维普资讯 http://www.cqvip.com

结构振动模态声辐射理论及试验研究

仪垂杰　　夏　虹　　姜兴序
（山东农机学院）　　（吉林工学院）

1989年9月13日收到

从结构振动声辐射的一般规律、自由声场的声功率辐射理论和结构振动模态原理入手，对结构振动模态的声辐射与外加激励、模态参数之间的关系进行了理论推导和研究，得到，当激振点不变，振动模态辐射的平均声压级的变化量与激振力级的变化量之比为1；若激振力不变，任意两点处激振振动模态辐射的平均声压级的变化量与相应点振型元素级的变化量之比为1。对以上结果试验验证表明：理论值与实测值基本相符。

一、前　言

近年来国内外不少学者利用声辐射效率法、统计能量法、声强分析法、声全息技术和模态分析等方法，对声振之间的关系进行了卓有成效的研究[1-6]。但对于多个箱体组成的机械结构声振方面的研究，特别是振动模态的声辐射与外加激励、模态参数间定量的理论分析仍未见到。

本文根据机械结构声辐射理论、自由声场中声功率的辐射和模态分析原理，对机械结构振动模态的声辐射展开了理论推导和研究。得到了振动模态辐射的平均声压级与外加激励、振型元素间的关系表达式。为此，进行了试验验证，理论值与实测值较好地吻合。文中提出的降低模态声辐射的有效途径，对机械结构振动声辐射的研究、控制具有一定的意义。

二、基本理论

1. 结构声辐射理论

对于一般机械结构，其声振特性的物理量能够用结构辐射的声功率 W_{rad} 来表征，其定义为[7]：

$$W_{rad} = \rho_0 \cdot c \cdot s \cdot \langle \overline{V}^2 \rangle \sigma_{rad} \qquad (1)$$

式中，W_{rad} 为辐射声功率，W；ρ_0 为空气密度，kg/m^3；C 为声速，m/sec；S 为结构的表面积，m^2；σ_{rad} 为声辐射率，无量纲；$\langle \overline{V}^2 \rangle$ 为辐射面法向振动速度的时空均方值，m^2/sec^2。

在绝大多数实际情况下，σ_{rad} 是一个随频率而变化的不确定的量[6]，所以方程(1)不能够有效地解决实际问题。

2. 振动模态的基本原理

一个 n 自由度的线性定常系统，可以有效地用如下的模态方程来描述，

$$[M]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = [\Psi]\{F\} \qquad (2)$$

其中，$[M]$ 为 n 阶质量对角矩阵；$[c]$ 为 n 阶阻尼对角矩阵；$[K]$ 为 n 阶刚度对角矩阵；$\{F\}$ 为激振力列向量；$\{q\}$ 为模态座标列向量，且，$\{q\} = [\Psi]^{-1}\{X\}$；$\{X\}$ 物理座标列向量；$[\Psi]$ 为振型矩阵，$[\Psi] = [\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \cdots\cdots, \{\phi\}_n]$

$$= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots\cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots\cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots\cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

若系统在 v 点受 $F_v(\omega)e^{i\omega t}$ 简谐激振力，则方程(2)中的第 j 个方程可以表示为：

$$m_j\ddot{q}_j + c_j\dot{q}_j + k_j q = \phi_{vj}F_v e^{i\omega t} \qquad (3)$$

而 ε 点的速度频响函数为：

$$H_{\varepsilon v}^{V}(\omega) = \sum_{j=1}^{n} i\omega \phi_{\varepsilon j}\phi_{vj}/k_j$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$\cdot\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2+2i\xi_j\frac{\omega}{\omega_j}\right] \quad (4)$$

式中，k_i、ξ_i 分别为 i 阶模态刚度和阻尼比。对于小阻尼且模态不很密集的机械系统，当激振频率与某阶固有频率 ω_j 重合时，该阶模态导纳便起主导作用[8]。

3. 自由声场中的声功率[9]

在远场，点源以球面波向外辐射的声功率为：

$$W=4\pi r^2\bar{p}^2/\rho_0 c \quad (5)$$

其中，r 为球包容面半径；$\bar{p}^2$ 为方均声压，且 $\bar{p}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i^2$，$n$ 为测点数，p_i 为 i 点处的声压。

三、理论推导

1.我们知道，当结构的模态不很密积，而且相应的模态阻尼比也很小，则可以认为高阶模态对一定频率范围内的振动模态的影响不大。这样，当 ν 点有激振力 $F_\nu(\omega_j)e^{i\omega t}$ 时，结构上 ε 点的速度响应可表为：

$$V_\varepsilon(\omega_j)=H_{\varepsilon\nu}^{\nu}(\omega_j)F_\nu(\omega_j) \quad (6)$$

式中，$H_{\varepsilon\nu}^{\nu}(\omega_j)$ 是激振点 ν 和响应点 ε 间的速度导纳函数在 ω_j 处的值。将(4)式代入(6)式，则 j 阶模态的速度响应为：

$$V_\varepsilon(\omega_j)=\omega_j\phi_{\varepsilon j}\phi_{\nu j}F_\nu(\omega_j)/2k_j\xi_j, \quad (7)$$

对辐射面 S 和时间作平均后有：

$$\langle\overline{V^2(\omega_j)}\rangle_{s,t}=\frac{1}{s}\iint_s\langle\overline{V^2(\omega_j)}\rangle_{\varepsilon,t}\cdot ds$$

$$=\frac{1}{4\cdot s}[\phi_{\nu j}^2F_\nu^2(\omega_j)/m_jk_j\xi_j^2]\iint_s\phi_{\varepsilon j}^2ds \quad (8)$$

(8)式中已考虑到 $\omega_j^2=k_j/m_j$，m_j 为结构的 j 阶模态质量；$\phi_{\varepsilon j}$ 为激振点处 j 阶模态的振型元素，它是关于位置的函数。

将(8)式代入(1)式，则 j 阶振动模态辐射的声功率为：

$$W_j=\frac{1}{4}\rho_0\cdot c\cdot\sigma_{rad}(\omega_j)[\phi_{\nu j}^2F_\nu^2(\omega_j)]$$

$$\cdot\iint_s\phi_{\varepsilon j}^2ds/m_jk_j\xi_j^2 \quad (9)$$

显然，振动模态辐射的声功率与激振点的振型元素平方 $\phi_{\nu j}^2$、激振力幅值的平方 $|F_\nu(\omega_j)|^2$ 成正比；与模态质量 m_j、刚度 k_j 和阻尼比的平方 ξ_j^2 成反比。若调整以上模态参数和外加激励，都会改变振动模态声功率的辐射量。

2.为了找出模态声辐射与外加激励和模态振型间更简明的关系，故做进一步的研究推导。

根据(5)式可测量、计算出系统 j 阶振动模态辐射的声功率，

$$W_j=4\pi r^2\bar{p}_j^2/\rho_0\cdot c \quad (10)$$

联立(9)和(10)两式，得 j 阶模态辐射的方均声压，

$$\bar{p}_j^2=\rho_0^2\cdot c^2\sigma_{rad}(\omega_j)[\phi_{\nu j}^2F_\nu^2(\omega_j)]$$

$$\cdot\iint_s\phi_{\varepsilon j}^2ds/16\pi r^2m_jk_j\xi_j^2 \quad (11)$$

令，

$$A^2=\rho_0^2c^2\sigma_{rad}(\omega_j)\iint_s\phi_{\varepsilon j}^2ds/16\pi r^2m_jk_j\xi_j^2,$$

则有：

$$\bar{p}_j=A|\phi_{\nu j}||F_\nu(\omega_j)| \quad (12)$$

式中 A 为常数，该式表明，振动模态辐射的平均声压正比于激振点处振幅的绝对值与激振力幅值的乘积，若其中之一为零，则该阶模态的声压辐射为零，激振点位于节点处或消除振源就是这种情况。

为了测试方便，根据声级定义，(12)式两端取对数用级表示，则有，

$$\bar{L}_{p_j}=L_{\phi_{\nu j}}+L_{F_\nu}+L_{A'} \quad (13)$$

式中，

$$\bar{L}_{p_j}=20\lg(\bar{p}_j/p_{ref});\ L_{\phi_{\nu j}}=20\lg(|\phi_{\nu j}|/\phi_{ref});$$

$$L_{F_\nu}=20\lg(|F_\nu|/F_{ref});$$

$$L_{A'}=20\lg A+20\lg F_{ref}+20\lg\phi_{ref}-20\lg p_{ref}$$

p_{ref}、ϕ_{ref} 和 F_{ref} 分别为声压、振型和激振力的参考值，均为常数，则(13)式中的 $L_{A'}$ 为常数。

(13)式中的三个变量若固定其中的一个，则其余两个变量的变化量有如下关系，

$$\Delta\bar{L}_{p_j}=\Delta L_{F_\nu}|_{L_{\phi_{\nu j}}=常数} \quad (14)$$

$$\Delta\bar{L}_{p_\cdot}=\Delta L_{\phi_{\nu j}}|_{L_{F_\nu}=常数} \quad (15)$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

或者是，

$$\left.\frac{\Delta\bar{L}_{pj}}{\Delta L_{F_y}}\right|_{L_{\phi_{vj}}=常数}=1\qquad\left.\frac{\Delta\bar{L}_{pj}}{\Delta L_{\phi_{vj}}}\right|_{L_{FV}=常数}=1\quad(16)$$

(14)式中的 ΔL_{F_y} 为激振力级的变化量，$\Delta\bar{L}_{pj}$ 是与 ΔL_{F_y} 相对应的 j 阶模态辐射的平均声压级的变化量，(15)式中，$\Delta L_{\phi_{vj}}$ 为结构上任意两点处 j 阶振型元素级差；$\Delta\bar{L}_{pj}$ 为以这任意两点激振时，结构 j 阶模态辐射的平均声压级差。

从(14)和(15)两式可知，固定激振点，即 $L_{\phi_{vj}}$ 不变，振动模态辐射的平均声压级的变化量与激振力级的变化量之比为1；如果激振力级 L_{F_y} 的大小不变，则任意两不同激振点激振振动模态辐射的平均声压级的变化量与相应点处振型级的变化量之比为1。

四、试验验证

试验在消声室中进行。激振器和功率放大器均用铅皮包扎，分别以模态共振频率 $\omega_j(j=1,2,\cdots,10)$ 激振，测量球包容面上各测点的声压级。

1. 试验装置

(1) 扫描正弦激振系统　如图1所示，1.

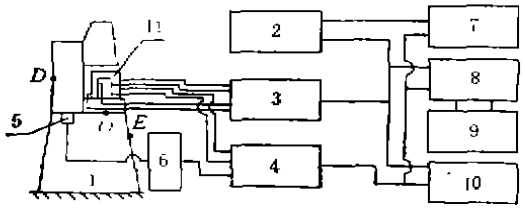

图1　扫描正弦信号激振系统

试件（YZ-530 型床，四部分箱体形部件组成，外形见图5、6）；2.SF-2 扫描正弦信号发生器；3.FP-2 功率放大器；4.TD-15100 精密积分器；5.YD-12 加速度传感器；6.B&K2635 电荷放大器；7.MO-1251 示波器；8.ZDT-1 矢量电压表；9.B&K X-Y 记录仪；10.TEAC-R81 磁带机；11.DJ-20 电磁激振器；O、D、E 分别作为激振点；O 点激振测取 D、E 两点的振型元素值级。

(2) 结构振动模态辐射声压级测试系统

如图2所示，1. 消声室；2. 声源(YZ-530 型床)；3. 激振测试设备；4. 测量包容面及测点分布$i(i=1,2,3,4,5)$；5. 传声器(传声器以其法线方向对准声源)。

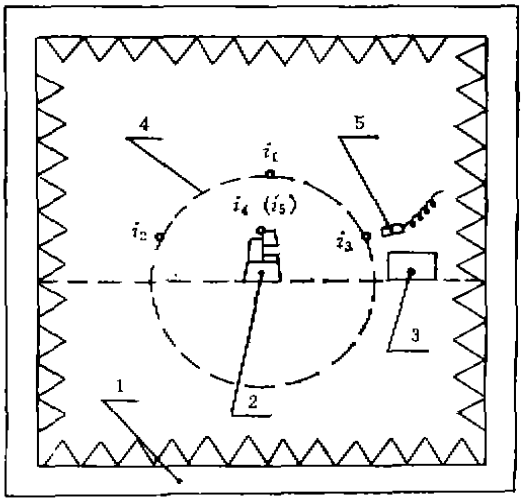

图2　结构振动模态辐射声压级测试系统

2. 测试结果分析及数据处理

(1) 根据结果(14)，固定在图1中的 O 点激振，即 $L_{\phi_{vj}}$ 不变。分别以 $F_1=5kg$ 和 $F_2=20kg$ 的力激振，则 $\Delta L_{F_y}=L_{F_2}-L_{F_1}=12dB$，测前十阶振动模态频率下，结构辐射的平均声压级 $\bar{L}_{p_{1j}}$，$\bar{L}_{p_{2j}}$，求 $\Delta\bar{L}_{pj}=\bar{L}_{p_{2j}}-\bar{L}_{p_{1j}}$ $(j=1,2,\cdots,10)$，结果见表1和图3，前十阶模态 $\Delta\bar{L}_{pj}/\Delta L_{F_y}$ 理论值与实测值的比较情况。

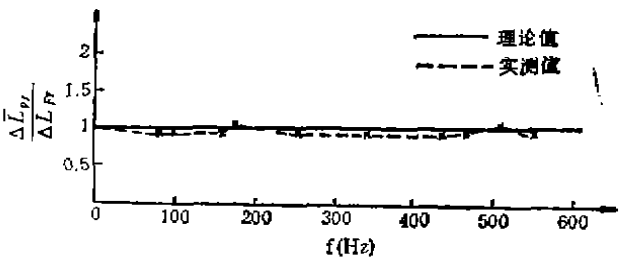

图3　$\frac{\Delta\bar{L}_{pj}}{\Delta L_{F_y}}$ 理论值与实测值比较图

(2) 从(15)式可知，若激振力级 L_{F_y} 为常

维普资讯 http://www.cqvip.com

表 1　固定激振点，$\Delta\bar{L}_{Pi}$ 与 ΔL_{F_0} 测试计算结果

模态	频率 (Hz)	L_{Pij} (dB)	测点 1	2	3	4	5	$\bar{L}_{Pij}$ (dB)	$\bar{L}_{P2j}-\bar{L}_{P1j}$ (dB)	$L_{F_2}-L_{F_1}$ (dB)	$\frac{\bar{L}_{P2j}-\bar{L}_{P1j}}{L_{F_2}-L_{F_1}}$
1	79	L_{P11}	79.0	78.5	80.0	81.0	79.0	79.6	11.4	12	0.95
		L_{P21}	90.0	91.5	89.0	91.0	92.6	91.0			
2	98	L_{P12}	78.0	76.0	78.6	79.0	76.7	77.8	11.7	12	0.98
		L_{P22}	88.0	89.2	90.0	91.0	88.7	89.5			
3	159	L_{P13}	75.0	77.0	78.5	75.5	75.5	76.5	11.5	12	0.96
		L_{P23}	87.5	86.0	89.5	90.0	84.8	88.0			
4	174	L_{P14}	76.5	78.0	79.5	75.0	74.5	77.1	12.3	12	1.03
		L_{P24}	88.5	88.0	89.5	86.0	92.4	89.4			
5	253	L_{P15}	74.0	73.5	77.0	76.5	76.4	75.7	11.8	12	0.98
		L_{P25}	89.0	88.5	86.0	83.5	88.4	87.5			
6	343	L_{P16}	75.0	72.5	71.0	74.0	74.1	73.5	11.5	12	0.96
		L_{P26}	83.5	82.0	81.0	87.0	84.2	84.1			
7	437	L_{P17}	76.0	75.5	74.1	71.0	75.8	74.8	11.2	12	0.93
		L_{P27}	84.5	83.0	87.2	87.4	86.5	86.0			
8	472	L_{P18}	75.0	74.5	71.3	72.0	74.0	73.6	11.9	12	0.99
		L_{P28}	87.0	86.5	82.0	83.0	86.5	85.5			
9	512	L_{P19}	77.0	76.5	72.0	71.0	82.0	77.2	12.4	12	1.03
		L_{P29}	87.5	89.0	90.0	91.0	87.7	89.6			
10	553	L_{P110}	79.0	79.5	88.0	82.1	77.6	80.7	11.3	12	0.94
		L_{P210}	90.5	89.3	88.4	94.0	94.4	92.0			

$i=1,2$; $j=1,2,3,\cdots,10$.

注：i：表示两种不同的激振力 $F_i(F_1=5\text{kg};\ F_2=20\text{kg})$

j：表示振动模态序号

值，当 O 点激振，图 1 结构上任意两点 D、E 振型元素值级差，$\Delta L_{V_j}=L_{VD_j}-L_{VE_j}$ 与相应模态下，以这两点激振所得平均声压级差 $\Delta\bar{L}_{p_j}=\bar{L}_{pD_j}-\bar{L}_{pE_j}$ 之比为 1。L_{VD_j} 和 L_{VE_j} 是通过测量 D、E 两点的加速度信号，由 B&K2635 电荷放大器积分两次得到的。结果见表 2 和图 4。从图 4 可以看出，前十阶模态理论值与实测值和最大误差是 0.29，实测值与理论计算基本相符。

(3) 图 5、6 是试件的四阶、六阶振型，可见，四阶振型值远大于六阶；四阶模态辐射的平均声压级也高于六阶。

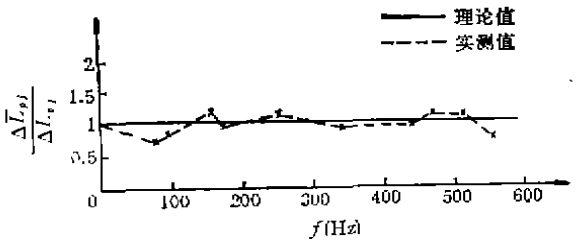

图 4　$\frac{\Delta\bar{L}_{pj}}{\Delta L_{Vj}}$ 理论值与实测值比较图

五、结　论

1. 从结果(9)可知，增大 m_j、k_j、ξ_j 或者是减

维普资讯 http://www.cqvip.com

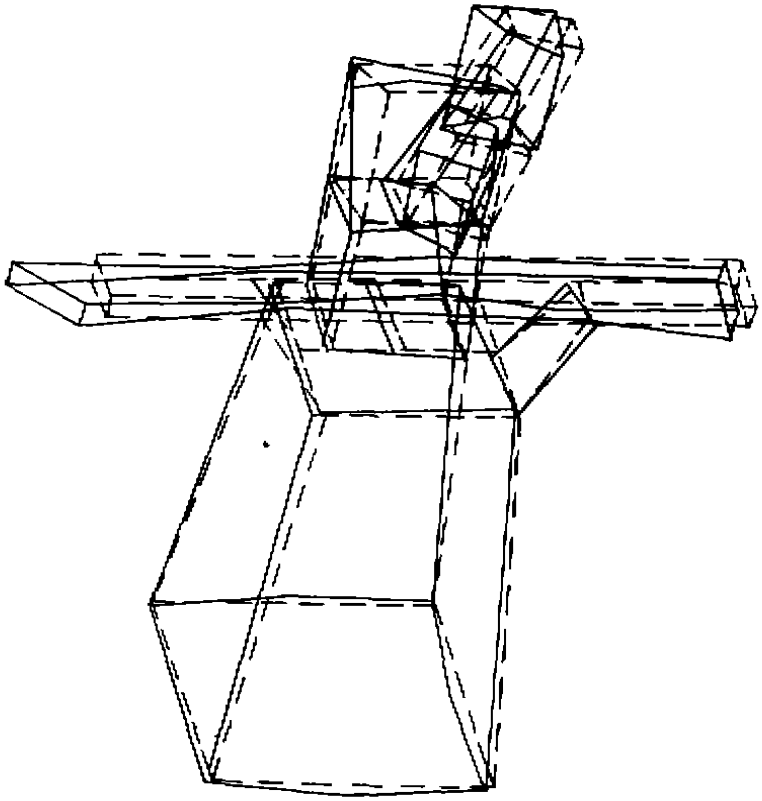

图 5　四阶振型及辐射平均声压级

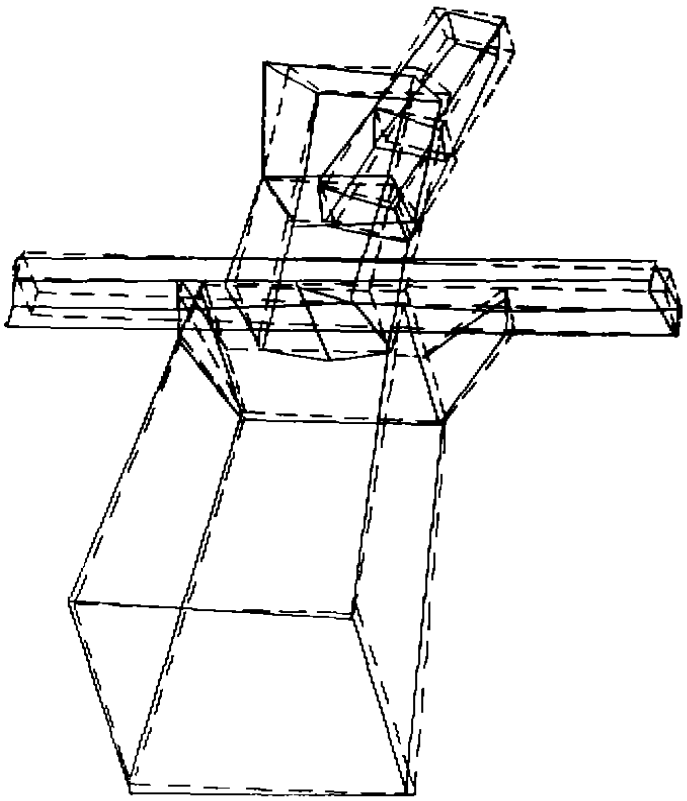

图 6　六阶振型及辐射平均声压级

维普资讯 http://www.cqvip.com

表 2　固定激振力，$\Delta\bar{L}_{pj}$ 与 ΔL_{vj} 测试计算结果

模态	频率 (Hz)	L_{PDj} L_{PEj} (dB)	测点 1	2	3	4	5	L_{PDj} L_{PEj} (dB)	$L_{PDj}-L_{PEj}$ (dB)	L_{VDj} (dB)	L_{VEj} (dB)	$L_{VDj}-L_{VEj}$ (dB)	$\frac{L_{PDj}-L_{PEj}}{L_{VDj}-L_{VEj}}$
1	79	L_{PD1}	79.2	80.0	81.5	81.9	83.3	81.5	1.2	103.2	101.5	1.7	0.71
		L_{PE1}	81.3	83.1	78.2	79.5	76.1	80.3					
2	98	L_{PD2}	78.3	81.2	80.8	77.3	77.9	79.4	−2.1	97.6	100.1	−2.5	0.84
		L_{PE2}	81.1	79.8	80.5	82.5	82.8	81.5					
3	159	L_{PD3}	79.5	83.6	84.2	79.5	86.2	83.4	2.8	99.3	96.8	2.5	1.12
		L_{PE3}	80.2	82.5	78.3	79.2	81.5	80.6					
4	174	L_{PD4}	79.2	76.4	80.1	76.5	76.2	78.0	−3.2	95.5	98.5	−3.3	0.97
		L_{PE4}	79.5	80.3	79.7	82.3	83.0	81.2					
5	253	L_{PD5}	83.9	79.8	85.7	83.2	87.4	84.7	1.6	99.7	98.2	1.5	1.07
		L_{PE5}	80.2	84.2	79.5	86.1	82.0	83.1					
6	343	L_{PD6}	79.2	76.5	77.2	74.1	81.2	78.3	−2.2	100.7	103.1	−2.4	0.92
		L_{PE6}	81.3	78.4	79.3	80.0	82.3	80.5					
7	437	L_{PD7}	84.6	88.1	81.3	82.5	87.9	85.7	2.5	111.6	109.0	2.6	0.96
		L_{PE7}	81.6	82.7	78.4	84.0	85.9	83.2					
8	472	L_{PD8}	79.2	78.3	82.5	78.5	82.7	80.7	2.2	109.7	107.6	2.1	1.05
		L_{PE8}	76.2	79.7	80.1	79.2	75.3	78.5					
9	512	L_{PD9}	84.7	83.6	85.9	87.0	88.2	86.2	2.4	112.7	110.4	2.3	1.04
		L_{PE9}	82.6	80.4	84.7	82.7	86.1	83.8					
10	553	L_{PD10}	89.5	87.8	86.9	90.1	84.8	88.1	0.3	114.2	113.8	0.4	0.75
		L_{PE10}	88.6	87.5	84.3	85.7	90.3	87.8					

$j = 1, 2, 3, \cdots, 10$

注：j：表示振动模态序号

D、E 分别为激振点和测量点

小$|F_v(\omega_j)|$，都能够降低结构振动模态声功率辐射。若能将激振点的位置选在某阶振型的节点处，即使 $\phi_{vj} = 0$，这时激振力激发不出该阶模态的振动，则该阶模态声功率的辐射为零。同理，若能够查找、消除振源也能达到同样的效果。显然，这是降低振动模态声辐射的极有效方法。

2. 单点激振且激振点的位置固定，振动模态辐射的平均声压级的变化量与激振力级的变化量之比为 1，即振动模态辐射的平均声压级的变化量随激振力级的变化量呈正 1 的速率增加。可以调整 L_{F_v} 来改变 $\bar{L}_{pj}$。

3. 激振力级的大小不变时，任意两激振点激振，振动模态辐射的平均声压级的变化量与相应模态下其振型元素值级的变化量之比值为常数 1。即 $\Delta\bar{L}_{pj}$ 随 ΔL_{vj} 呈正速率 1 增加。调整或改变 $L_{\phi_{vj}}$ 可使 $\bar{L}_{pj}$ 改变。

模态 4；频率 174 (Hz)；$F_1 = 5$kg 时，$\bar{L}_{p14} = 77.1$dB；$F_2 = 20$kg 时，$\bar{L}_{p14} = 89.4$dB；图中虚线为试件原轮廓线；实线为振型轮廓线。

模态 6；频率 343 (Hz)；$F_1 = 5$kg 时，$\bar{L}_{p16} = 73.5$dB；$F_2 = 20$kg 时，$\bar{L}_{p16} = 84.1$dB；图中虚线为试件原轮廓线；实线为振型轮廓线。

（下转 42 页）

维普资讯 http://www.cqvip.com

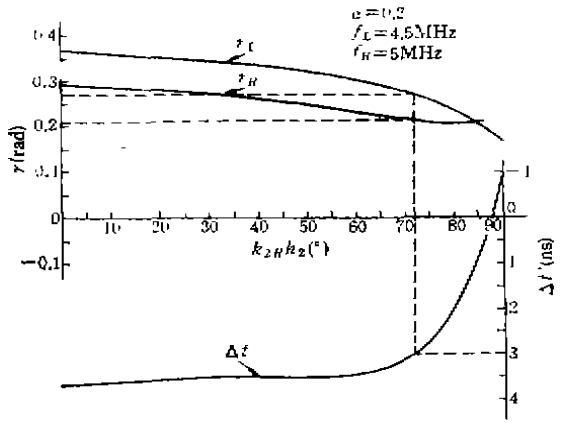

图 2 低碳钢中纵波声速修正曲线
$\alpha = 1.0'$, $f_L = 0.9f_H$, $f_H = 5.0$MHz

7.85,0.97,1.14,7.84,11.00;纵波声速(m/s)为594, 1470,2270,4214,2700; 样品中声波衰减系数 $\beta = 101$/m; 厚度 $h_1(m)$ 分别取 2.32×10^{-2}, $h_2 2 \times 10^{-4}$, 4×10^{-4}, 10^{-2}, 取活塞半径 $a = 8 \times 10^{-3}$m, $x_b/h_0 = 5$, 回波数 $m = 3$, $n = 1$, $\alpha = 1'$, $f_H = 5$MHz, $f_L = 0.9f_H$ 代入有关公式计算 γ_H, γ_L, Δt 随 $k_{2H}h_2$ 变化的数值,对应的曲线示于图 2。 例如,在上述条件下将实测 $T(f_L)$, $T(f_H)$ 值代入(10)式得 $\Delta t = 3$ns, 由图 2 中曲线得 $\gamma_H = 0.21$(rad), $\gamma_L = 0.27$(rad),(见图中虚线)。代入(11)式可得声波在样品中真正传播时间 $t_1(f_L)$ 和 $t_1(f_H)$。 当非色散时有 $t_1(f_L) = t_1(f_H) = t_1$。

三、讨 论

① 计算修正曲线时,引用样品的声速是未修正的,这给修正值带来误差,但我们认为它很小。

② 若样品是非色散的媒质,但由于 γ 是频率的函数,因此,未修正的样品声速是和频率有关,修正后声速与频率无关。 因此可由修正后的 $v_1(f_L)$ 和 $v_1(f_H)$ 值接近程度检验修正效果。

③ 上述三项系统误差之间相对大小是和被修正的系统有关,本文所举例的计算结果是 γ_1 最大,其次 γ_3, 当 $\alpha < 0.3'$ 时 γ_2 可忽略。而文献[7]样品各向异性,主要误差源是 γ_3, 而 γ_1 和 γ_2 可不考虑。

参 考 文 献

[1] Mcskimin, H. J., *J. Acouss. Soc. Am.*, 37-5 (1965), 864—871.
[2] Williams, A. O., *J. Acouss. Soc. Am.*, 23-1 (1951), 1—6.
[3] Khimunin, A. S., *Acoustica*, 27-4 (1972), 173—181.
[4] Papadakis, E. P., *J. Acoust. Soc. Am.*, 40-4 (1966), 863—876.
[5] Papadakis, E. P., *J. Acoust. Soc. Am.*, 42-5 (1967), 1045—1051.
[6] Vincent, A., *Ultrasonics*, 4 (1987), 237—245.
[7] 张谦琳,声学学报,14-3(1989),220—225.

(上接 38 页)

参 考 文 献

[1] Umezawa, *Bull. of the JSME*, 26 (217), (1983), 1213.
[2] Umezawa, *Bull. of the JSME*, 5(202), (1982), 638.
[3] C. E. Wallance, *J. Acoust. Soc. Am*, 31(3), Pt. 2, (1972), 936.
[4] C. E. Wallance, *J. Acoust. Soc. Am.*, 31(3),Pt. 2, (1972), 946.
[5] Takashi Matzuda et al,Int. Symposium on Gearing & Power Trans. Tokyo, (1981)
[6] Gong Zhen, NEC, 32(1), (1989), 35
[7] 马大猷,噪声控制学,科学出版社,1987,164—172.
[8] 杨黻,机床动力学,机械工业出版社, 1983,245—269.
[9] 张建寿,机械和液压噪声控制,上海科技出版社, 1987, 49—89.
[10] 仪垂杰,吉林工学院学报 9(1),1988.