

# 含气泡液体中声传播的解析解及其 强非线性声特性 \*

赵晓亮 朱哲民 周 林 杜功焕

(南京大学近代声学国家重点实验室 南京 210093)

1998年10月19日收到

**摘要** 声波在含气泡的液体中传播时, 气泡的受迫振动会引起强的声散射, 并且由于振动的非线性, 使得气泡产生的次级波不仅含有基频成分, 而且还会有高次谐波. 本文从理论上描述了气泡个数随尺寸大小有一定分布时液体中声波的传播, 给出了声波的一阶声压和二阶非线性声压的解析表达式, 并给出了含气泡液体的等效非线性声参数  $B/A$  的计算公式. 理论计算与已有的实验观测符合较好. 文中对含气泡水的声速和声衰减等特性也进行了讨论.

**关键词** 含气泡水, 声传播, 非线性声参量  $B/A$

## Analytical description of acoustic wave propagation in a bubbly liquid and its strong nonlinearity

Zhao Xiaoliang Zhu Zhemin Zhou Lin Du Gonghuan

(State Key Laboratory of Modern Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093)

**Abstract** An analytical model is given to describe the propagation of an acoustic wave in a liquid that contains small bubbles with certain radial distribution. The fundamental and the second order nonlinear wave pressure is calculated. The effective non-linearity parameter  $B/A$  of this liquid-bubble mixture is given. Comparisons between the calculations and experiment show that the model explains the existing experiments satisfactorily. Discussions on the sound attenuation and dispersion are also presented.

**Key words** Bubbly liquid, Wave propagation, Nonlinearity parameter  $B/A$ .

### 1 引言

众所周知, 液体中如果混有气泡, 由于空气与液体的声阻抗以及声压缩特性等有明显不同, 往往会导致媒质声学性质的显著改变. 例

如, 气泡作为一个强的散射源, 生物医学超声领域里已经利用它对某些生物组织(如血管)进行超声成象<sup>[1]</sup>; 另外, 含气泡水具有强的声衰减和声色散等特性, 国际上一直在研究利用这些性质对海洋进行实时监测, 以便实现远距离

\* 国家自然科学基金部分资助项目

气象预测<sup>[2,3]</sup>；而气泡的共振振动又会导致强的声非线性，水声领域里已开始研究用来提高声参量阵的发射效率<sup>[4,15]</sup>，工程中也在用它来检测气泡的存在和气泡的大小<sup>[5]</sup>。由于气泡的强非线性在造影剂方面的新的应用，特别是人们对利用其二次谐波对血流进行超声多普勒成像的兴趣日益盎然<sup>[6-8]</sup>，国内外对含气泡水的声学特性的研究再度成为一个令人瞩目的热点。

有关声波在含气泡水中传播的理论，Van Wijngaarden 最先提出混合媒质的概念，并导出了气泡-液体混合物的声波运动方程<sup>[9]</sup>。Commander 和 Prosperitti 进一步发展了这一理论并讨论了线性压力波在含气泡水中的传播<sup>[10]</sup>。可是，他们的理论并没有给出声压场的解析表达式，而且其讨论也限于一阶线性声场的情况。Wu 和 Zhu 于 1991 年测量了气泡处于共振状态时的含气泡水中的强二次谐波声压<sup>[11]</sup>，并估计了混合物的等效非线性声参量  $(B/A)_e$  达  $10^4 - 10^5$ 。为解释这一现象，他们提出了一种物理模型，即气泡在声波驱动下作径向受迫振动并处于共振状态，气泡壁的运动遵循 Rayleigh-Plesset 方程。这种强非线性振动又成为辐射二次谐波的源，从而声场表现为强非线性以及强衰减<sup>[12]</sup>。然而由于其理论假定气泡的尺寸大小一致，与实际应用及具体的实验观测<sup>[13]</sup>有差别，因而他们按此模型计算得到的基波声压、二次谐波声压等与实验观测比较尚存在一定的差别，特别是非线性声参量  $B/A$  与实验比较差别在定量上尚有约一个量级。

本文从实际应用出发，结合 Commander 和 Prosperitti 以及朱和杜的理论，针对实际气泡尺寸总是存在一定分布，发展了一系列计算声波在含气泡水中的声传播特性和该媒质非线性参数  $B/A$  的解析公式。计算与实验的比较表明，气泡尺寸在满足高斯分布情况下，混合媒质在基波声压、二次谐波声压以及非线性声参量  $B/A$  等数值上比原来的理论更加接近实验。同时，有关声波在含气泡水中传播时的声速、声

衰减等特性也一并给出。

## 2 理论推导

### 2.1 基本方程

考虑声波沿  $x$  方向传播的一维情形。如果忽略纯水本身的非线性及粘滞耗散，而着重讨论气泡的存在对声场的影响，则含气泡水的二阶非线性方程可以表示为<sup>[10,12]</sup>：

$$\nabla p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} \quad (1)$$

其中  $p$  为混合媒质中声波的声压， $\rho_0$ 、 $c_0$  分别为水的密度和声速， $Z$  为混合媒质单位体积里气体的体积含量。

设在水中气泡的数目随其半径大小是以函数  $n(R_0)$  分布的， $n(R_0)dR_0$  表示平衡半径在  $R_0$  和  $R_0 + dR_0$  之间单位体积混合媒质内气泡的数目。 $V(R_0)$  为单个气泡的瞬时体积， $V_0(R_0)$  为气泡的平衡体积，则气泡在声波激励下作受迫振动时， $V(R_0) = V_0(R_0) + V'(R_0)$ 。其中  $V'(R_0)$  为气泡的体积增量。于是

$$Z = \int_{R_0} V'(R_0)n(R_0)dR_0 + \int_{R_0} V_0(R_0)dR_0 \quad (2)$$

将其代入 (1) 式，可得

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_0 \int_{R_0} \frac{\partial^2 V'(R_0)}{\partial t^2} \cdot n(R_0)dR_0 \quad (3)$$

根据逐级近似法分别将基波、二次谐波声压及气泡的体积增量表示为一阶量和二阶量，则方程 (3) 整理为：

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\rho_0 \int_{R_0} \ddot{V}'_1 \cdot n(R_0)dR_0 \quad (4)$$

$$\nabla^2 p_2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} = -\rho_0 \int_{R_0} \ddot{V}'_2 \cdot n(R_0) dR_0 \quad (5)$$

其中  $\ddot{V}$  表示  $V$  关于  $t$  的两次导数。由方程 (4) 和 (5) 可以看出, 气泡的线性振动影响了声波基波在流体中的传播, 而且其二阶振动又成为二次谐波的辐射源。如果没有气泡的存在, 方程 (3) 等号右侧为零, 这正是小振幅声波在理想流体中传播的波动方程。

为了使方程 (4)、(5) 封闭, 需要找出驱动声压  $p$  和气泡的体积增量  $V'$  之间的关系。Rayleigh-Plesset 方程给出了这个关系, 即

$$\ddot{V}' + \omega_0^2 V' - \delta V'^2 - \beta [2V' \ddot{V}' + (V')^2] + g \dot{V}' = \varepsilon p \quad (6) \quad \text{其中 } \Omega = \omega/\omega_0.$$

将 (7)、(8) 两式分别代入 (4)、(5) 式, 我们得到了描述流体中含不同尺寸大小气泡时声波传播的一阶和二阶量的逐级近似方程:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \rho_0 p_1 \cdot \int_{R_0} \frac{\varepsilon(R_0)n(R_0)}{1 - \frac{1}{\Omega^2} - j\frac{1}{Q}} \cdot dR_0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} = \rho_0 p_2 \cdot \int_{R_0} \frac{\varepsilon(R_0)n(R_0)dR_0}{1 - \frac{1}{4\Omega^2} - j\frac{1}{2Q}} - \rho_0 p_1^2 \cdot \int_{R_0} D(R_0)n(R_0)dR_0 \quad (10)$$

其中

$$D(R_0) = \frac{(\delta - 3\beta\omega_0^2)\varepsilon^2}{(1 - \frac{1}{4\Omega^2} - j\frac{1}{2Q})(1 - \frac{1}{\Omega^2} - j\frac{1}{Q})^2\omega_0^4} \quad (11)$$

求解这两个方程, 即可计算出含气泡水的基波声压和二次谐波声压, 并且进一步可以计算该混合媒质的非线性声学参量  $B/A$ 。

## 2.2 方程求解及非线性声参量 $B/A$ 的计算

设声波及气泡的体积增量随时间简谐变化, 方程 (9) 的解可表示为

$$p_1 = p_{1A} \cdot \exp[j(\omega t - \bar{k}_1 x)] \quad (12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_1^2 &= (k_1 - j\alpha_1)^2 = A_1 - jB_1 \\ A_1 &= \frac{\omega_0^2}{c_0^2} - \int_{R_0} \frac{\varepsilon\rho_0(1 - 1/\Omega^2) \cdot n(R_0)dR_0}{(1 - 1/\Omega^2)^2 + 1/Q^2} \\ B_1 &= \frac{1}{Q} \int_{R_0} \frac{\varepsilon\rho_0 \cdot n(R_0)dR_0}{(1 - 1/\Omega^2)^2 + 1/Q^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中  $\omega_0 = \sqrt{3\gamma P_0/\rho_0 R_0^2}$  为气泡共振频率,  $\delta = 3\beta(\gamma+1)\omega_0^2$ ,  $\beta = 1/8\pi R_0^2$ ,  $g = \omega/Q$ ,  $\varepsilon = 4\pi R_0/\rho_0$ ,  $P_0$  为气泡平衡气压,  $\gamma$  为空气绝热常数,  $Q$  为气泡的品质因素。

采用逐级近似法<sup>[12]</sup>, 可以求出  $V'_1, V'_2$  如下:

$$\ddot{V}'_1 = \frac{-\varepsilon_1}{(1 + \frac{1}{\Omega^2} - j\frac{1}{Q})} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{V}'_2 &= \frac{-\varepsilon_2}{(1 - \frac{1}{4\Omega^2} - j\frac{1}{2Q})} \\ &+ \frac{\delta - 3\beta\omega^2}{(1 - \frac{1}{4\Omega^2} - j\frac{1}{2Q})} (V'_1)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

因而基波的波数  $k_1$  以及衰减系数  $\alpha_1$  分别求得为

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{(\sqrt{A_1^2 + B_1^2} + A_1)/2} \\ \alpha_1 &= \sqrt{(\sqrt{A_1^2 + B_1^2} - A_1)/2} \end{aligned} \quad (14)$$

同样, 对方程 (10) 设其齐次方程通解为

$$p'_2 = p_{2A} \cdot \exp[j(2\omega t - \bar{k}_2 x)] \quad (15)$$

亦可求出自由二次谐波的波数和衰减系数:

$$\begin{aligned} k_2 &= \sqrt{(\sqrt{A_2^2 + B_2^2} + A_2)/2} \\ \alpha_2 &= \sqrt{(\sqrt{A_2^2 + B_2^2} - A_2)/2} \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{4\omega_0^2}{c_0^2} - \int_{R_0} \frac{\varepsilon\rho_0(1 - 1/\Omega^2) \cdot n(R_0)dR_0}{(1 - 1/\Omega^2)^2 + 1/Q^2} \\ B_2 &= \frac{1}{2Q} \int_{R_0} \frac{\varepsilon\rho_0 \cdot n(R_0)dR_0}{(1 - 1/\Omega^2)^2 + 1/Q^2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

方程 (10) 的特解可求得为

$$p_2'' = \frac{\rho_0 \int_{R_0} D(R_0)n(R_0)dR_0}{2(4\bar{k}_1^2 - \bar{k}_2^2)} p_{1A}^2 \cdot \exp[j \cdot 2(\omega t - \bar{k}_1 x)] \quad (18)$$

因而, 方程 (10) 的通解为  $p_2'$  和  $p_2''$  之和。考虑到当  $x=0$  时  $p_2=0$  的条件, 最后可得二级声压  $p_2$  为

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{\rho_0 \int_{R_0} D(R_0)n(R_0)dR_0}{2(4\bar{k}_1^2 - \bar{k}_2^2)} \\ &\cdot [\exp(-j2\bar{k}_1 x) - \exp(-j\bar{k}_2 x)] \\ &\cdot p_{1A} \cdot \exp(j2\omega t) \end{aligned} \quad (19)$$

至此, 含气泡水中声波的基波和二次谐波的声压解析表达式已经获得。在非线性声学中, 通常用媒质状态方程泰勒展式的二级量与一级量的比值  $B/A$  来描述纯媒质的非线性特性。当声波在此介质中传播时, 波形会发生畸变并滋生谐波<sup>[14]</sup>。其二次谐波与基波幅值间存在如下关系:

$$p_{2A} = \frac{(B/A) + 2}{4\rho_0 c_0^3} \omega x \cdot p_{1A}^2 \quad (20)$$

在我们要讨论的问题范围内,  $(2\alpha_1 - \alpha_2)x \ll 1$ ,  $(2k_1 - k_2)x \ll 1$ 。这样, (19) 式可以简化为

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{-jx\rho_0 \int_{R_0} D(R_0)n(R_0)dR_0}{2(2\bar{k}_1^2 - \bar{k}_2^2)} p_{1A}^2 \\ &\cdot \exp[j(2\omega t - \bar{k}_2 x)] \end{aligned} \quad (21)$$

应用声学

因而, 这种含气泡水由于气泡的存在而导致的声学非线性可以用等效的非线性声参量  $(B/A)_e$  来描述, 即

$$(B/A)_e = \frac{2\rho_0^2 c_0^3 \int_{R_0} D(R_0)n(R_0)dR_0}{\omega_0 \sqrt{(2k_1 + k_2)^2 + (2\alpha_1 + \alpha_2)^2}} - 2 \quad (22)$$

### 3 数值计算

#### 3.1 理论与 Wu 与 Zhu 的实验的比较

作为例子, 我们对 Wu 和 Zhu 于 1991 年做的实验进行了对比计算。他们的实验用的是密度、声速均与水接近的有机薄膜, 薄膜中无规分布着许多大小基本相同的圆柱状小孔。当薄膜浸入水中, 孔中的空气就成为较为稳定的气泡。值得注意的是, 水在各个孔中的浸润程度以及气泡与水相接触的界面的凸出与凹入程度不尽相同, 有时差别还比较大<sup>[6]</sup>, 因而我们可以近似认为水中气泡的数目随平衡半径呈高斯分布, 即

$$n(R_0) = A \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp[-(R_0 - r_0)^2 / 2\sigma^2] \quad (23)$$

其中  $A$  为常数且满足  $\int_{R_0} A \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp[-(R_0 - r_0)^2 / 2\sigma^2] dR_0 = N$ ,  $\sigma$  为均方差。计算中我们估计均方差  $\sigma = 0.1 \cdot r_0$ 。与此同时, 我们就气泡的数目随平衡半径呈冲激函数分布的情况也进行了计算。冲激函数采用

$$n(R_0) = N \cdot \delta(R_0 - r_0) \quad (24)$$

其中  $N$  为含气泡水单位体积气泡的总数目,  $r_0$  为主体气泡共振极大时气泡的平衡半径。将此分布函数代入以上各式, 容易看出这样可以退化到朱和杜的气泡尺寸大小一致时的理论<sup>[5]</sup>。

为便于与实验进行比较, 我们计算中所用的参数为  $p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_0 = 1480 \text{ m/s}$ ,  $Q = 5$ , 声波频率  $\omega = \sqrt{3\gamma P_0 / \rho_0 r_0^2}$ , 此时气泡主体处于

共振状态。实验中采用的三种膜片的特征及声波分别通过它们时非线性参量  $B/A$  的实验测

量值和由 (22) 和 (24) 式计算的结果比较, 见表一。

表 1 三种膜片的特征及非线性参量  $B/A$  的实验测量值和理论计算结果的比较

膜片 (厚度 $13\mu\text{m}$ )	孔半径 ( $\mu\text{m}$ )	孔密度 ( $\text{mm}^{-2}$ )	共振频率 $f_0(\text{MHz})$	等效半径 $r_0(\mu\text{m})$	气体体积 含量 $Z$	实验测量 的 $B/A$ 值	朱和杜理 论计算的 $B/A^*$ 值	高斯分布 理论计算 的 $B/A$ 值
Lot A	2.5	170	1.4	2.4	$9 \times 10^{-4}$	$9 \times 10^4$	$6.6 \times 10^5$	$2.1 \times 10^5$
Lot C	4.0	720	1.0	3.3	$8 \times 10^{-3}$	$2.3 \times 10^5$	$2 \times 10^6$	$6.2 \times 10^5$
Lot G	2.6	1150	1.4	2.5	$6 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^5$	$1.7 \times 10^6$	$5.3 \times 10^5$

\* 这组数据由朱哲民和杜功焕的文章提供 [12]

可以看出, 按高斯分布的理论计算得到的  $B/A$  的量值与实验大为接近, 二者定量数值已落在相差一倍左右, 而按朱和杜的理论,  $B/A$  相差近一个数量级。从而看出气泡随半径大小随机分布的理论更加符合实际情况。

我们进一步给出了含气泡水中声场的一阶及二阶声压与实验的对照。以 Lot C 为例, 设声源辐射声压  $p_{1A}=53000\text{Pa}$ , 其它参数同上, 则由 (12)、(13)、(14) 式以及 (23) 或 (24) 式计算得到的一阶声压  $p_1$  随传播距离  $x$  的变化见图 1。可以看出, 基波随距离增加衰减很快, 从 (13) 和 (14) 式衰减系数  $\alpha_1$  的表达式也可以看出有气泡存在并且气泡共振时,  $\alpha_1$  显著增大。这种衰减是与气泡共振时的声散射和基波能量迅速转化为强的二次谐波有关。

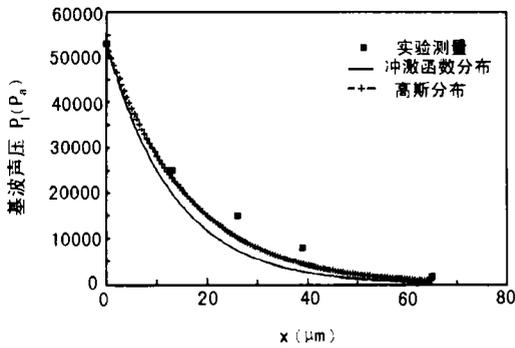


图 1 基波声压  $p_1$  随传播距离  $x$  的变化曲线 ('+' 线为按  $\sigma=0.1 \cdot r_0$  的高斯分布的计算值)

图 2 给出了二次谐波声压  $p_2$  随距离  $x$  的

变化曲线, 可以看出, 在十几个微米距离内, 二次谐波迅速达到极大。而对于纯水, 在这么短的距离内, 二次谐波几乎为零。由这两幅图可以看出, 气泡的尺寸满足一定的分布时, 理论计算与实验观测符合较好。

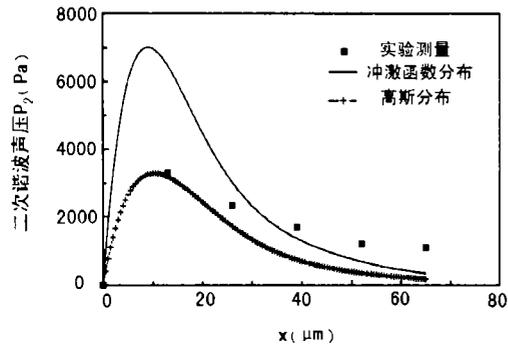


图 2 二次谐波声压  $p_2$  随距离  $x$  的变化曲线 (各图标的意义如图 1)

### 3.2 声速与声衰减

声速和声衰减作为声波在含气泡水中传播的重要特性, 实际应用中还是经常需要的, 在此我们根据 (13)、(14)、(16) 和 (17) 式对它们进行了计算。注意到声速  $c=\omega/K$ 。图 3 给出了基波和二次谐波的声速随声波频率的变化关系; 图 4 则给出了它们的声衰减随频率的变化曲线。

从图 3 和图 4 可以看出, 含气泡水是一种强色散媒质。当气泡共振时, 基波的声速达到极小而衰减为极大。这是由于气泡的共振造成

媒质体积弹性系数的减小,从而声速下降到最小;另一方面,气泡共振吸收了大量的基波声能量并将其转化为高次谐波能量和其它能量,从而导致极大的声衰减。这也与图 1 和图 2 反映的现象相一致。对于二次谐波也存在声速极小而衰减极大的情况,只是这种情况发生在当二次谐波频率与气泡共振频率相同之时,即  $f/f_0=0.5$ 。

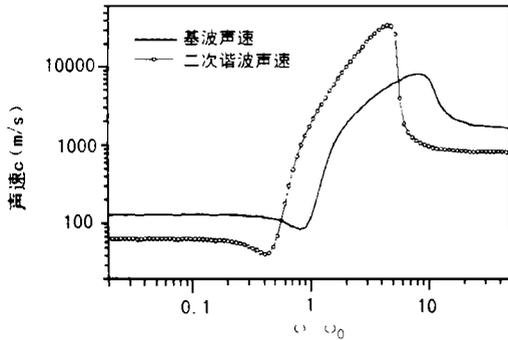


图 3 基波声速和二次谐波的声速  $c$  随声波频率  $f$  的变化曲线

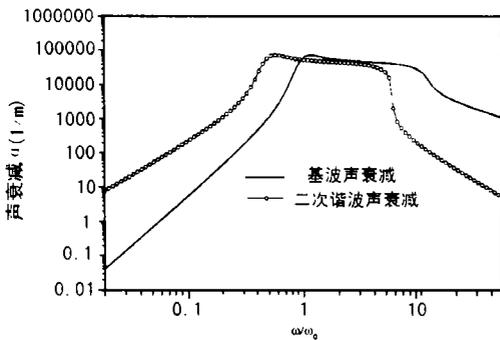


图 4 基波和二次谐波的声衰减  $\alpha$  随入射波频率  $f$  的变化曲线

## 4 结论

综上所述,本文结合朱和杜以及 Commander 和 Prosperitti 提出的描述含气泡水的声传

播的理论,导出了描述该混合媒质声传播的一般理论。文中对声波在含气泡水中传播时的一阶线性和二阶非线性声压、声速、以及声衰减等性质进行了解析描述。并计算了混合媒质的等效非线性参数  $B/A$ 。理论计算得到的气泡大小有一定分布的含气泡水的基波声压、二次谐波声压以及非线性声学参数  $B/A$  等都与已有的实验观测符合较好,这将为含气泡媒质在水声、生物医学超声等各个领域的广泛应用提供必要的理论基础。

## 参 考 文 献

- 1 Krishna P D, Newhouse V L. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 1997, **23**(3): 453-459.
- 2 Farmer D M, Vagle S. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1989, **86** (5): 1897-1908.
- 3 Norton G V, Novarini J C, Keiffer R S. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1998, **103**(6): 3256-3267.
- 4 Kustov L M, et al. *Acoustic Letters*, 1982, **6**(2): 15-17.
- 5 Miller D L. *Ultrasonics*, 1981, **19**: 217-224.
- 6 Chang P H, Shung K K, Wu S J. *IEEE Trans. Ultrason Ferroelectr Freq Contr.*, 1995, **42**: 1020-1027.
- 7 Arditi M, Brenier T, Schneider N. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 1997, **23**(8): 1185-1194.
- 8 Junru Wu, Jie Tong. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 1997, **24**(1): 153-159.
- 9 L Van Wijngaarden. *J. Fluid Mech.*, 1968, **33**: 465-474.
- 10 Commander K W, Prosperitti A. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1989, **85**(2): 732-746.
- 11 Junru Wu, Zhemin Zhu. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, **89**(6): 2634-2639.
- 12 朱哲民, 杜功焕. *声学学报*, 1995, **20**(6): 426.
- 13 Miller D L. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1982, **71**(2): 471-476.
- 14 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬. *声学基础*. 上海科技出版社, 1981.
- 15 Ostrovsky L A, Sutin A M, Soustova I A, et al. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1998, **104**(2): 722-726.