

等价权修正的 Kalman 抗野值滤波算法

戴文舒^{1,2†} 陈新华¹ 孙长瑜¹ 余华兵¹

(1 中国科学院声学研究所 北京 100190)
(2 中国科学院大学 北京 100190)

摘要 水声工程实际数据中野点的存在影响标准 Kalman 滤波精度。借鉴抗差惯性导航定位中等价权思想, 构造反映观测值误差的统计量, 以其协方差矩阵作为判断滤波精度的指标, 依据莱特准则设计了三种不同权重因子, 充分利用正确观测, 限制利用可用观测, 排除有害粗差。仿真结果表明, 这种等价权修正 Kalman 抗差算法, 抗差性可媲美中位数滤波, 证明当模型正确时, 其在抑制零星和斑点型野值方面, 效果很好。

关键词 Kalman 滤波, 等价权, 中位数滤波, 抗差, 野值

中图分类号: TB561

文献标识码: A

文章编号: 1000-310X(2013)05-0409-04

Modified Kalman filter algorithm using equivalent weights with immunity to outliers

DAI Wenshu^{1,2} CHEN Xinhua¹ SUN Changyu¹ YU Huabing¹

(1 Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)
(2 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 10019, China)

Abstract The equivalent weighting algorithm of robust estimation for inertial navigation and positioning is applied to the standard Kalman filter when the outliers exist in the actual data. Statistic that reflects observation error is constructed with its covariance matrix acting as the indicator of the filtering accuracy. Thus the new algorithm makes the most of the correct observations, limits the median quality observation and removes harmful gross errors. Simulation results showed that the robustness is compatible with the median filtering. When the model is correct, the modified filtering algorithm is efficiently resistant to scattered and spotted outliers.

Key words Kalman filter, Equivalent weights, Median filtering, Robust estimation, Outliers

1 引言

自高斯提出最小二乘估计, 该方法已广泛用于各类数据处理。关于最小二乘辨识的统计分析, 已有大量研究成果, 该方法有良好的统计特性(如无偏性, 相合性, 一致最小方差), 数学表达式也简单,

对于严格的正态分布数据, 最小二乘估值为其极大似然估计, 具有最优一致无偏且方差最小的特性。实践证明, 在没有粗差的情况下, 大部分测量数据基本上符合正态分布^[1]。统计学家 Fisher 认为在正态分布数据的情况下, 标准差的效率比平均绝对差高 12%, Huber 曾用含有不同数量的粗差的正态数据对

2012-09-17 收稿; 2013-01-10 定稿

作者简介: 戴文舒 (1987-), 女, 山西祁县人, 硕士研究生, 研究方向: 水声信号处理。

陈新华 (1978-), 男, 副研究员。 孙长瑜 (1954-), 男, 满族, 研究员。 余华兵 (1975-), 男, 副研究员。

† 通讯作者: 戴文舒, E-mail: dws.01@163.com

这两种方法的效率进行统计,结果表明 1000 个观测值中出现 2 个粗差足以抵消标准差高出 12% 的效率。而上述观测情况在实际中是常见的,因此,最小二乘的最优性只定义在非常狭隘的范围,其不具有抗粗差的能力。基于动力学模型方程和观测方程, Kalman 属于最小均方差估计,等价于最小二乘估计。利用不断加入的观测值和不断进行的条件,期望得到系统的状态估计。它高度依赖系统模型,在模型不准确和系统先验信息未知下,滤波精度下降甚至发散。工程实际中观测野值的出现不可避免,张孝芳^[2]等通过广义似然估计构造新息加权矩阵,胡峰^[3]等选取压缩影响函数作用于污染新息,但都对权值的取值不明确。潘倩文^[4]等通过误差协方差矩阵加权处理污染新息,效果很好。本文将惯性导航抗差估计理论引入水声中,通过等价权设计和莱特准则作用观测值误差统计量,将观测向量误差协方差阵作为观测精度的评定指标,当模型正确时对新息进行修正,得到状态参数的抗差 Kalman 稳健估计算法。

2 理论分析

2.1 Kalman 滤波一般解算原理

动力系统方程

$$\mathbf{X}_k = \boldsymbol{\varphi}_{k,k-1} \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{W}_k, \quad (1)$$

式中 \mathbf{X}_k 为 t_k 时刻的状态向量; $\boldsymbol{\varphi}_{k,k-1}$ 为 $m \times m$ 的状态转移矩阵, \mathbf{W}_k 为高斯白噪声过程的误差向量。协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{W}_k}$ 。

观测方程

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{e}_k, \quad (2)$$

其中 \mathbf{A}_k 为 $n \times m$ 阶设计矩阵, \mathbf{e}_k 为 $n \times 1$ 阶观测噪声向量,其期望为 0,协方差为 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ 。

将(1)和(2)改写成误差方程形式,

$$\mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_k} = \hat{\mathbf{X}}_k - \bar{\mathbf{X}}_k, \quad (3)$$

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}}_k - \mathbf{L}_k, \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_k = \boldsymbol{\varphi}_{k,k-1} \hat{\mathbf{X}}_{k-1}, \quad (5)$$

\mathbf{V}_k , $\mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_k}$ 分别为 \mathbf{L}_k 和 $\bar{\mathbf{X}}_k$ 的残差; $\bar{\mathbf{X}}_k$ 为状态预测向量, $\bar{\mathbf{X}}_k$ 的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}_k} = \boldsymbol{\varphi}_{k,k-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{X}}_{k-1}} \boldsymbol{\varphi}_{k,k-1}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{W}_k}, \quad (6)$$

按最小二乘原则构造目标函数^[5]

$$\Omega(k) = \mathbf{V}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{V}_k + \mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_k}^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_k}, \quad (7)$$

其中 \mathbf{P}_k , $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{X}}_k}$ 为 \mathbf{L}_k 和 $\bar{\mathbf{X}}_k$ 的权矩阵。其表达式

$$\mathbf{P}_k = \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}, \quad \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{X}}_k} = \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}_k}^{-1}, \quad (8)$$

使 $\Omega(k)$ 最小,将(7)对 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 求导令为 0,

$$\hat{\mathbf{X}}_k = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{X}}_k})^{-1} (\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{L}_k + \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{X}}_k} \bar{\mathbf{X}}_k). \quad (9)$$

令 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 的协方差矩阵

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{X}}_k} = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{X}}_k})^{-1} = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}_k}^{-1}, \quad (10)$$

$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}_k}^{-1}$ 为 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 的权矩阵。可得 Kalman 滤波公式:

- (1) 存储 t_{k-1} 时刻的 $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{X}}_{k-1}}$;
- (2) 由(5)计算预测状态向量 $\bar{\mathbf{X}}_k$;
- (3) 由(6)计算预测协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}_k}$;
- (4) 计算新息向量及其协方差矩阵 $\bar{\mathbf{V}}_k$, $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{V}}_k}$;

$$\bar{\mathbf{V}}_k = \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k - \mathbf{L}_k, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{V}}_k} = \mathbf{A}_k \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\Sigma}_k, \quad (12)$$

- (5) 计算增益矩阵 \mathbf{K}_k ;

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}_k}^{-1} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k, \quad (13)$$

- (6) 求解新的状态估计 $\hat{\mathbf{X}}_k$;

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \bar{\mathbf{X}}_k - \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{V}}_k, \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{X}}_k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{A}_k) \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}_{k-1}} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_k^T \mathbf{K}_k^T) + \mathbf{K}_k \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{K}_k^T. \quad (15)$$

2.2 当前历元异常误差对 Kalman 滤波结果的影响^[5]

预测残差方程(11),若观测向量存在异常,则观测模型可分成

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{b}_k + \mathbf{e}_k, \quad (16)$$

式中: \mathbf{C}_k 为常值偏差系数矩阵; \mathbf{b}_k 为异常偏差。若无观测异常,则 $\mathbf{C}_k = \bar{\mathbf{0}}$; 若仅有第 i 个观测值出现异常,则 $\mathbf{C}_k = [0, \dots, 1, \dots, 0]$,

$$\bar{\mathbf{V}}_k^\alpha = \bar{\mathbf{V}}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{b}_k, \quad (17)$$

$\bar{\mathbf{V}}_k$ 是偏差修正前的预报残差向量, $\bar{\mathbf{V}}_k^\alpha$ 为经模型修正后的预报残差向量。

Kalman 滤波状态估计值为

$$\hat{\mathbf{X}}_k^\alpha = \hat{\mathbf{X}}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{b}_k, \quad (18) \quad \text{修正为}$$

观测异常对本历元状态参数向量估计的影响为

$$\Delta \hat{\mathbf{X}}_k = -\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{b}_k, \quad (19)$$

当前历元观测异常 \mathbf{b}_k 不影响本历元状态参数预报向量 $\bar{\mathbf{X}}_k$, 观测异常 \mathbf{b}_k 对残差向量的影响为

$$\Delta \mathbf{V}_k = -\mathbf{A}_k \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{b}_k. \quad (20)$$

3 观测误差统计量的构造

基于 Kalman 先验假设, 若观测误差服从正态分布, 则预测残差 $\bar{\mathbf{V}}_k$ 也服从 0 期望的正态分布, 其协方差矩阵为公式(12), 构造统计量 $\bar{\mathbf{V}}$

$$\begin{aligned} H_0: \bar{\mathbf{V}} &\sim N(0, \Sigma_{\bar{\mathbf{V}}}), \\ H_1: \bar{\mathbf{V}} &\sim N(\delta \bar{\mathbf{V}}, \Sigma_{\bar{\mathbf{V}}}), \end{aligned} \quad (21)$$

若 H_0 成立, 则模型有效, 即观测数据没有观测误差; 若 H_1 成立且模型可靠, 则状态预测向量 $\bar{\mathbf{X}}_k$ 可靠, 因此预测残差 $\bar{\mathbf{V}}_k$ 反映了观测分量 L_{ki} 的误差, 把统计量 $\bar{\mathbf{V}}$ 变换成标准正态分布, 分量写为

$$u_k = \frac{\bar{V}_{k_i}}{\sigma_{\bar{V}_{k_i}} * n_k} \sim N(0, 1), \quad (22)$$

$\sigma_{\bar{V}_{k_i}}$ 为预测残差标准差, n_k 为状态量个数, $i=1 \sim n_k$ 。

4 等价权理论

观测向量协方差 $\Sigma_{\bar{\mathbf{V}}_k}$ 可作为观测精度评定指标, 若观测精度高, 可靠性好, 方差就小, 而观测值在状态估计中的权值就重, 反之亦然。等价权的抗差性在于, 对正常观测值采取保权处理; 对非正常但又可利用的观测值采取降权处理; 对于粗差, 使其权为 0, 予以淘汰。本文假设观测值相互独立, 采用 IGGIII 抗差方案^[5-7]。由莱特准则, 统计量超出 $\pm 3\sigma$ 概率小于 0.3%, 超过 $\pm 2\sigma$ 概率效率 0.5%, 权因子设计为:

$$w(u) = \begin{cases} 1, & |u| < 2 \\ 1/|u|, & 2 < |u| < 3 \\ 0, & |u| > 3 \end{cases} \quad (23)$$

如图 1 所示, 左图为标准 Kalman 权值的选取, 右图为 IGGIII 抗差方案的权值选取。迭代公式(14)

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \bar{\mathbf{X}}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{G}_k \bar{\mathbf{V}}_k, \quad (24)$$

其中对角矩阵 \mathbf{G}_k 为修正权矩阵, 对角线为由公式(23)求得的修正状态的权因子。

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} w_1(u) & & & \\ & w_2(u) & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_{n_k}(u) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

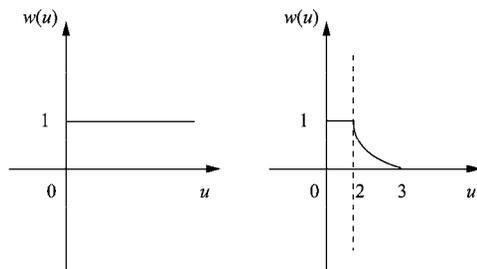


图 1 标准 Kalman 和 IGGIII 抗差方案权因子的选取

5 实验仿真

仿真模型为匀速直线运动的 x, y 坐标,

$$\Phi_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{状态待}$$

$$\text{估参数 } \mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad \text{观测向量 } \mathbf{L}_k = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{观测点数}$$

$N=250$, 不考虑系统噪声, \mathbf{e}_k 为高斯白噪声, $\Sigma_k = \sigma \mathbf{I}$, $\sigma=20$ 。在第 10~30 历元加入 20 倍 σ 的斑点野值, 采用以下三种方案进行滤波解算:

方案 1: 用标准 Kalman 滤波解算;

方案 2: 用抗差强的中位数滤波解算, 窗口长度 $n=9, 19$;

方案 3: 用抗差 Kalman 滤波解算;

图 2、图 3 所示结果反映了 L_k 中 x 维观测值存在野值时标准 Kalman 估计结果受影响, 导致估计误差很大。图 4 是分别采取抗差 Kalman 滤波和中位数滤波后的估计误差曲线。表 1 列出了 7 种方案的状态估计误差对比。

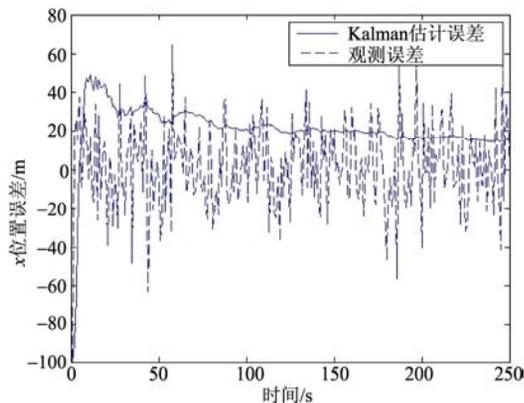


图2 无野值时观测误差和标准 Kalman 滤波误差曲线

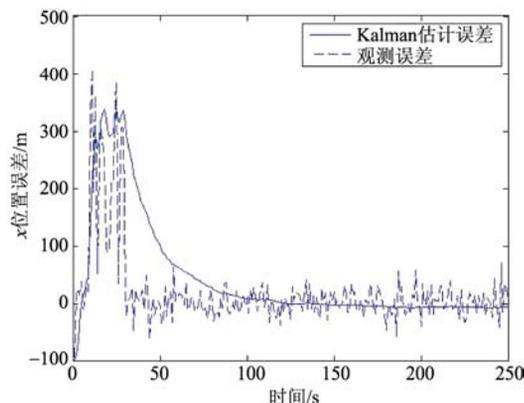


图3 野值存在时观测误差和标准 Kalman 滤波误差曲线

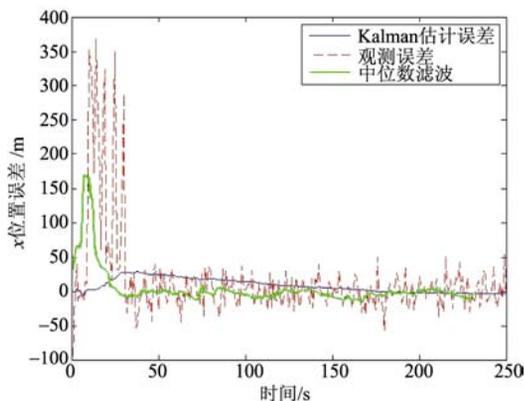


图4 野值存在时抗差 Kalman 估计, 中位数滤波和观测误差曲线

表1 7种方案误差的均方误差

| | x/m | y/m |
|-----------|------|-------|
| 无野值观测 | 21.1 | 32.0 |
| 无野值 KF | 4.8 | 5.7 |
| 有野值观测 | 71.1 | 65.5 |
| 有野值 KF | 92.8 | 143.7 |
| 抗差 KF | 5.9 | 7.1 |
| Med(N=9) | 37.5 | 35.5 |
| Med(N=19) | 7.5 | 7.5 |

(1) 初值的选取, 抗差解^[5]的表达式 $\hat{X}_1 = (A^T \bar{P}_1 A)^{-1} A^T \bar{P}_1 L_1$, \bar{P}_1 是等价权矩阵, 只有 A 满秩才能通过求逆得到参数解向量, 而一般的系统观测值维数小于状态参数时, 导致秩缺失, 所以初值的选取不能大于 3σ , 以免造成发散。

(2) 由图 2 可得, 当观测数据正常时, 经过 Kalman 滤波能得到精度较高的估计值, 但当观测数据异常时, 则会污染滤波器, 使状态估计误差变大, 甚至导致滤波器发散。图 3 和 4 对比可见抗差算法在斑点野值或零星野值发生时刻, 提高了估计精度, 而在观测值正常时刻的滤波精度影响不大。

(3) 等价权设计中分界点的选取可凭经验, 要保证估计参数不发散。

(4) 中位数滤波是对一定长度窗口内数据进行排序后取中值的过程, 通过表 1 和图 4 得出中位数滤波的抗差性随着窗口长度的增加, 估计精度随之增加。

中位数滤波算法具有不依赖于模型, 实现简单的优点。而抗差 Kalman 算法通过估计误差曲线来反映估计值的可信度, 估计值直接由滤波算法递推得到, 便于数字实现和多通路滤波, 较标准 kalman 滤波适用性更广。

6 结论

本文借鉴导航系统抗差理论思想, 通过等价权设计和莱斯准则作用观测值误差统计量, 将观测向量误差协方差阵作为观测精度的评定指标, 当模型正确时对新息进行修正, 通过对正常观测保权, 对非正常但有可利用观测值降权, 对于粗差使其权为 0 处理, 更多的利用观测数据和动力学模型, 其估计精度甚至高于抗差性最强的中位数滤波。

参考文献

- [1] 周江文, 杨元喜, 黄幼才, 等. 抗差最小二乘法[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1997, 105-115.
- [2] 潘倩兮, 赵龙, 张常云. INS/GPS 组合导航中带有置信度的抗差 Kalman 滤波算法[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2011, 42: 436-439.
- [3] 张孝芳, 庞晓楠. 基于 M 估计的抗野值 kalman 滤波方法[J]. 信息与电子工程, 2005, 3(2): 114-117.
- [4] 胡峰, 孙国基. Kalman 滤波的抗野值修正[J]. 自动化学报, 1999, 25(5): 692-695.
- [5] 杨元喜. 自适应动态导航定位[M]. 北京: 测绘出版社, 2006: 56-57, 66-68.
- [6] 文援兰, 杨元喜, 王威. 卫星精密轨道抗差估计的研究[J]. 空间科学学报, 2001, 21(4), 343-349.
- [7] CUI X Q, YANG Y X. Adaptive robust filtering with classified adaptive factors[J]. Progress in natural science, 2006, 16(8): 847-851.