第 42 卷 第 2 期
2023 年 3 月

应用声学
Journal of Applied Acoustics

Vol. 42, No. 2
March, 2023

◇ 研究报告 ◇

基于高斯混合概率假设滤波的水下目标跟踪算法*

马雪飞[1,2] 李 胤[2] 吴英姿[1,2†] 赵春雨[2] 吴燕妮[3] Waleed Raza[4]

(1 哈尔滨工程大学水声技术重点实验室 哈尔滨 150001)
(2 哈尔滨工程大学水声工程学院 哈尔滨 150001)
(3 西安文理学院 西安 710065)
(4 密苏里科技大学电气与计算机工程系 密苏里 65401)

摘要： 为了解决传统水下目标跟踪中目标数目估计不准确、状态估计误差增长过快的问题，提出了一种基于高斯混合概率假设滤波的水下目标跟踪算法。该算法基于双基地观测模型，采用高斯混合概率假设滤波算法处理方位和时延信息，利用粒子群算法处理多普勒频率获得矢量速度，进一步提升算法的跟踪精度。结果表明，该算法能完成在杂波环境下对目标的跟踪，相比传统的关联算法，能够有效地实现目标个数估计和抑制状态误差增长的目的。

关键词： 水下目标跟踪；量测信息；高斯混合概率假设滤波；粒子群算法
中图法分类号： TB566 **文献标识码：** A **文章编号：** 1000-310X(2023)02-0249-11
DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2023.02.007

Underwater target tracking algorithm based on Gaussian mixture probability hypothesis density filter

MA Xuefei[1,2] LI Yin[2] WU Yingzi[1,2] ZHAO Chunyu[2] WU Yanni[3] Waleed Raza[4]

(1 *Acoustic Science and Technology Laboratory, Harbin Engineering University, Harbin* 150001, *China*)
(2 *College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University, Harbin* 150001, *China*)
(3 *Xi'an University, Xi'an* 710065, *China*)
(4 *Department of Electrical and Computer Engineering, Missouri University of Science and Technology, Missouri* 65401, *United States*)

Abstract: In order to solve the problem that number of targets estimated is inaccurate and error of state estimation increases too fast in traditional underwater target tracking, an underwater target tracking algorithm based on Gaussian mixture probability hypothesis density filtering is proposed. The algorithm is based on the bistatic observation model, which the Gaussian mixture probability hypothesis density filtering algorithm is used to bearings and time-delay information and particle swarm optimization algorithm is used to process the Doppler frequency to calculate the feedback vector velocity for improving the tracking accuracy of the algorithm. The results show that the algorithm can track targets in clutter environment, and can effectively achieve the purpose of estimating the number of targets and suppressing the growth of state estimation error compared with the traditional association algorithm.

Keywords: Underwater target tracking; Measurement information; Gaussian mixture probability hypothesis density filter; Particle swarm optimization

2021-12-22 收稿; 2022-03-28 定稿

*海洋防务技术创新中心创新基金项目 (JJ-2020-701-08), 多器材 Z 协同综合 D 技术项目 (MC00918), 西安市科技计划项目 (2020KJWL14), 边境跨水空监测预警技术项目 (XZ202101ZY0001F)

作者简介: 马雪飞 (1980–), 男, 黑龙江哈尔滨人, 博士, 教授, 研究方向: 水下探测识别及定位技术。

†通信作者 E-mail: wuyingzi@hrbeu.edu.cn

0 引言

由于受到目标运动状态、观测系统姿态等影响，声呐系统所获得的量测信息中含有量测噪声，从而影响水下目标个数估计的准确度和跟踪的精度[1]。采用合适的数据处理算法，可以有效地解决水下杂波环境中目标跟踪的问题。传统的水下目标跟踪算法通过数据关联、状态估计、航迹起始和终结等方法实现对目标的个数和状态的估计。其中最大的问题是关联，常见的关联算法在实际应用中可能出现数据量过多，组合计算困难的问题[2]。基于随机有限集 (Random finite set, RFS) 理论的概率假设密度 (Probability hypothesis density, PHD) 算法将数据关联、滤波等结合，避免了数据关联中组合困难的问题，实现对运动目标个数和状态的估计。由于 PHD 滤波算法中积分计算的复杂性，通过假定目标参数服从高斯分布等简化积分运算得到高斯混合概率假设 (Gaussian mixture probability hypothesis density, GMPHD) 滤波算法。

常规的目标跟踪处理方法是将量测信息转换到笛卡尔坐标系进行关联、滤波和融合等处理。最近邻关联 (Nearest neighbor, NN)、单目标的概率数据关联 (Probabilistic data association, PDA)、多目标的联合概率数据关联[3] (Joint probabilistic data association, JPDA) 和多假设跟踪 (Multiple hypotheses tracking, MHT) 等经典跟踪算法都有着较为苛刻的条件，需要知道目标个数等先验知识，无法实现对随机数量目标的直接跟踪。近年来，文献 [4] 中提出基于 RFS 来进行多目标跟踪，并通过计算推导公式，在信息论意义上证明了 PHD 是多目标后验概率的最佳近似。文献 [5] 结合卡尔曼滤波器，提出了 GMPHD 滤波，并对非线性模型采用近似线性化的方式进行扩展，实现对非线性模型的滤波。文献 [6] 采用无迹卡尔曼滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF) 滤波器将极坐标系下的量测数据转至笛卡尔坐标系进行滤波，并采用改进交互式多模型进行机动目标跟踪。文献 [7] 基于 UKF 和容积卡尔曼滤波 (Cubature Kalman filter, CKF) 提出将偏差系数也作为状态变量联合估计的跟踪算法。文献 [8] 提出基于粒子滤波的检测前跟踪算法，通过实验验证了算法能够在强干扰、多目标等复杂情况下进行较稳定的跟踪。文献 [9] 在雷达观测弱小目标的检测前跟踪问题中，提出了基于 GMPHD 平滑滤波器的检测前跟踪技术，通过牺牲一定计算效率来提升算法的估计精度。文献 [10] 在低信噪比条件下，提出了一种结合粒子群优化算法的 PHD 粒子滤波检测前跟踪算法，对预测完成的粒子集进行优化，使得趋向后验概率较大区域，提高了目标定位精度。文献 [11] 将跳跃马尔可夫和 PHD 滤波结合，提出一种检测前跟踪算法，在机动目标数目和运动模型均未知的情况下，利用红外传感器量测数据，有效地实现弱小目标的检测前跟踪。

由于角度、时延和多普勒频率等量测与目标的运动状态的非线性关系，无法直接使用卡尔曼滤波等经典算法进行滤波跟踪。本文采用结合协方差加权的 GMPHD 滤波算法实现对角度和时延数据的滤波，并将滤波结果转换到笛卡尔坐标系，进行融合和矢量速度的估计，最后采用粒子群算法估计目标的矢量速度，有效地提高水下目标个数估计的准确度和跟踪的精度。

1 系统模型

本部分对声呐系统位置模型和声呐方程、机动目标的运动模型、阵列量测数据模型以及参数设置进行说明。

1.1 声呐系统模型

假定声呐系统的最小单元为互不干扰的双基地声呐，并以线阵位置为原点，换能器和线阵的连线为 x 轴建立坐标系，如图 1 所示。设定换能器 $\boldsymbol{Z}_S=[x_S\ \ y_S]^{\mathrm{T}}$ 仅工作在发射模式，发射连续波 (Continuous wave, CW) 信号经过目标反射后，回波信号被线阵 $\boldsymbol{Z}_R=[x_R\ \ y_R]^{\mathrm{T}}$ 接收。其中 φ 为线阵指向与 x 轴正向的夹角，θ_k 为线阵对目标 $\boldsymbol{Z}_k=[x_k\ \ y_k]^{\mathrm{T}}$ 回波信号的观测角度，α_k 为 $\boldsymbol{Z}_R$ 分别到 $\boldsymbol{Z}_k$ 和 $\boldsymbol{Z}_S$ 的夹角 (线阵指向左半面为正方向，右半面为负方向)，β_k 为双基地分置角。k 时刻线阵获得回波量测 $\boldsymbol{M}_k=[\theta_k\ \ \tau_k]^{\mathrm{T}}$ 和 f_k，其中 f_k 为回波的频率。声呐量测数据和目标状态关系如下：

$$\alpha_k=\theta_k+\varphi=\begin{cases}\tan^{-1}\left(\dfrac{y_k-y_R}{x_k-x_R}\right), & x_k\neq x_R,\\[2ex] \pi/2, & x_k=x_R,\end{cases}\tag{1}$$

$$\tau_k=\tau_S+\tau_R=\frac{\|\boldsymbol{Z}_R-\boldsymbol{Z}_k\|}{c}+\frac{\|\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{Z}_S\|}{c},\tag{2}$$

$$\frac{f_k}{f_0}=\frac{1+v_k\cos\varphi_{k,S}/c}{1-v_k\cos\varphi_{k,R}/c}, \tag{3}$$

其中，c 为水中声传播速度，$\|\boldsymbol{A}\|$ 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的二范数，$v_k=\sqrt{v_{k,x}^2+v_{k,y}^2}$，$f_0$ 为换能器发射信号频率。

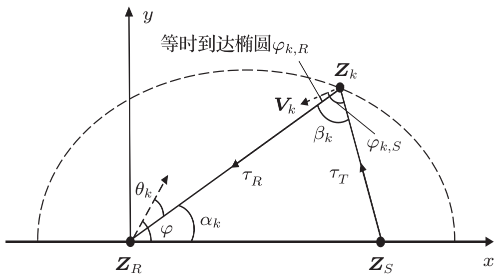

图 1　双基地声呐系统模型

Fig. 1 Bistatic sonar system model

为了体现目标实际状态对角度、时延和多普勒频率的影响，本文采用远场条件下线阵单频率信号估计的克拉美罗界近似获得接收信噪比对跟踪精度的影响。克拉美罗界的具体公式如下：

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\hat{\theta}) &\geqslant \left(\frac{-c}{f_0 d\sin\theta_k}\right)^2\frac{12}{(2\pi)^2\eta N(N^2-1)}\\ &=\frac{12c^2}{(2\pi)^2\eta N(N^2-1)}\frac{1}{f_0^2 d^2\sin^2\theta_k}\\ &=\mathrm{CRB}(\hat{\theta}),\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\hat{\tau}) &\geqslant \left(\frac{-1}{2\pi f_0}\right)^2\frac{2(2N-1)}{\eta N(N+1)}\\ &=\frac{(2N-1)}{2\pi^2\eta N(N+1)}\frac{1}{f_0^2}=\mathrm{CRB}(\hat{\tau}),\end{aligned} \tag{5}$$

$$\operatorname{var}(\hat{f}) \geqslant \frac{12}{(2\pi)^2\eta N(N^2-1)}=\mathrm{CRB}(\hat{f}), \tag{6}$$

其中，η 为接收信噪比，N 为线阵的阵元数。

1.2 声呐方程

1.1 节中采用克拉美罗界近似描述接收信噪比对跟踪精度的影响。本节通过声呐方程分析影响接收信噪比的主要因素。

双基地声呐方程如下：

$$\mathrm{SE}=\mathrm{SN}-\mathrm{TL_{ST}}-\mathrm{TL_{TR}}-\mathrm{NL}+\mathrm{TS}-\mathrm{DT}, \tag{7}$$

其中，SE 为接收信号级，SN 为信源级，$\mathrm{TL_{ST}}$ 为信源至目标处的传播损失，$\mathrm{TL_{TR}}$ 为反射信号到接收器的传播损失，NL 为混响级，TS 为目标强度，DT 为检测阈。

本文为远场目标跟踪，SE 主要受到 TS 的影响 [12]。目标的实际运动状态会影响到回波的信噪比，间接影响对回波的角度、时延和多普勒频率的估计精度，最终影响到目标状态的估计值。

1.3 状态运动模型

本文采用离散系统运动模型描述目标的运动状态，假设系统在 k 时刻的状态向量为 $\boldsymbol{X}_k=[x_k\ \ v_{k,x}\ \ y_k\ \ v_{k,y}]^{\mathrm{T}}$ 和观测向量为 $\boldsymbol{M}_k=[\theta_k\ \ \tau_k]^{\mathrm{T}}$，记 T 为采样时间间隔。通过构建加速度噪声激励的运动方程和 1.1 节中声呐系统的量测数据方程，构建目标的状态方程和量测方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{X}_{k-1}+\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{W}_{k-1},\\ \boldsymbol{M}_k=g(\boldsymbol{X}_k)+\boldsymbol{n}_k,\end{cases} \tag{8}$$

其中，状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{F}_k=\begin{bmatrix}1 & T & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & T\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

噪声激励矩阵为

$$\boldsymbol{G}_k=\begin{bmatrix}T^2/2 & 0\\ T & 0\\ 0 & T^2/2\\ 0 & T\end{bmatrix},$$

g 为 $\boldsymbol{X}_k$ 到 $\boldsymbol{M}_k$ 的非线性映射函数即公式 (1) ∼ (2)。本文假设噪声向量 $\boldsymbol{W}_{k-1}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}v_{k-1,x}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}v_{k-1,y}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}$ 和量测噪声向量 $\boldsymbol{n}_k$ 都服从高斯分布的零均值噪声，其方差分别为 $\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 和 $\boldsymbol{R}_k$。

1.4 量测转换

上述量测数据难以直观地表达目标的运动态势和分析。将方位和时延量测信息转换笛卡尔坐标系，进行分析和进一步计算，转换公式如下：

联立公式 (1) 和公式 (2)，代入余弦定理可得

$$\boldsymbol{Z}_k=\begin{bmatrix}x_k\\ y_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_R\\ y_R\end{bmatrix}+\frac{c^2\tau_k^2-D^2}{2(c\tau_k-D\cos\alpha_k)}\begin{bmatrix}\cos\alpha_k\\ \sin\alpha_k\end{bmatrix}, \tag{9}$$

其中，D 为双基地基线长度，即 $D=\|\boldsymbol{Z}_R-\boldsymbol{Z}_S\|$。

转换后的协方差采用一阶泰勒公式近似计算，具体公式推导详见文献 [13]，由于公式较长本文不再阐述。

水下目标速度可采用差值公式 (10) 进行简单计算，虽然该方法计算效率高，但是对矢量速度的估

计精度不高。为了解决此问题，本文采用粒子群算法对近似线性化的多普勒公式进行处理，在牺牲计算效率下获得较高的跟踪精度。

$$\hat{\boldsymbol{V}}_k = (\boldsymbol{Z}_k - \boldsymbol{Z}_{k-1})/T. \tag{10}$$

多普勒公式近似线性化如下：

水下目标运动速度，相对于声速较小，即 $v_k \ll c$。多普勒频移公式 (3) 简化为

$$\begin{aligned}\frac{f_k}{f_0} &\approx 1 + \frac{2}{c}(v_k \cos\varphi_{k,S} + v_k \cos\varphi_{k,R}) \\ &= 1 + \frac{2}{c}\begin{bmatrix} v_{k,x} \\ v_{k,y}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\boldsymbol{Z}_R - \boldsymbol{Z}_k}{\|\boldsymbol{Z}_R - \boldsymbol{Z}_k\|} + \frac{\boldsymbol{Z}_S - \boldsymbol{Z}_k}{\|\boldsymbol{Z}_S - \boldsymbol{Z}_k\|}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

对式 (11) 进行求解得

$$a_k v_x + b_k v_y + c_k = 0, \tag{12}$$

其中：

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{c}\left[\frac{x_R - x_k}{\sqrt{(x_R - x_k)^2 + (y_R - y_k)^2}} + \frac{x_S - x_k}{\sqrt{(x_S - x_k)^2 + (y_S - y_k)^2}}\right], \\ b_k &= \frac{2}{c}\left[\frac{y_R - y_k}{\sqrt{(x_R - x_k)^2 + (y_R - y_k)^2}} + \frac{y_S - y_k}{\sqrt{(x_S - x_k)^2 + (y_S - y_k)^2}}\right], \\ c_k &= 1 - f_k/f_0. \end{aligned}$$

当目标被多个线阵基地观测时，可通过联立公式 (12) 进行矢量速度的求解为

$$\begin{bmatrix} a_{k,1} & b_{k,1} \\ a_{k,2} & b_{k,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{k,x} \\ v_{k,y}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{k,1} \\ c_{k,2}\end{bmatrix} = 0. \tag{13}$$

由于目标处于远场，采用固定系数项的方法进行方差估计：

$$\sigma^2_{v_{k,x}} \approx \frac{a^2_{k,1}}{f_0^2}\sigma^2_{f_{k,1}}, \quad \sigma^2_{v_{k,y}} \approx \frac{b^2_{k,2}}{f_0^2}\sigma^2_{f_{k,2}}. \tag{14}$$

2 算法描述

本文算法思路：在声呐系统中首先采用GM-PHD算法 (具体推导详见文献 [5] 对量测信息进行滤波，再将滤波所得量测数据转换笛卡尔坐标系并和预测位置进行协方差加权融合，并采用粒子群算法处理多普勒频率求解矢量速度，最终得到目标的位置和速度的状态估计。算法流程图如图2所示。

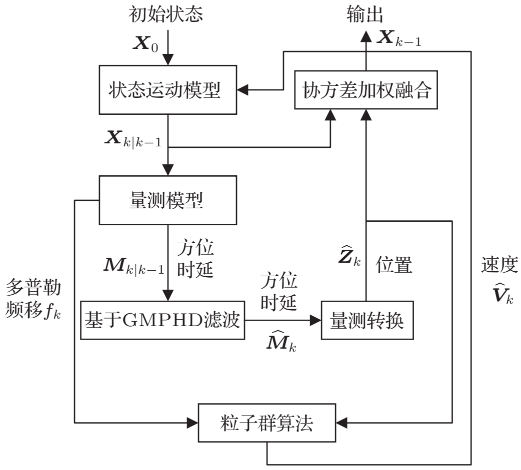

图2　算法流程图

Fig. 2 Arithmetic flow chart

PHD算法中通过结合RFS和贝叶斯估计理论得到后验概率密度一阶矩，后验概率密度一阶矩的预测 $v_{k|k-1}$ 和更新 v_k 公式如下：

$$v_{k|k-1}(x) = \int p_{s,k}(\zeta) f_{k|k-1}(x|\zeta) v_{k-1}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int \beta_{k|k-1}(x|\zeta) v_{k-1}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \gamma_k(x), \tag{15}$$

$$v_k(x) = [1 - p_{D,k}(x)]\, v_{k|k-1}(x) + \sum_{z\in \boldsymbol{Z}_k} \frac{p_{D,k}(x) g_k(z|x) v_{k|k-1}(x)}{\kappa_k(z) + \int p_{D,k}(\xi) g_k(z|\xi) v_{k|k-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi}, \tag{16}$$

其中，$p_{s,k}$ 和 $p_{D,k}$ 分别为目标从 $k-1$ 时刻存活至 k 时刻的概率和目标在 k 时刻被检测的概率，$f_{k|k-1}$ 为目标转移函数，$\beta_{k|k-1}$ 和 γ_k 分别为衍生目标和新生目标的后验概率密度一阶矩，g_k 为似然函数，κ_k 为杂波密度。

通过引入以下3个假设条件来简化离散PHD算法的复杂度：(1) 目标运动过程和声呐量测均服从高斯模型；(2) 每个观测目标独立演化和产生量测结果；(3) 量测杂波数目服从泊松分布。

公式 (15) 和公式 (16) 简化为

$$v_{k-1}(x)=\sum_{i=1}^{J_{k-1}} w_{k-1}^{i}\mathcal{N}\left(x;m_{k-1}^{i},P_{k-1}^{i}\right),\tag{17}$$

$$v_{k|k-1}(x)=v_{S,k|k-1}(x)+v_{\beta,k|k-1}(x)+\gamma_k(x),\tag{18}$$

其中，J_{k-1} 为所有目标运动状态的数目，$v_{S,k|k-1}$、$v_{\beta,k|k-1}$ 为存活和衍生目标的后验概率一阶矩 (具体表达式详见文献 [5]。

算法具体流程描述如下 (其中 2.1 节到 2.3 节为结合协方差加权融合的 GMPHD 滤波，2.4 节为量测转换及融合，2.5 节为结合粒子群算法的矢量速度生成)。

2.1　预测量测和新生量测

假定 $k-1$ 时刻的融合输出的目标状态 $\boldsymbol{X}_{k-1}$、协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_{k-1}$ 及相应权值 $\boldsymbol{w}_{k-1}$ 作为当前时刻的初始状态，目标状态向量 $\boldsymbol{X}_{k-1}$ 以概率 p_s 存活至 k 时刻，不考虑衍生目标。

k 时刻预测权值与 $k-1$ 时刻输出权值关系为

$$w_{k|k-1}^{n}=p_s w_{k-1}^{n}.\tag{19}$$

通过公式 (8) 中状态方程的线性，可得预测状态 $\boldsymbol{X}_{k|k-1}^{n}$ 及协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_{k|k-1,X}^{n}$ 计算公式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_{k|k-1}^{n}&=\boldsymbol{F}_k^n\boldsymbol{X}_{k-1}^{n},\boldsymbol{P}_{k|k-1,X}^{n}\\&=\boldsymbol{F}_k^n\boldsymbol{P}_{k-1}^{n}\left(\boldsymbol{F}_k^n\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{Q}_k\left(\boldsymbol{G}_k\right)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{20}$$

由公式 (1) 和公式 (2) 可知，方位和时延的量测信息与目标的位置有关。通过对目标的预测状态进行量测获得方位和时延的预测值和协方差矩阵，具体计算公式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{k|k-1}^{n}&=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_{k-1}^{n},\\\boldsymbol{P}_{k|k-1,Z}^{n}&=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1,X}^{n}\left(\boldsymbol{H}_k\right)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{M}_{k|k-1}^{n}&=g^{-1}(\boldsymbol{Z}_{k|k-1}^{n}),\\\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{n}&=\mathrm{CRB}(\boldsymbol{Z}_{k|k-1}^{n}),\end{aligned}\tag{21}$$

其中，$n=1,2,\cdots,\mathrm{num}_{k-1}$，$\boldsymbol{H}_k=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0;\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$，$\mathrm{CRB}(\boldsymbol{Z}_{k|k-1}^{n})$ 通过目标预测位置所求得的角度和时延的克拉美罗界。$\mathrm{CRB}(\boldsymbol{Z}_{k|k-1}^{n})$ 具体表达如下：

$$\mathrm{CRB}(\boldsymbol{Z}_{k|k-1}^{n})=\mathrm{diag}\left[\mathrm{CRB}(\hat{\theta})\ \ \mathrm{CRB}\left(\hat{\tau}\right)\right].\tag{22}$$

由于目标出现的随机性引入新生量测，新生量测具体参数如式 (23)：

$$w_{k|k-1}^{n}=w_{k,\gamma}^{n},\quad \boldsymbol{M}_{k|k-1}^{n}=\boldsymbol{M}_{k,\gamma}^{n},\quad \boldsymbol{P}_{k|k-1}^{n}=\boldsymbol{P}_{k,\gamma},\tag{23}$$

其中，$w_{k,\gamma}^{n}$、$\boldsymbol{M}_{k,\gamma}^{n}$、$\boldsymbol{P}_{k,\gamma}$ 为所设定的新生量测的参数。

2.2　参数更新

假定目标检测概率为 $P_{D,k}$，首先更新未检测到目标的权值，即公式 (16) 的前半部分，具体参数更新如式 (24)：

$$\begin{aligned}&w_k^n=\left(1-P_{D,k}\right)w_{k|k-1}^{n},\\&\boldsymbol{M}_k^n=\boldsymbol{M}_{k|k-1}^{n},\boldsymbol{P}_k^n=\boldsymbol{M}_{k|k-1}^{n}.\end{aligned}\tag{24}$$

假定量测中第 j 个检测值服从 $\mathcal{N}\left(\boldsymbol{M}_k^j,\boldsymbol{S}_k^j\right)$，$\boldsymbol{M}_k^j$ 为新息矩阵，κ 为虚警概率。更新目标参数与每个检测值进行匹配计算，采用协方差加权的方法对每种匹配组合进行预测值和检测值的滤波，参数更新如下：

$$w_k^{j\times\mathrm{num}_{k|k-1}+n}=P_{D,k}w_{k-1}^{n}N(\boldsymbol{M};\boldsymbol{M}^j,\boldsymbol{S}_k^j).\tag{25}$$

权值归一化处理如下：

$$\begin{aligned}&w_k^{j\times\mathrm{num}_{k|k-1}+n}\\&=\frac{w_k^{j\times\mathrm{num}_{k|k-1}+n}}{\kappa+\sum_{m=1}^{\mathrm{num}_{k|k-1}}w_k^{j\times\mathrm{num}_{k|k-1}+m}}.\end{aligned}\tag{26}$$

利用协方差加权法将预测量测值 $\boldsymbol{M}_{k|k-1}^{n}$ 和实际量测值 $\boldsymbol{M}_k^j$ 进行融合，每个量测值 $\boldsymbol{M}_k$ 的生成如下：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{M}_k^{j\times\mathrm{num}_{k|k-1}+n}\\&=\left(\boldsymbol{S}_k^j+\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{n}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{S}_k^j\boldsymbol{M}_{k|k-1}^{n}+\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{n}\boldsymbol{M}_k^j\right),\\&\boldsymbol{P}_k^{j\times\mathrm{num}_{k|k-1}+n}\\&=\left(\boldsymbol{S}_k^j+\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{n}\right)^{-1}\boldsymbol{S}_k^j\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{n},\end{aligned}\tag{27}$$

其中，$\mathrm{num}_{k|k-1}$ 为 2.1 节产生的预测和新生量测的总数。

2.3　筛检和聚合

前面两步产生更新的量测值总数为 $\mathrm{num}_{k|k-1}\times\mathrm{num}_{k,M}$，其中 $\mathrm{num}_{k,M}$ 为实际量测集中的数目。为了减轻后续的计算量，首先采用设定阈值 PHD_w，剔除权值 w 较小的点，再通过设定阈值 PHD_M 聚合相近的滤波估计值。

对更新的量测集进行阈值 PHD_w 筛检，将权值较小的剔除，具体表达式如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{I}=\{&j\in[1,2,\cdots,\\&\mathrm{num}_{k|k-1}\times\mathrm{num}_{k,M}]|w_k^j>\mathrm{PHD\_}w\}.\end{aligned}\tag{28}$$

假定集合 $\mathbf{I}$ 中最大权值的量测为 $\boldsymbol{M}_k^{\max}$，采用设定阈值 PHD_M 对集合 $\mathbf{I}$ 中所有量测聚合。

首先通过阈值筛检出最大权值的量测 $\boldsymbol{M}_k^{\max}$ 附近的量测集合 $\mathbf{L}$，具体表达式如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{L}=\big\{&j\in\mathbf{I}|(\boldsymbol{M}_k^{\max}-\boldsymbol{M}_k^j)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_k^{\max})^{-1}\\&\times(\boldsymbol{M}_k^{\max}-\boldsymbol{M}_k^j)<\text{PHD\_}M\big\}.\end{aligned}\tag{29}$$

对筛检集合 $\mathbf{L}$ 中所有量测值进行权值的加权求和处理，具体表达式如下：

$$\begin{aligned}&\hat{w}_k^l=\sum_{j\in\mathbf{L}}w_k^j,\quad \hat{\boldsymbol{M}}_k^l=\frac{1}{\hat{w}_k^l}\sum_{j\in L}w_k^j\boldsymbol{M}_k^j,\\&\hat{\boldsymbol{P}}_k^l=\frac{1}{\hat{w}_k^l}\sum_{j\in\mathbf{L}}w_k^j\Big(\boldsymbol{P}_{k|k-1}^j\\&\qquad+(\boldsymbol{M}_k^{\max}-\boldsymbol{M}_k^j)(\boldsymbol{M}_k^{\max}-\boldsymbol{M}_k^j)^{\mathrm{T}}\Big).\end{aligned}\tag{30}$$

集合 $\mathbf{I}$ 中剔除集合 $\mathbf{L}$，

$$\mathbf{I}\backslash=\mathbf{L}.\tag{31}$$

重复公式 (29)～(31) 直到集合 $\mathbf{I}$ 为空集。

2.4 实际位置估计

假定 2.3 节聚合后个数 num_T，即 GMPHD 滤波估计目标个数为 num_T。通过最邻近分配的方法使估计值 ($\hat{\boldsymbol{M}}_k^l$ 和 $\hat{\boldsymbol{P}}_k^l$) 与预测值匹配，并进行加权融合 (若目标为第一次出现则不进行加权融合，直接保留)：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_k^l=&\left(\boldsymbol{P}_{k|k-1,Z}+\hat{\boldsymbol{P}}_{k,Z}^l\right)^{-1}\left(\boldsymbol{P}_{k|k-1,Z}\,g\Big(\hat{\boldsymbol{M}}_k^l\Big)\right.\\&\left.+\hat{\boldsymbol{P}}_{k,Z}^l\hat{\boldsymbol{Z}}_{k|k-1}^n\right),\\\boldsymbol{P}_k^l=&\left(\boldsymbol{P}_{k|k-1,Z}+\hat{\boldsymbol{P}}_{k,Z}^l\right)^{-1}\boldsymbol{P}_{k|k-1,Z}\hat{\boldsymbol{P}}_{k,Z}^l,\end{aligned}\tag{32}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{P}}_{k,Z}^l$ 为 $\hat{\boldsymbol{P}}_k^l$ 利用文献 [13] 中转换公式所得。

2.5 矢量速度估计

由公式 (13) 可知，目标的矢量速度可以通过多普勒频率近似解算得到。当目标被两个线阵观测到时，可以通过求公式 (13) 的唯一交点获得矢量速度，但当目标被 3 个或以上线阵观测到时，由于量测值存在误差可能产生多个交点，因而本文采用粒子群的方法求取距离各个线阵解算公式 (13) 距离最近的点，获得目标的矢量速度估计。假定粒子群算法代价函数如下：

$$\text{price}=\sum_{j=1}^{\mathrm{num}_o}\frac{\left|a_k^j\hat{v}_{k,x}+b_k^j\hat{v}_{k,y}+c_k^j\right|}{\sqrt{(a_k^j)^2+(b_k^j)^2}}.\tag{33}$$

假定第 i 个粒子值 $\boldsymbol{X}_{i,pso}=[v_{i,pso}\quad v_{i,pso}]^{\mathrm{T}}$，第 k 次迭代时第 i 个粒子的个体最优值为 $\boldsymbol{P}\_ibest_i^k$，MIN_$Y(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 函数为分别将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 带入公式 (33) 计算，返回代价小的一方。

算法流程为首先随机化初始值，在迭代循环中更新个体最优值 $\boldsymbol{P}\_ibest$、全局最优值 $\boldsymbol{P}\_gbest$ 和粒子值 $\boldsymbol{X}_{pso}$，迭代循环完后输出全局最优值 $\boldsymbol{P}\_gbest$ 作为矢量速度 $\boldsymbol{V}$ 的估计值。具体计算步骤如下：

算法 1　粒子群算法

输入： 粒子个数 M，迭代次数 N，惯性因子 ω_{pso}，调节向着最优全局和最优个体前进的因子 c_1 和 c_2，随机初始化粒子群体的 $\boldsymbol{X}_{pso}$、个体最优 $\boldsymbol{P}\_ibest$ 和全局最优 $\boldsymbol{P}\_gbest$

```
FOR k = 1 : N
  FOR i = 1 : M
    P_ibest_i^k = MIN_Y(P_ibest_i^{k-1}, X_i)
  END
    P_gbest = MIN_Y(P_gbest, P_ibest)
  FOR i = 1 : M
    v_{i,pso}^k = ω_pso v_{i,pso}^{k-1} + c1 rand(P_ibest_i^k − X_i)
                  + c2 rand(P_gbest^k − X_i)
    X_i = X_i + v_{i,pso}^k
  END
END
```

输出： 矢量速度 $\boldsymbol{P}\_gbest$

3 仿真与分析

本文仿真实验通过对比两种常见的关联算法和基于 GMPHD 滤波算法的跟踪效果，分析基于 GMPHD 滤波的跟踪算法的可行性。设置实验通过比较不同信噪比下跟踪随机数目的目标，分析基于 GMPHD 滤波的跟踪算法的优越性。

由 1.2 节可知，接收信号的信噪比主要受目标反射级 TS 影响，假定本文下述的信噪比均为接收信号级 SE 与目标反射级 TS 之差的结果，即接收信号级 SE 中不变的部分。其中目标反射级 TS 的函数假设如下：

$$\mathrm{TS}_k=\mathrm{TS}_{\max}\exp\left[\frac{-(\varphi_{k,R}+\beta/2-\pi/2)^2}{2\sigma_{\mathrm{TS}}^2}\right]-30\ \mathrm{dB}.$$

两种仿真实验的运动参数和反射级参数采用相同的假设，具体参数设置如表 1 所示。

表 1　仿真参数

Table 1　Simulation parameters

参数	参数值
$\mathrm{TS}_{\max}$	40 dB
σ_{TS}	0.089 rad
f_0	3000 Hz
d	0.25 m
$\boldsymbol{Z}_S$	[−5 m; 0 m]
$\sigma_{\boldsymbol{Z}_S,x}$; $\sigma_{\boldsymbol{Z}_S,y}$	0.1 m/s; 0.1 m/s
$\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{R}1}$	[0 m; 0 m]
$\sigma_{\boldsymbol{R}_1,x}$; $\sigma_{\boldsymbol{R}_1,y}$	0.1 m/s; 0.1 m/s
$\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{R}2}$	[−5 m; 5 m]
$\sigma_{\boldsymbol{R}_2,x}$; $\sigma_{\boldsymbol{R}_2,y}$	0.1 m/s; 0.1 m/s
T	1 s

仿真实验共分为两部分：第一部分仿真实验是已知运动目标个数下，比较最邻近 NN 关联算法、高斯假设下最优的 JPDA 关联算法和 GMPHD 滤波的跟踪效果。第二部分仿真实验是运动目标个数未知下，GMPHD 滤波的跟踪仿真分析。

仿真一：假定实际目标的运动模型共有两种为匀速直线运动 CV 模型和匀速转弯 CT 模型，目标数目为 3 个，且均可被观测平台同时检测。目标 1 和目标 2 都为直线运动，目标 3 为混合运动，运动状态设置如表 2 所示。

表 2　仿真一目标运动状态

Table 2　Simulation I target motion state

目标	运动状态	运动方式	出现帧	消失帧
1	$\boldsymbol{X}_0=[-100\text{ m}\quad 4\text{ m/s}\quad 100\text{ m}\quad 0\text{ m/s}]^{\mathrm{T}}$	CV	1	20
2	$\boldsymbol{X}_0=[-100\text{ m}\quad 2\text{ m/s}\quad 80\text{ m}\quad 0.5\text{ m/s}]^{\mathrm{T}}$	CV	1	20
3	$\boldsymbol{X}_0=[-90\text{ m}\quad 2\text{ m/s}\quad 90\text{ m}\quad -1\text{ m/s}]^{\mathrm{T}}$	CV	1	3
	$\omega=0.1$ rad/s	CT	4	20

表 2 中 ω 为匀速转弯 CT 模型的转弯率。匀速转弯 CT 的实际状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{F}_k'=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\sin\omega T}{\omega} & 0 & \dfrac{\cos\omega T-1}{\omega}\\ 0 & \cos\omega T & 0 & -\sin\omega T\\ 0 & \dfrac{1-\cos\omega T}{\omega} & 1 & \dfrac{\sin\omega T}{\omega}\\ 0 & \sin\omega T & 0 & \cos\omega T\end{bmatrix}.$$

经过 NN、JPDA(漏关联数据采用预测值)和 GMPHD 算法进行跟踪后进行比较。目标运动状态公式 (8) 中 $\boldsymbol{W}_{k-1}$ 服从的高斯分布 $\boldsymbol{Q}_{k-1}=\mathrm{diag}[\sigma_{a,x}\quad\sigma_{a,y}]$，取 $\sigma_{a,x}=0.1\text{ m/s}^2$ 和 $\sigma_{a,y}=0.1\text{ m/s}^2$。GMPHD 算法中新生量测取值为方向取值区间 [0 rad　π/3 rad]、时延取值区间 [0.09 s　0.19 s] 各个区间取中间 2 个 4 等分点，共计 4 种组合，协方差取值为 $\mathrm{diag}[0.01\text{ rad}^2\quad 0.02\text{ s}^2]$。跟踪效果图如图 3 所示。

由于目标均可被直接观测，采用标准差的方式进行分析比较。图 3 中水平方向跟踪误差和竖直方向跟踪误差如图 4 和图 5 所示。

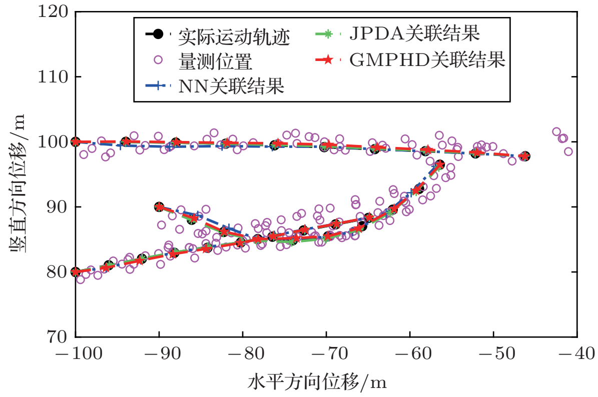

图 3　三种算法跟踪轨迹

Fig. 3　Track of three algorithms

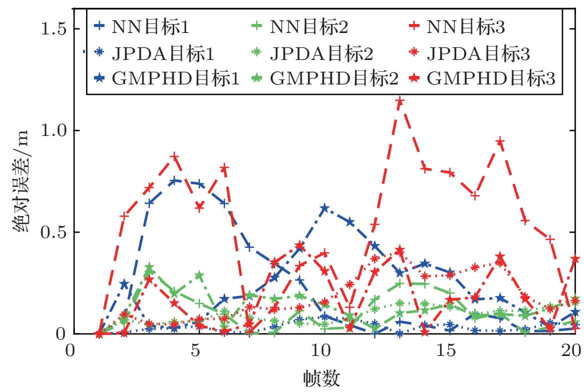

图 4　三种算法水平跟踪误差

Fig. 4　Horizontal tracking error of three algorithms

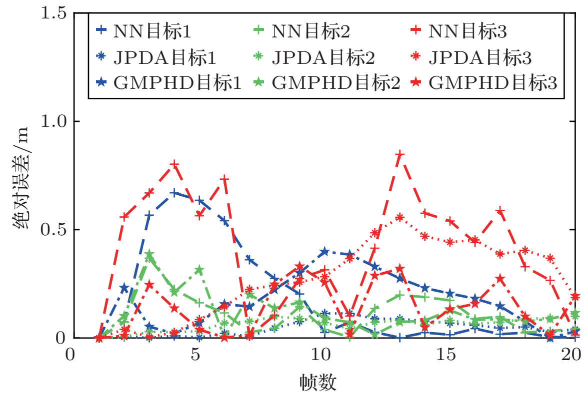

图 5　三种算法竖直跟踪误差

Fig. 5　Vertical tracking error of three algorithms

经过100次蒙特卡洛仿真实验后，得到最邻近关联NN算法、联合数据关联JPDA算法和本文GMPHD滤波算法的平均跟踪误差如表3所示。

由表3可知，在目标个数、运动条件已知和多普勒频率求解速度下，JPDA关联跟踪效果最优，GMPHD滤波跟踪效果次之，NN关联跟踪效果最差。目标1的跟踪效果中纵坐标跟踪误差都小于横坐标的跟踪误差，目标2二者误差差距不大，目标3则是横坐标误差较大，也证明了跟踪算法在运动变化小的轴跟踪误差较小。目标3由于实际运动模型的非线性(详见仿真一中$\boldsymbol{F}_k'$)与预测矩阵(1.2节中$\boldsymbol{F}_k$)的不匹配，使得预测状态值相较于真实值有较大的误差，跟踪效果较差。从表3也可知，JPDA算法对目标3跟踪，由于模型的不匹配使得跟踪误差相较于目标1和目标2的跟踪效果，增长得更加快，得出JPDA算法对于目标模型的匹配度要求相较NN和GMPHD算法更高，即NN算法和GMPHD算法对模型的不匹配的冗余度比JPDA算法高。仿真证明在目标个数、运动条件已知条件下，基于GMPHD滤波的跟踪算法可趋近于最优的JPDA关联跟踪。

仿真二：假定实际目标的运动模型也为匀速直线运动CV模型和匀速转弯CT模型。目标数目也为3个，但运动目标被分时观测，且假设目标检测概率$P_d = 0.9$。由于目标的出现和消失无法直接采用上述关联算法跟踪，仿真对基于GMPHD滤波的跟踪算法进行不同信噪比和反馈速度计算方法的分析比较。

目标1和目标2都为匀速直线CV运动，目标3为匀速转弯CT运动，运动状态设置如表4所示，GMPHD滤波的参数设置与仿真一相同。粒子群算法中粒子个数设置500个，迭代次数设置100次，惯性因子设置0.8，控制群体和个体对迭代的影响因子均设置0.5。

由于目标的跟踪可能跟丢的情况，采用平均OSPA距离的方法进行误差分析。蒙特卡洛实验100次40 dB下目标跟踪的平均OSPA距离变化如图6所示，目标的平均个数估计变化如图7所示。蒙特卡洛实验100次32 dB下目标跟踪的平均OSPA距离变化如图8所示，目标的平均个数估计变化如图9所示。

表3 三种算法跟踪误差

Table 3 Tracking error of three algorithms

跟踪算法	目标1跟踪误差	目标2跟踪误差	目标3跟踪误差
NN	X轴标准差：0.429 m	X轴标准差：0.249 m	X轴标准差：0.592 m
	Y轴标准差：0.244 m	Y轴标准差：0.238 m	Y轴标准差：0.399 m
	GDOP误差：0.494 m	GDOP误差：0.344 m	GDOP误差：0.713 m
JPDA	X轴标准差：0.102 m	X轴标准差：0.096 m	X轴标准差：0.255 m
	Y轴标准差：0.067 m	Y轴标准差：0.088 m	Y轴标准差：0.301 m
	GDOP误差：0.122 m	GDOP误差：0.131 m	GDOP误差：0.394 m
GMPHD	X轴标准差：0.329 m	X轴标准差：0.257 m	X轴标准差：0.454 m
	Y轴标准差：0.241 m	Y轴标准差：0.258 m	Y轴标准差：0.337 m
	GDOP误差：0.407 m	GDOP误差：0.364 m	GDOP误差：0.565 m

表4 仿真二目标运动状态

Table 4 Simulation II target motion state

目标	运动状态	运动方式	出现帧	消失帧
1	$\boldsymbol{X}_0 = [-100\ \text{m}\ \ 4\ \text{m/s}\ \ 100\ \text{m}\ \ 0\ \text{m/s}]^{\text{T}}$	CV	1	20
2	$\boldsymbol{X}_0 = [-100\ \text{m}\ \ 2\ \text{m/s}\ \ 80\text{m}\ \ 0.5\ \text{m/s}]^{\text{T}}$	CV	1	10
3	$\boldsymbol{X}_0 = [-90\ \text{m}\ \ 2\ \text{m/s}\ \ 90\ \text{m}\ \ -1\ \text{m/s}]^{\text{T}}\quad \omega = 0.1\ \text{rad/s}$	CT	8	14

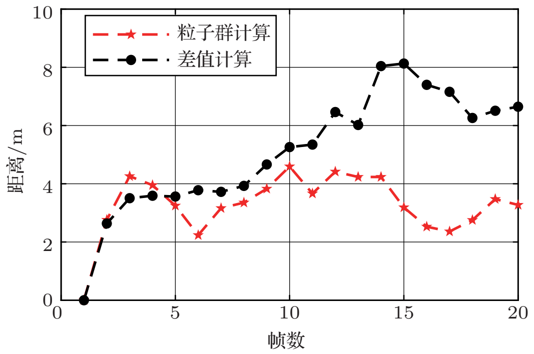

图 6　40 dB 不同速度反馈下基于 GMPHD 滤波跟踪的平均 OSPA 距离

Fig. 6　Average OSPA distance based on GMPHD filter tracking with different speed feedback at 40 dB

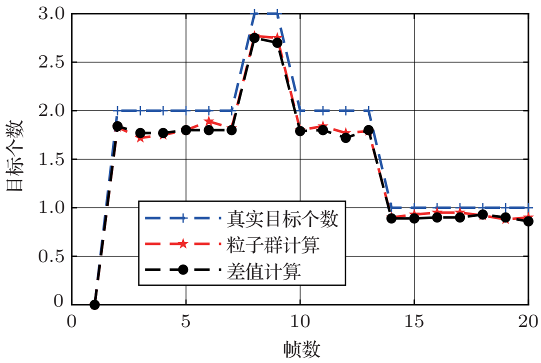

图 7　40 dB 不同速度反馈下基于 GMPHD 滤波跟踪的平均目标个数

Fig. 7　Average number of targets tracked based on GMPHD filter with different speed feedback at 40 dB

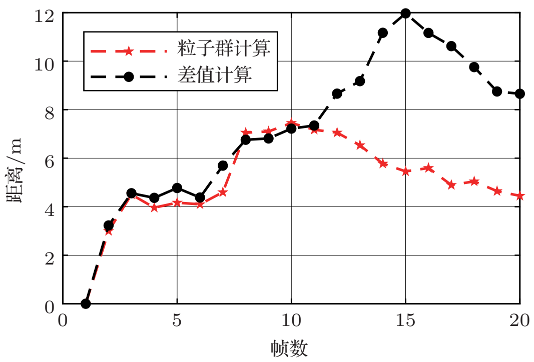

图 8　32 dB 不同速度反馈下基于 GMPHD 滤波跟踪的平均 OSPA 距离

Fig. 8　Average OSPA distance based on GMPHD filter tracking with different speed feedback at 32 dB

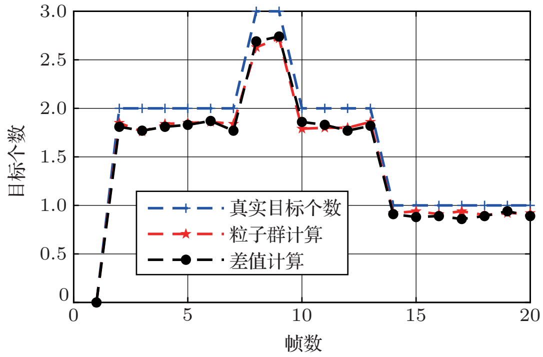

图 9　32 dB 不同速度反馈下基于 GMPHD 滤波跟踪的平均目标个数

Fig. 9　Average number of targets tracked based on GMPHD filter with different speed feedback at 32 dB

由图 6 和图 8 可知，在 40 dB 相较 32 dB 下跟踪误差 OSPA 距离较小，可通过在一定范围内提高换能器的发射功率来提高目标的跟踪精度。图中平均 OSPA 距离随着帧数的变化，可知基于 GMPHD 滤波跟踪有效地抑制跟踪误差 OSPA 距离的增长。由图 7 和图 9 可知，在两种信噪比下都可以较好地实现对目标数目的估计，基于粒子群的计算整体上优于基于差值的反馈速度计算。

对上述的不同信噪比和速度反馈方法的 OSPA 距离取均值，得到表 5。

表 5　不同信噪比下两种速度反馈算法的 OSPA 距离均值

Table 5　OSPA distance mean of two speed feedback algorithms under different SNR

信噪比	32 dB	40 dB
差值	7.6337 m	5.4007 m
粒子群算法	5.3967 m	3.4484 m

由表 5 知 32 dB 下，基于粒子群算法的反馈速度计算对目标的 OSPA 距离精度提升 29.3%，40 dB 下，提升为 36.1%。说明基于粒子群算法的反馈速度计算相对于简单计算的差值有着更有优势，以及在较高信噪比下性能提升更为明显。

为了分析粒子群算法中粒子数目对运算速度的影响，通过比较差值反馈算法和粒子数目为 50、100、150 的粒子群算法的消耗时间和跟踪效果，得到表 6。

表 6 32 dB 速度反馈算法的消耗时间和平均 OSPA 距离

Table 6 Time consumption and average OSPA distance of speed feedback algorithm at 32 dB

计算方法	差值	粒子数目 50 的粒子群	粒子数目 100 的粒子群	粒子数目 150 的粒子群
100 次迭代消耗时间	5.4375 s	18.4531 s	36.4063 s	51.9219 s
平均 OSPA 距离	7.634 m	6.178 m	5.911 m	5.396 m

由表 6 可知，差值计算的速度明显优于粒子群算法，并且随着粒子数目的增长，粒子群算法所消耗的时间也会上涨。但是粒子群算法的跟踪精度 (OSPA 距离) 优于差值方法的跟踪精度，并且随着粒子数目的上升跟踪精度进一步提高。通过引入粒子群算法，可以在消耗时间下提高目标的跟踪精度。

为了分析随着量测误差增长目标跟踪的变换情况，通过比较时延、角度和多普勒频率的误差以倍数增长的跟踪效果，设定式 (21) 中时延、角度和频率误差为初始值的倍数，得到图 10。由图 10 可知，随着量测误差的增长目标的平均 OSPA 距离也会增加，即目标的跟踪精度下降。

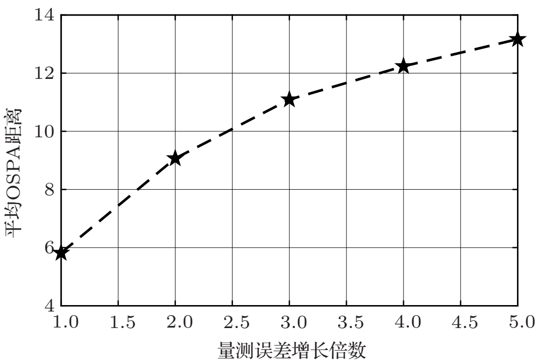

图 10 32 dB 不同量测误差下粒子群算法跟踪的平均 OSPA 距离

Fig. 10 Average OSPA distance tracked by particle swarm optimization algorithm with different measurement errors at 32 dB

仿真结果表明，在目标数目已知情况下 GMPHD 滤波算法优于 NN 关联算法，并且趋近于高斯状态下的最优关联算法 JPDA 的跟踪效果，可以有效地实现对目标的跟踪。在目标数目未知下，结合了粒子群算法进行反馈速度计算的 GMPHD 滤波跟踪算法相较于差值计算反馈速度的算法跟踪精度进一步提高。仿真分析得出通过选取合适的粒子群数目可以实现牺牲可接受范围内的消耗时间，实现较高目标跟踪效果的目的，也可以采用更加高效的阵列处理方法提高量测信息 (时延、角度和多普勒频率) 的精度，进一步提高目标的跟踪精度。

4 结论

本文结合方位、时延和多普勒频率信息对水下目标跟踪进行了研究，通过 GMPHD 滤波算法在方位-时延域上对量测数据进行了处理，将处理结果通过数据转换笛卡尔坐标系进行加权滤波处理，并通过粒子群算法求解矢量速度进行反馈进一步提高目标的跟踪精度。仿真表明相较于传统的 NN 和 JPDA 关联算法，基于 GMPHD 滤波的声呐目标跟踪算法具有较高的跟踪精度，并且能够较好地实现对观测目标个数的估计，具有很好的应用价值。本文对运动模型不匹配的 CT 模型进行跟踪时，虽然能够实现目标的跟踪，但是跟踪效果不如 CV 模型，未来工作可通过添加交互式运动模型进一步提高跟踪精度，采用更加高效的粒子群方法提高目标跟踪的效率。

参 考 文 献

[1] 王辛. 基于声呐方位量测信息的融合技术研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2020.

[2] 王勇, 罗泽举, 王永齐. 一种 GMPHD 滤波改进算法及仿真研究 [J]. 火控雷达技术, 2016, 45(3): 32–37.
Wang Yong, Luo Zeju, Wang Yongqi. An improved algorithm and simulation study of GMPHD filter[J]. Fire Control Radar Technology, 2016, 45(3): 32–37.

[3] Fortmann T, Bar-Shalom Y, Scheffe M. Sonar tracking of multiple targets using joint probabilistic data association[J]. .IEEE Journal of Oceanic Engineering, 1983, 8(3): 173–184.

[4] Mahler R P S. Multitarget Bayes filtering via first-order multitarget moments[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 39(4): 1152–1178.

[5] Vo B N, Ma W K. The Gaussian mixture probability hypothesis density filter[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4091–4104.

[6] 叶瑾, 许枫, 杨娟, 等. 一种改进的时变转移概率 AIMM 跟踪算法 [J]. 应用声学, 2020, 39(2): 246–252.
Ye Jin, Xu Feng, Yang Juan, et al. An improved AIMM tracking algorithm based on adaptive transition probability[J]. Journal of Applied Acoustics, 2020, 39(2): 246–252.

[7] 石桂欣, 鄢社锋, 刘宇. 水下目标跟踪的改进非线性滤波快速算法 [J]. 应用声学, 2020, 39(1): 89–96.
Shi Guixin, Yan Shefeng, Liu Yu. Improved simplified Unscented/Cubature Kalman filter algorithm for underwater target tracking system[J]. Journal of Applied Acoustics, 2020, 39(1): 89–96.

[8] 刘海嫚, 杨鑫. 基于粒子滤波的检测前被动声呐目标跟踪算法研究 [J]. 声学与电子工程, 2021(3): 17–21.

[9] 朱红鹏, 黄勇, 修建娟, 等. 基于 GM-PHD 平滑器的检测前跟踪技术 [J]. 雷达科学与技术, 2016, 14(6): 648–653, 660.
Zhu Hongpeng, Huang Yong, Xiu Jianjuan, et al. Track-before-detect algorithm using GM-PHD smoothing filter[J]. Radar Science and Technology, 2016, 14(6): 648–653, 660.

[10] 裴家正, 黄勇, 董云龙, 等. 基于 PHD 的粒子滤波检测前跟踪改进算法 [J]. 雷达科学与技术, 2019, 17(3): 263–270, 279.
Pei Jiazheng, Huang Yong, Dong Yunlong, et al. PHD-based particle swarm optimization particle filter radar track-before-detect algorithm[J]. Radar Science and Technology, 2019, 17(3): 263–270, 279.

[11] 薛秋条, 宁巧娇, 吴孙勇, 等. 基于 JMS-SMC-PHD 滤波的检测前跟踪算法 [J]. 红外技术, 2020, 42(8): 783–788.
Xue Qiutiao, Ning Qiaojiao, Wu Sunyong, et al. A track-before-detect algorithm based on a JMS-SMC-PHD filter[J]. Infrared Technology, 2020, 42(8): 783–788.

[12] 邹吉武. 多基地声呐关键技术研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2012.

[13] Coraluppi S. Multistatic sonar localization[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2006, 31(4): 964–974.