(Y, \omega)}{\rho c} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(\omega) \psi_i(Y, \omega), Y \in V. \quad (6)$$

函数  $\psi_i(Y, \omega)$  是一组相互独立的函数, 所有  $\psi_i(Y, \omega)$  构成辐射声场中的一组基函数, 声压  $P(Y, \omega)$  可利用  $\psi_i(Y, \omega)$  展开,  $\psi_i(Y, \omega)$  规定了声场的分布模式, 称为第  $i$  阶声场分布模态。

### 2.2 声场重构<sup>[6]</sup>

采用模态截断, 取模态展开数为  $MP$ , 则声场中声压可表示为

$$\frac{P(Y, \omega)}{\rho c} = \sum_{i=1}^{MP} v_i(\omega) \psi_i(Y, \omega), Y \in V, \text{ or } Y \in S, \quad (7)$$

其中  $v_i(\omega)$  是复展开系数。重构声场的关键是确定展开系数  $v_i(\omega), i=1, 2, \dots, MP$ 。围绕声源表面  $S$ , 在声场  $V$  中取  $N$  个测量点  $Y_l, l=1, 2, \dots, N (N \geq MP)$ , 每个点测量声压为  $P_l$ 。利用(7)式, 则有,

$$\frac{P_l}{\rho c} = \sum_{i=1}^{MP} v_i(\omega) \psi_i(Y_l, \omega), \quad l=1, 2, \dots, N \quad (8)$$

令  $\psi_{li} = \psi_i(Y_l, \omega)$

则式(8)可写成矩阵形式:  $P(\rho c) = \psi v$ , (9)

其中  $P(\rho c)$  为声压测量值构成的  $N$  维向量,  $v$  是由展开系数  $v_i(\omega)$  构成的  $MP$  维向量,  $\psi$  是  $N \times MP$  阶矩阵, 其中元素由式  $\psi_{li} = \psi_i(Y_l, \omega)$  确定. 求出矩阵  $\psi$  的伪逆, 获得展开系数  $v$ ,

$$v = \psi^+ P(\rho c). \quad (10)$$

将  $v$  代入式(7), 从而重构整个声场.

由(1)式可得声辐射模态与频率有关, 不同频率对应不同的声辐射模态, 在数值计算中针对不同的频率都要单独计算出与之相对应的声辐射模态, 不同频率之间的声辐射模态不能混用.

### 3 算例分析

振动表面  $S$  为满足方程  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$  的旋转

椭球面 (如图 1(a), 长轴为  $2a$ , 短轴为  $2b$ ), 向全空间辐射声波. 设声源表面  $S$  振速分布为  $U$ , 采用边界元方法, 利用软件 Sysnoise 中的直接边界元功能计算得到声场中的声压分布, 以此作为测量值, 与重构结果进行比较.

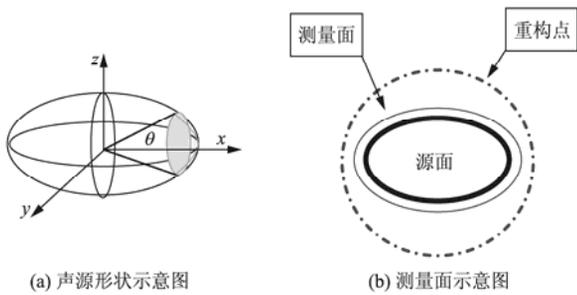
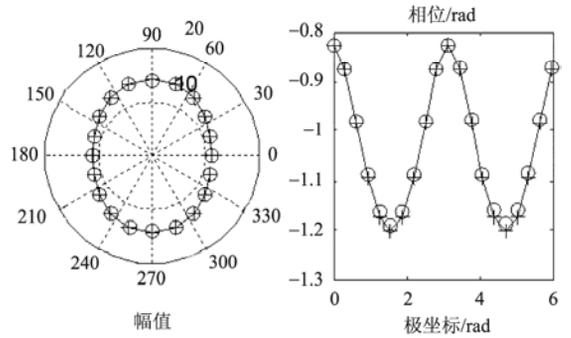
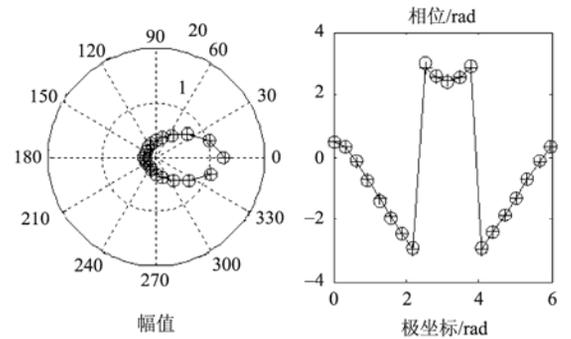


图1 源面与测量面示意图

取  $a = 0.5\text{m}$ ,  $b = 0.25\text{m}$  的长椭球, 声源表面  $S$  的法向振速为  $U = 0.1\text{m/s}$ , 振动频率  $200\text{Hz}$ . 在源面  $S$  外距离源面  $0.2\text{m}$  处布置测量面如图 1(b), 在测量面上取  $N = 10$  个测量点, 利用边界元法得到测量点声压  $P_l (l=1, 2, \dots, N)$ , 取模态数  $MP = 5$ , 由(10)式得到  $v$ , 将  $v$  代入(7)式, 重构声场. 源面  $S$  外, 在  $xOy$  平面上以原点为圆心, 半径为  $0.8\text{m}$  的圆上均匀取  $20$  个重构点, 频率  $f = 200\text{Hz}$  的重构声压值与理论声压值比较如图 2(a).



(a) 脉动椭球声场重构值与理论值比较图



(b) 振动椭球冠声场重构值与理论值比较图

“o”表示重构值, “+”表示理论计算值

图2 声场重构值与理论值的比较

同样取上述尺寸的长椭球为例, 在振动表面  $S$  一端取一椭球冠如图 1(a)阴影部分, 让其振动, 其余固定不动. 源面  $S$  的法向振速采用极坐标表示为  $U = \begin{cases} 0.1\text{ m/s}, & 0^\circ \leq \theta \leq 10^\circ \\ 0\text{ m/s}, & \text{其他} \end{cases}$ , 振动频率  $200\text{Hz}$ . 测量

面与重构点与图 1(b)相同, 在测量面上取  $N = 20$  个测量点, 取模态数  $MP = 10$ , 频率  $f = 200\text{Hz}$  的重构声压值与理论声压值比较如图 2(b).

从两幅图中可以发现重构值与理论值吻合的很好, 无论源面是均匀胀缩还是局部振动, 声辐射模态法都能很好地重构辐射声场.

### 4 模态阶数对重构的影响

模态展开数  $MP$  越大, (7)式表示的声场声压展开式越准确, 但是在进行声场重构时模态展开数越大计算越复杂, 并误差也越大. 因而选取最优的展开项数很大程度上影响着预测的精度. 在实际应用中模态阶数的选取没有相应规律可参考, 以下将采用模态阶数遍历选取的方法来讨论模态阶数对重构的影响.

选取测量面, 测量其声压值, 将模态阶数  $MP$  从零开始遍历, 对应每个  $MP$ , 根据(10)式得到相应系数  $\mathbf{v}_{MP}(\omega)$ , 根据每一个  $MP$  对应的系数  $\mathbf{v}_{MP}(\omega)$ , 重构出相应重构点的声压值  $P_{MP}^i (i=1,2, \dots, N)$ , 然后对应重构点测量这  $N$  个点声压值  $P_i^* (i=1,2, \dots, N)$ , 与重构值进行比较, 计算相对误差

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_i \frac{|P_{MP}^i - P_i^*|}{|P_i^*|}, \quad (11)$$

其中  $P_i^*$  为声场重构点的测量值,  $P_{MP}^i$  为声场重构点处的重构值,  $N$  为重构点数目。在理论上当  $\varepsilon$  最小时此时的模态阶数为最优。

### 4.1 相对误差与模态阶数的关系

仍以上述椭球面的两种振动形式为例, 各参数不变, 取振动频率 200 Hz, 相对误差随模态阶数变化如图 3。

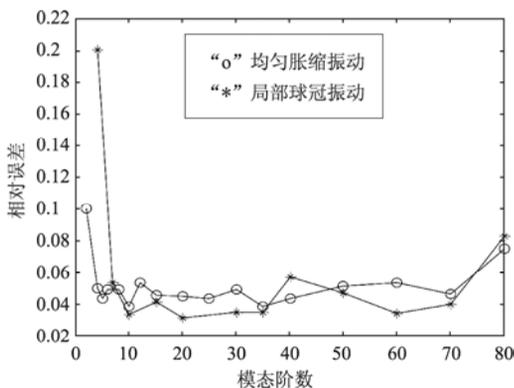


图 3 频率 200 Hz 相对误差随模态数变化图

观察得随模态阶数的增加相对误差先是降低, 当模态阶数增加到一定数量时误差又随之增大。因为当阶数过小时丢失了重要的声场信息, 所以误差较大, 当阶数增加时, 声场信息不断趋于完整误差随之降低, 但阶数过大又会使矩阵  $\psi$  的奇异性增强, 方程组(9)病态增加, 使误差增大。

### 4.2 模态阶数与频率的关系

取上述振动球冠为例, 参数不变, 应用遍历选取模态阶数计算的方法, 计算相对误差  $\varepsilon$ , 振动频率分别为 200 Hz, 400 Hz, 600 Hz, 800 Hz, 1000 Hz, 测量点和重构点的选取与图 1(b)相同。各频率下相对误差随模态数变化如图 4。由图 3 和图 4 可看出在每个频率下, 随模态数的增加相对误差先是降低, 然后升高, 在中间部分误差波动较小而且变化

稳定, 此区间内的每一个模态阶数的重构效果都很好。因此定义此区域为“稳定区域”。如图 3 球冠以 200 Hz 振动时的相对误差变化图, 从 10 阶到 40 阶误差较小, 变化相对稳定。相应在每个频率下都可以得到相应的“稳定区域”。

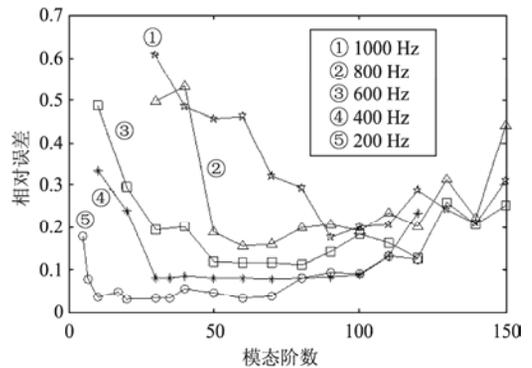


图 4 各个频率相对误差随模态数变化图

对于实际的工程应用, 在保证重构精度要求的条件下, 选择一个最少的模态阶数  $MP$ , 可使重构计算最为简便。模态阶数越少, 计算工作量就越少。

表 1 的第一和第二两行给出了此时不同频率下模态阶数  $MP$  选取的参考值。

在同类的重构方法中, 近场声全息法<sup>[1-2]</sup>和边界元法<sup>[10-11]</sup>对板状、球状声源进行重构时, 都必须在测量面上获得多达 800 至 1000 个点的声压信息才能获得理想的重构效果, 这样必然带来矩阵的巨大奇异性, 计算过程中必须采用正则化的处理方法, 并且计算量也非常大。与上述两种方法相比, 利用声辐射模态法仅需要几十阶模态与相应的几十个测量点即可得到很好的重构效果。由于模态展开数  $MP$  较小, 所以矩阵  $\psi$  的奇异性很小, 甚至不需采用正则化方法, 使计算量大为减少, 便于应用。

在文中近场声全息法和边界元法仅用来与声辐射模态法进行对比, 不是本文的研究方法, 故在文中不给出这两种方法的仿真算例。

## 5 声源形状与模态阶数的关系

以球谐函数展开的最小二乘法<sup>[4-5]</sup>理论上可用于任意声源重建, 但对于细长结构展开项数过大, 重构精度不高。在上面的例子中椭球长轴与短轴之比  $a/b=2$ , 长、宽、高尺寸相差不大, 下面探讨当

增大比值  $a/b$  时, 椭球形状对重构的影响。取  $a=0.5\text{m}$ , 比值  $a/b$  分别取 5 和 8, 椭球面上各有一块球冠让其振动, 法向振速分布均为  $U = \begin{cases} 0.1 \text{ m/s}, & 0^\circ \leq \theta \leq 10^\circ \\ 0 \text{ m/s}, & \text{其他} \end{cases}$ 。

表 1 不同形状椭球面与选取模态阶数的关系

频率/Hz	100	200	400	600	700	800	1000	
阶数	$a/b=2$	10	10	30	50	60	60	90
$MP$	$a/b=5$	12	15	35	60	65	80	100
	$a/b=8$	10	15	30	50	65	80	100

当振动频率为 200 Hz 时, 图 5 为  $a/b=5$  时, 取 15 阶模态声场重构值与测量值的比较图, 图 6 为  $a/b=8$  时, 取 15 阶模态声场重构值与测量值的比较图, 表 1 为取不同比值  $a/b$  时, 频率和选取的模态阶数的变化关系。

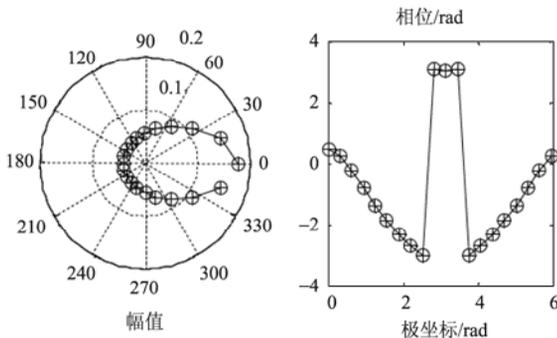


图 5  $a/b=5$  时声场重构值与测量值的比较

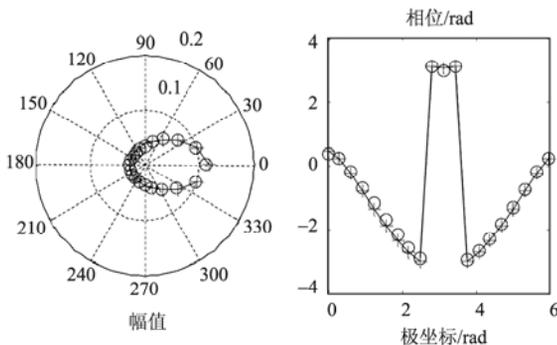


图 6  $a/b=8$  时声场重构值与测量值的比较

随着椭球形状的改变, 在保证重构的精度下所需要的模态阶数却没有随形状的复杂化而剧烈增加, 如表 1 所示。这是因为声辐射模态和声场分布模态本身就包含了声源形状这一要素, 使重构效果不受形状的影响, 充分体现了模态重构法的优越性。

声源形状对模态阶数  $MP$  的选取影响比较小, 使得基于声辐射模态的重构方法可以广泛地应用于各种复杂形状声源的声场重构。

上述研究体现了声辐射模态法具有不受声源形状影响且使用模态阶数较少和计算效率高等优点。但同时此方法也存在着明显的局限性, 即对声源进行重构时需要预先知道声源的形状, 然后计算得到声辐射模态, 从而进行重构; 如果声源形状未知则无法进行重构计算。

## 6 结束语

通过对声场重构中模态阶数的分析发现, 同一个频率下当模态阶数增加时相对误差随之降低, 随频率的增大所需模态阶数也成增加趋势, 但增加的相对数量较少, 计算相对高效。声源形状的变化对模态阶数的选取影响较小, 且采用较少的阶数即可得到很好的重构效果, 因为声辐射模态和声场分布模态本身就包含了声源实际形状的影响, 而且展开式是包含形状的多极子展开, 计算的收敛速度很快。Wu 等以球谐函数展开的最小二乘法虽然也是包含形状的多极子展开, 但球谐函数仅包含球的形状因素, 对复杂形状声源重构展开项数过大, 精度受到影响。相比之下更体现了声辐射模态方法的优越性。通过对该方法的深入研究, 可将其推广到任意形状声源重建。

## 参考文献

- [1] MAYNARD J D, WILLIAMS E G, LEE Y. Near-field acoustic Holography: I Theory of holography and development of NAH[J]. J. Acoust. Soc. Am, 1985, 78(4): 1395-1413.
- [2] VERONESI W A, MAYNARD J D. Near field acoustic holography(NAH): II Holographic reconstruction algorithms and computer implementation[J]. J. Acoust. Soc. Am, 1987, 8(15): 1307-1322.
- [3] VERONESI W A, MAYNARD J D. Digital holographic reconstruction of source with Arbitrarily shaped surfaces[J]. J. Acoust. Soc. Am, 1989, 85(2): 588-598.
- [4] WANG Z, WU S F. Helmholtz equation Leastsquare(HELs) method for reconstruction the acoustic pressure field[J]. J. Acoust. Soc. Am, 1997, 102(5): 2020-2032.
- [5] WU S F. On reconstruction of acoustic fields by using HELs method[J]. J. Acoust. Soc. Am, 2000, 107(6): 2511-2522.
- [6] 姜哲. 声辐射问题中模态分析 III. 声场重构[J]. 声学学报, 2005,

- 30(3): 242-248.
- [7] 吴建涛, 姜哲. 利用声辐射模态对声场进行重构[J].应用声学, 2007, 26(1):29-34.
- [8] 杨东升. 声辐射模态在声场重构中的应用[J].振动与噪声控制, 2009, 26(2):29-34.
- [9] 姜哲. 声辐射问题中模态分析 I. 理论[J]. 声学学报, 2004, 29(6): 507-515.
- [10] BAI M R. Application of BEM (boundary element method) -based acoustic holography to radiation analysis of sound source with arbitrarily shaped geometries[J]. J. Acoust. Soc. Am, 1992, 92 :53-549.
- [11] SCHUHMACHER A, Hald J, RASMUSSEN K B , et al.Sound source reconstruction using boundary element method calculations[J]. J. Acoust.Soc.Am, 2004, 113: 114-127.

## 2012 年 IEEE 国际超声会议在德国德累斯顿召开

2012 年 10 月 6 日至 10 日, 由 IEEE 超声、铁电和频率控制学会 (IEEE Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control Society) 主办的 2012 IEEE 国际超声大会 (2012 IEEE International Ultrasonics Symposium) 在德国德累斯顿 (Dresden) 市召开。IEEE 国际超声会议是国际超声界水平最高的学术会议之一, 每年举办一次, 每次参会人数有 1000 余人。会议论文收录于 IEEE Xplore 数据库 (EI 和 ISTP 索引), 并可进一步发表在 Transactions on UFFC 杂志 (SCI 索引) 上。

本次会议共收到论文 1180 篇, 比去年增加了 33%, 会议最后录用论文 863 篇。这次会议共有 40 多个国家和地区的代表参加了会议, 会议分为五个主题: 医学超声 (Medical Ultrasonics)、传感器与无损检测及其工业应用 (Sensors, NDE, and Industrial Application)、物理声学 (Physical Acoustics)、微声学-声表面波/薄膜体声波/声学微机电系统 (Microacoustics - SAW, FBAW, MEMS)、换能器与换能器材料 (Transducers and Transducer Materials)。

会议开幕式于 10 月 8 日上午进行, 德国科学家 Wolfgang Ahnert 做了题为 ‘Structure highlights in Dresden and their room acoustic specialties’ 的大会开题报告, 之后在 6 个分会场进行口头 (Oral) 学术报告, 中途还穿插进行论文墙报 (Poster)。IEEE 超声大会的亮点之一是学生论文竞赛, 竞赛以墙报形式进行, 会务组负责从中选拔出优胜者。本次会议的学生论文竞赛在会议首日进行, 共选拔出 7 篇获奖论文, 其中医学超声组 3 篇、其它四个主题各 1 篇。此外, IEEE 超声大会为广大青年学生提供了很好的学习机会, 会

务组每年为学生提供会议资助的机会, 旨在鼓励青年学生积极参加世界范围内的学术交流大会。

本次会议的另一亮点是在会议过程中穿插了 21 个邀请报告, 其中 18 个包含在本次会议的五个主题内, 另外有 3 个关于临床医学超声方面的邀请报告, 邀请报告都是由国际知名专家学者报道各自的最新研究进展和成果, 参会代表可根据自己的兴趣进行学习和交流。

这次 Dresden 会议在宽广的超声学领域里为科学家提供了一个提出、交流、和讨论科研成果的机会, 会议涉及到的超声领域非常广泛, 包括医学超声、物理声学、无损检测、微声学、传感器、新材料、功能材料等, 与会者能够对超声领域中出现的新概念、机遇和挑战、科研新成果等进行相互交流和切磋。

本次参会的中国代表分别来自中国科学院声学研究所、北京交通大学、上海交通大学、重庆大学、宁波大学等十多所科研机构及大学, 他们在会议上与外国专家进行了深入的学术讨论和交流, 表现非常活跃, 得到了国外专家的广泛关注。

IEEE 超声会议是全世界范围内的大会, 每年都有几十个国家和地区的代表参加。无论你来自哪个国家、无论你是男女老少、也无论你是全球闻名的大科学家还是刚步入超声学的学生, 大家都能平等地进行学术交流、讨论和学习。

(中国科学院声学研究所 张碧星)