

等截面杆与指数杆组成的复合杆件超声弯曲振动的频率计算*

左建国

丁大成

(衡阳钢管厂 衡阳 421001)

(陕西师大声学所 西安 710062)

1991 年 11 月 25 日收到

本文以提摩盛科理论为基础, 讨论复合杆的超声弯曲振动问题, 导出了矩形截面等截面杆与指数杆组成的复合杆件弯曲振动的频率方程。并对典型的复合杆进行了数值计算。理论计算与实验结果的比较说明, 用常用的频率计算公式得出的结果与实验结果比较有较大误差, 而本文所得的结果与实验值基本一致。

一、引言

超声弯曲谐振杆是超声应用工程中的常用杆件之一, 如超声振动系统中的传振杆等^[1]。由于复合杆件的复杂性, 前人对其研究的很少, 如目前应用日益广泛的振动切削方法, 所用超声弯曲振动的切削刀即是典型的等截面杆与变截面杆构成的复合杆件。但人们一般将其简化为单一等截面杆处理^[2-4], 且一般用初等理论计算的结果来设计^[2-3], 这无疑会造成较大误差。出现这种情况的原因, 一方面是直杆超声弯曲振动时剪切形变和截面惯性不可忽略^[5-7], 另一方面则是变截面杆弯曲振动的提摩盛科理论未得到充分的运用。作者在最近的几篇文章中^[8-11], 研究了矩形截面指数杆超声弯曲振动的问题, 给我们讨论复合杆的振动提供了依据。

本文在前述工作的基础上, 导出了矩形截面等截面杆与指数杆组成的复合杆超声弯曲振动时的频率方程, 理论计算的结果与实验测量值基本一致。

二、理论公式

考虑如图 1 所示的复合杆, 它由一宽为 b 、厚度为 h 的矩形截面等截面杆和一宽度按指数规律变化的变截面杆组成。等截面杆的长度为 l_1 , 指数杆的长度为 l_2 , 坐标轴 z 的零点取在两杆相接处。指数杆的解为^[9-11]

$$\varphi = e^{\frac{\beta}{2}z} (A \cos s_1 z + B \sin s_1 z + C \cosh s_2 z + D \sinh s_2 z) \quad (1)$$

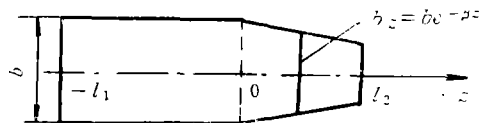


图 1 复合杆示意图

式中 φ 是指数杆横截面在振动中的转角, 而

$$s_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2(g^2 + K^2) - \beta^2}$$

* 国家自然科学基金资助项目部分内容

$$s_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2(g^2 - K^2) + \beta^2}$$

$$g^2 = \sqrt{(K_1^2 - K_2^2)^2 + 4K_1^2}$$

A, B, C, D 是和边界条件有关的常数, $K_1^2 = \omega^2 \rho / E$, $K_2^2 = \omega^2 \rho / (K'G)$, $K^2 = K_1^2 + K_2^2$, $K_1^2 = 12\omega^2 \rho / (h^2 E)$, $\omega = 2\pi f$. ρ 为材料密度, E 为材料的纵向弹性常数, G 为材料的剪切弹性常数. K' 为截面剪切系数, 它与材料无关, 只由杆的截面形状决定, 对矩形截面, K' 的标准值为 0.833^[12]. f 为谐振频率. 本文实验采用的试杆材料为 45# 碳素钢, 理论计算时, 材料参数均采用钢的标准值^[13], 即 $E = 21.6 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, $G = 8.4 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{kg/m}^3$. 通过(1)式和其它有关关系式, 也可求出位移 u 、弯矩 M 、剪力 Q 的表示式. 在(1)式中令 $\beta = 0$, 即可求得等截面杆截面转角的表示式.

三、频率方程

在两杆连接处(即 $z = 0$ 处), 由等截面杆与指数杆的截面转角、位移、弯矩及剪力相等的

条件可以确定两杆各参数表达式中系数之间的关系, 再由复合杆两端的边界条件可得频率方程为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

行列式中各元素 a_{ij} 之值见表 1 和表 2, 其中

$$\lambda_1 = \sqrt{(g^2 + K^2)/2};$$

$$\lambda_2 = \sqrt{(g^2 - K^2)/2};$$

$$b_1 = \frac{\beta}{2\lambda_1} \frac{2K_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2^2 + \lambda_1^2}$$

$$b_2 = \frac{S_1}{\lambda_1};$$

$$b_3 = \frac{\beta}{\lambda_1} \frac{K_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_2^2 + \lambda_1^2};$$

$$d_1 = \frac{\beta}{\lambda_2} \frac{\lambda_1^2 - K_1^2}{\lambda_2^2 + \lambda_1^2};$$

$$d_2 = \frac{\beta}{2\lambda_2} \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 2K_1^2}{\lambda_2^2 + \lambda_1^2};$$

$$d_3 = \frac{S_2}{\lambda_2}$$

表 1 两端自由的复合杆 a_{ij} 值

	1	2	3	4
1	$\lambda_1(b_1 \cos \lambda_1 l_1 + \sin \lambda_1 l_1) + \lambda_2 d_1 \operatorname{ch} \lambda_2 l_1$	$\lambda_1 b_2 \cos \lambda_1 l_1$	$\lambda_1 b_3 \cos \lambda_1 l_1 + \lambda_2(d_2 \operatorname{ch} \lambda_2 l_1 - \operatorname{sh} \lambda_2 l_1)$	$\lambda_2 d_3 \operatorname{ch} \lambda_2 l_1$
2	$(K_1^2 - \lambda_1^2)(\cos \lambda_1 l_1 - b_1 \sin \lambda_1 l_1) - (K_1^2 + \lambda_1^2)d_1 \operatorname{sh} \lambda_2 l_1$	$-(K_1^2 - \lambda_1^2)b_2 \sin \lambda_1 l_1$	$-(K_1^2 - \lambda_1^2)b_3 \sin \lambda_1 l_1 + (K_1^2 + \lambda_1^2)(\operatorname{ch} \lambda_2 l_1 - d_2 \operatorname{sh} \lambda_2 l_1)$	$-(K_1^2 + \lambda_1^2)d_3 \operatorname{sh} \lambda_2 l_1$
3	$\cos s_1 l_2 - \frac{2s_1}{\beta} \sin s_1 l_2$	$\frac{2s_1}{\beta} \cos s_1 l_2 + \sin s_1 l_2$	$\operatorname{ch} s_2 l_2 + \frac{2s_2}{\beta} \operatorname{sh} s_2 l_2$	$\frac{2s_2}{\beta} \operatorname{ch} s_2 l_2 + \operatorname{sh} s_2 l_2$
4	$(K_1^2 - \lambda_1^2) \cos s_1 l_2$	$(K_1^2 - \lambda_1^2) \sin s_1 l_2$	$(K_1^2 + \lambda_1^2) \operatorname{ch} s_2 l_2$	$(K_1^2 + \lambda_1^2) \operatorname{sh} s_2 l_2$

表 2 悬臂复合杆 a_{ij} 值*

	1	2	3	4
1	$\cos \lambda_1 l_1 - b_1 \sin \lambda_1 l_1 - d_1 \operatorname{sh} \lambda_2 l_1$	$-b_2 \sin \lambda_1 l_1$	$-b_3 \sin \lambda_1 l_1 + \operatorname{ch} \lambda_2 l_1 - d_2 \operatorname{sh} \lambda_2 l_1$	$-d_3 \operatorname{sh} \lambda_2 l_1$
2	$\lambda_1(K_1^2 - \lambda_1^2)(b_1 \cos \lambda_1 l_1 + \sin \lambda_1 l_1) + \lambda_2(K_1^2 + \lambda_1^2)d_1 \operatorname{ch} \lambda_2 l_1$	$(K_1^2 - \lambda_1^2)\lambda_1 b_2 \cos \lambda_1 l_1$	$\lambda_1(K_1^2 - \lambda_1^2)b_3 \cos \lambda_1 l_1 + \lambda_2(K_1^2 + \lambda_1^2) \times (d_2 \operatorname{ch} \lambda_2 l_1 - \operatorname{sh} \lambda_2 l_1)$	$(K_1^2 + \lambda_1^2)\lambda_2 d_3 \operatorname{ch} \lambda_2 l_1$

* $i, j = 3, 4$ 时, a_{ij} 值与两端自由杆的 a_{ij} 值相同。

四、理论计算与实验 测量结果的比较

为了验证本文所得结果的正确性,我们取若干种典型复合杆进行频率的数值计算与测量。为便于比较,在计算时,除用本文所得频率方程(2)式计算复合杆的谐振频率,我们还采用下述常用公式进行计算^[2-3]

$$f_n = \frac{A_n h}{2\pi l^2 \sqrt{12}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3)$$

式中 f_n 是 n 阶振型的频率, $l = l_1 + l_2$ 是杆件的总长, A_n 是振型系数,随不同振型而不同,其数值见表 3^[2]。

表 3 振型系数值。

n	1	2	3	4	5
A_n	22.4	61.7	121	200	298

表 4 两端自由复合杆的频率 (Hz)

振型	实测值	本文 (2) 式计算值	本文 (3) 式计算值	理论值与实测值比较 (%)	
1	1964	2088	2032	+6.31	+3.46
2	5358	5411	5597	+0.98	+4.46
3	10042	10019	10976	-0.22	+9.30
4	15526	15623	18142	+0.62	+16.85
5	21850	21967	27032	+0.54	+23.72

限于篇幅,我们在表 4 中仅给出一种复合杆频率的理论值和实验值,它足以说明本文所得结果的精确性。表 4 中试杆尺寸为:等截面杆长 $l_1 = 0.08\text{m}$,指数杆长 $l_2 = 0.12\text{m}$, $h = 0.015\text{m}$, $\beta = l_2/2l_1$ 。

理论计算与实验结果的比较说明,在振动切削的理论分析和设计中,将等截面杆和变截面杆组成的复合杆作为单一等截面杆处理所得的频率公式(3)是不够精确的,特别是在高频振动的情况下会产生较大误差。而本文所得公式(2)的计算结果与实验值基本一致,能较为精

确地满足实际工程设计的要求。尽管本文所讨论的仅仅是等截面杆与指数杆组成的复合杆这一特殊杆件,但所得结论对研究其它实用杆件具有一定指导意义。

五、结 束 语

利用提摩盛科理论计算复合杆超声弯曲振动的谐振频率,可以得到比较精确的结果。但理论计算十分复杂,有必要在超声频范围内作进一步的简化,以适应实际工程设计的需要。诸如振动切削中所用到的弯曲振动刀杆等复杂的组合杆件,理论分析的复杂程度更大,要得到具有实用意义的结论,尚有待于进一步研究。

本工作得到陕西师范大学应用声学研究所赵恒元教授的热情指导和帮助,作者在此表示感谢。陕西师大程存弟、张福成、马玉英等老师对本工作提出了许多宝贵意见,一并致谢。

参 考 文 献

- [1] 姜健(译),超声波焊接,国防工业出版社,1963,197—208.
- [2] 李祥林、薛万夫、张日昇,振动切削及其在机械加工中的应用,北京科学技术出版社,1985,163—174.
- [3] 隈部淳一郎,精密加工振动切削,机械工业出版社,1985,197—199.
- [4] 赵继、王立江,声学学报,15-1(1990),67—70.
- [5] 提摩盛科,机械振动学,机械工业出版社,1958,322—327.
- [6] 章克文、董胜林、丁大成,声学学报,6-1(1981),54—57.
- [7] 林仲茂,超声变幅杆的原理和设计,科学出版社,1987,40—52.
- [8] 左建国、丁大成、赵恒元,陕西师大学报,18-4(1990),21—25.
- [9] 左建国、丁大成、赵恒元,陕西师大学报,19-1(1991),31—35.
- [10] 丁大成、左建国、赵恒元,陕西师大学报,18-3(1990),24—27.
- [11] 丁大成、左建国、鲍善惠等,科学通报,35-14(1990),1056—1059.
- [12] 王文亮、杜作润,结构振动与动态子结构方法,复旦大学出版社,1985,134—137.
- [13] 杜功焕、朱哲民、龚秀芬,声学基础(下册),上海科学技术出版社,1981,373—374.