第 40 卷 第 4 期
2021 年 7 月

应用声学
Journal of Applied Acoustics

Vol. 40, No. 4
July, 2021

◇ 研究报告 ◇

MIMO声呐的双尺度旋转不变子空间波达方向估计*

姚 琳[1,3] 刘晓东[1,2†]

(1 中国科学院声学研究所 海洋声学技术实验室 北京 100190)

(2 中国科学院声学研究所 声场声信息国家重点实验室 100190)

(3 中国科学院大学 北京 100049)

摘要：为了提高单基地多输入多输出 (MIMO) 声呐阵列的波达方向估计性能，提出了双尺度旋转不变子空间 (DR-ESPRIT) 算法。结合 MIMO 阵列虚拟阵列的结构特征，首先利用 ESPRIT 算法通过各条虚拟线阵内、基线间距不大于半波长的子阵间的旋转不变关系得到无模糊的粗估计结果，之后利用虚拟线阵间、基线较长的子阵间的旋转不变关系得到一组有模糊的精估计结果。参考粗估计结果对精估计结果进行解模糊，最终得到高精度无模糊的角度估计结果。为了降低运算复杂度，利用该思路对降维 ESPRIT 算法也进行改进，提出了双尺度降维 ESPRIT 算法。仿真实验验证了与传统算法相比，双尺度类波达方向估计算法能够有效提高角度估计精度。此外，该文评估了 MIMO 声呐阵列的发射、接收阵元的幅相扰动误差对算法角度估计性能的影响。

关键词：MIMO 声呐；旋转不变子空间；双尺度；解模糊；降维变换

中图法分类号: O427.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-310X(2021)04-0489-09

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2021.04.001

DOA estimation for MIMO sonar using dual-resolution ESPRIT algorithm

YAO Lin[1,3] LIU Xiaodong[1,2]

(1 *Ocean Acoustic Technology Center, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*)

(2 *State Key Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*)

(3 *University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

Abstract: In order to improve the performance of direction of arrival (DOA) algorithm in multiple-input multiple-output (MIMO) sonar, a dual-resolution estimation of signal parameters via rotational invariance techniques(DR-ESPRIT) algorithm is proposed. Based on the construction of virtual array of MIMO sonar array, a low-accuracy but unambiguous coarse estimation is obtained by ESPRIT algorithm though the rotational invariance of short-baseline subarrays. Then, a series of high-accuracy but ambiguous fine estimation can be obtained though the rotational invariance of long-baseline subarrays. Referring to the unambiguous coarse estimation, high-accuracy and ambiguous estimation can be obtained through disambiguation method. In order to reduce the computational burden, dual-resolution estimation is also applied to reduced-dimensional ESPRIT algorithm and dual-resolution reduced-dimensional ESPRIT algorithm is proposed. Compared with conventional ESPRIT algorithm, dual-resolution DOA estimation algorithm can improve the angular estimation accuracy effectively. Finally, the influence of the amplitude and phase disturbance errors of transmitting and receiving arrays on the estimation performance of different algorithms is analyzed through simulation.

Keywords: MIMO sonar; Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques(ESPRIT); Dual-resolution; Disambiguation; Reduced-dimensional transformation

---

2020-09-29 收稿; 2021-01-24 定稿

*中国科学院战略性先导科技专项 (XDA22040602)

作者简介: 姚琳 (1994–), 女, 黑龙江哈尔滨人, 博士研究生, 研究方向: 声呐阵列信号处理。

† 通信作者 E-mail: liuxd@mail.ioa.ac.cn

0 引言

多输入多输出 (Multiple-input multiple-output, MIMO) 技术最早在无线通信领域应用，具有显著优势，并获得了丰富的成果 [1−2]。2006 年，Bekkerman 等 [3] 将 MIMO 思想引入声纳领域。依据 MIMO 声呐收发阵列结构配置上的不同，可以将 MIMO 声呐分为分布式 MIMO 声呐和密集式 MIMO 声呐两类 [4−5]。分布式 MIMO 声呐的各发射和接收阵元间距较大，可以从多个角度观测目标，抑制目标的截面积闪烁，从而提高目标的检测性能 [6−7]。密集式 MIMO 声呐的收发阵元间距较小，发射端发射正交波形，接收端对各正交信号的回波进行分离，从而获得较大孔径的虚拟阵列和更多的自由度 [8]。密集式 MIMO 声呐又可分为单基地 MIMO 声呐和双基地 MIMO 声呐。对于单基地 MIMO 声呐，认为其发射和接收阵列几乎处于相同位置，同一目标相对于收发阵列的方位角相同，而双基地 MIMO 声呐的收发阵列间距较远，同一目标相对于收发阵列的方位角不同 [9−10]。

因为密集式 MIMO 阵列的信号模型与常规单输入多输出 (Single-input multiple-output, SIMO) 阵列的信号模型类似，所以许多密集式 MIMO 阵列的波达方向 (Direction of arrival, DOA) 估计算法都借鉴了 SIMO 阵列的空间谱估计算法。密集式 MIMO 阵列的 DOA 估计方法主要分为两类：第一类利用 MIMO 阵列发射正交波形获得空间平滑的特点，即发射分集平滑 (Transmission diversity smoothing, TDS) 效应，当发射阵元数目大于目标数目时，多目标回波间不相干，所以不需要进行解相干处理，可以直接将高分辨率算法应用于接收阵的接收信号进行 DOA 估计 [11−13]；第二类是利用匹配滤波技术将各正交发射信号的目标回波分离，形成多阵元虚拟阵列，之后利用虚拟阵列的输出信号进行 DOA 估计，这类情况是学者研究的重点。这类情况下的 DOA 估计算法主要又可以分为两种：第一种是非参数类算法，如 Capon 算法、幅度相位估计 (Amplitude phase estimation, APES) 算法、CAPES(Capon and amplitude phase estimation) 算法 [14−15] 等；第二种是参数类算法，如多重信号分类 (Multiple signal classification, MUSIC) 算法 [16]、子空间旋转不变 (Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques, ESPRIT) 算法 [17]、稀疏信号类算法 [18−19] 等。ESPRIT 算法作为高分辨率子空间分解类算法，具有运算量小、实时性好等优点。Duofang 等 [17] 首次提出将 ESPRIT 算法应用于双基地 MIMO 阵列，利用发射阵列和接收阵列的旋转不变结构估计目标的波离方向角 (Direction of departure, DOD) 和波达方向角。之后为了降低算法的运算复杂度，文献 [20] 针对单基地 MIMO 阵列提出了降维 ESPRIT 算法，将高维接收数据变换到低维数据空间后，利用降维虚拟阵列的旋转不变结构进行目标的方位估计。上述的 ESPRIT 类算法在 DOA 估计时均利用了基线间距较短 (小于半波长) 的两子阵间旋转不变关系。加大子阵间距理论上可以提高估计精度，但同时会带来相位模糊的问题 [21−22]。为了提升算法的角度估计精度，文献 [23] 将双尺度 ESPRIT 算法 [22] 推广到双基地分布式 MIMO 阵列的 DOD 和 DOA 估计问题上，其发射阵和接收阵均是由多个均匀线阵构成的分布式稀疏阵列，利用分布式阵列一短一长的双尺度来提高 DOD 和 DOA 的估计精度。参考双尺度 ESPRIT 算法的思想，本文提出了基于单基地 MIMO 声呐的双尺度 ESPRIT 算法和双尺度降维 ESPRIT 算法来提高目标 DOA 估计精度。首先构造短基线间距的子阵得到无模糊的粗精度估计结果，之后结合单基地 MIMO 声呐虚拟阵列的结构特点，构造较长基线子阵获取包含周期模糊的高精度估计结果。在参考粗估计结果进行解模糊后，最终得到无模糊的 DOA 精估计结果。

1 MIMO 声呐阵列信号模型

考虑一密集式单基地 MIMO 声呐系统，接收阵列为 M_r 元均匀线阵，接收阵元间距为 $d_r = \lambda/2$ (λ 为信号波长)；发射阵列为 M_t 元均匀线阵，发射阵元间距为 d_t，两阵列的基线平行或重合。M_t 元发射阵元分别同时发射相互正交的信号 $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{s}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{s}_M]^{\mathrm{T}}$。假设阵列远场存在 K 个目标，各目标的方位角和反射系数分别为 $\theta_1, \cdots, \theta_K$ 和 $\varphi_1, \cdots, \varphi_K$，则 M_r 元接收线阵接收到的信号回波矢量为

$$\boldsymbol{X} = \sum_{k=1}^{K} \varphi_k \boldsymbol{a}_r(\theta_k)\, \boldsymbol{a}_t^{\mathrm{T}}(\theta_k) \boldsymbol{S} + \boldsymbol{W}, \tag{1}$$

式 (1) 中，

$$\boldsymbol{a}_r(\theta_k) = \left[1 \ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi d_r \sin(\theta_k)}{\lambda}} \ \cdots \ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi (M_r-1) d_r \sin(\theta_k)}{\lambda}} \right]$$

代表接收导向矢量，

$$\boldsymbol{a}_t(\theta_k) = \left[1\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi d_t \sin(\theta_k)}{\lambda}}\ \cdots\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi(M_t-1)d_t \sin(\theta_k)}{\lambda}}\right]$$

代表发射导向矢量，$(\cdot)^{\mathrm{T}}$ 表示转置运算，$\boldsymbol{W}$ 代表零均值、方差为 σ_n^2 的高斯白噪声矩阵。

对各接收通道信号做匹配滤波处理，可以得到 M_tM_r 元虚拟阵列的输出：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= \operatorname{vec}\left(\left(\sum_{k=1}^{K}\varphi_k \boldsymbol{a}_r(\theta_k)\boldsymbol{a}_t^{\mathrm{T}}(\theta_k)\boldsymbol{S} + \boldsymbol{W}\right)\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{K}\varphi_k \boldsymbol{a}_{tr}(\theta_k) + \boldsymbol{n},\end{aligned} \tag{2}$$

式 (2) 中，$\mathrm{vec}(\cdot)$ 表示矩阵列拉直运算，$\boldsymbol{a}_{tr}(\theta_k) = \boldsymbol{a}_t(\theta_k)\otimes\boldsymbol{a}_r(\theta_k)$ 表示 MIMO 阵列的虚拟 SIMO 阵列的导向矢量，$\otimes$ 表示 Kronecker 积运算。$(\cdot)^{\mathrm{H}}$ 表示共轭转置运算，$\boldsymbol{n} = \operatorname{vec}\left(\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\right)$，$\boldsymbol{n}$ 仍然服从零均值、方差为 σ_n^2 的高斯分布 [24]。

令 $\boldsymbol{A}_{tr} = \left[\boldsymbol{a}_{tr}(\theta_1), \boldsymbol{a}_{tr}(\theta_2), \cdots, \boldsymbol{a}_{tr}(\theta_K)\right]$，$\boldsymbol{\varphi} = \left[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_K\right]^{\mathrm{T}}$，式 (2) 又可表示为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}_{tr}\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{n}. \tag{3}$$

由式 (2) 可以看出，MIMO 阵列的接收阵信号与各发射信号匹配滤波后的输出都可以看作是一条虚拟线阵的输出。MIMO 阵列的虚拟 SIMO 阵列可以看作由 M_t 条、阵内阵元间距为 d_r 的 M_r 元虚拟均匀线阵构成，且相邻线阵的间距为 d_t。

文献 [17] 将 ESPRIT 算法应用于 MIMO 阵列的波达方向估计，为了避免出现角度估计结果模糊的问题，构造子阵时通常令子阵间距 Δ 满足 $\Delta \leqslant \lambda/2$，所以分别将虚拟 SIMO 阵列的每条虚拟线阵中的左起前 (M_r-1) 个阵元和后 (M_r-1) 个阵元构成子阵，利用这两个子阵间的旋转不变关系进行 DOA 估计。然而 ESPRIT 算法的 DOA 估计精度与子阵间距有关 [22]：

$$\sigma_\theta^2 = \frac{1}{\mathrm{SNR}}\left(\frac{1}{M^2L}\left(\frac{\lambda}{2\pi\Delta\cos(\theta)}\right)^2\right), \tag{4}$$

式 (4) 中，σ_θ^2 表示角度估计均方根误差，SNR 表示信噪比，M 为阵元数目，L 为快拍数。适当增大子阵间距可以提高 DOA 估计精度，但同时会带来角度估计结果模糊的问题 [21−22]。

为了提高算法的 DOA 估计精度，参考双尺度 ESPRIT 算法 [22,25] 的思路，结合 MIMO 声呐阵列虚拟阵列的结构特点，本文提出了适用于 MIMO 阵列的双尺度 ESPRIT 算法和双尺度降维 ESPRIT 算法。通过 ESPRIT 算法利用短基线 $(d \leqslant \lambda/2)$ 子阵间的旋转不变关系得到无模糊的 DOA 粗估计结果，之后通过双尺度 ESPRIT 算法利用较长基线间距 $(d > \lambda/2)$ 的子阵间旋转不变关系得到存在模糊但精度较高的 DOA 精估计结果。参考粗估计结果进行解模糊处理，最终得到无模糊且精度较高的 DOA 估计结果。为了降低运算复杂度，当 MIMO 阵列的虚拟阵列中有位置重叠的虚拟阵元存在时，本文利用双尺度 DOA 估计的思想，对降维 ESPRIT 算法也进行改进，提出了双尺度降维 ESPRIT 算法。需要明确的是，下文中提到的 ESPRIT 算法、双尺度 ESPRIT 算法以及降维 ESPRIT 算法、双尺度降维 ESPRIT 算法均是基于 MIMO 阵列的前提下提出的。

2 基于 MIMO 阵列的双尺度 DOA 估计算法

假设 M_tM_r 元虚拟阵列 L 个采样点组成的接收数据矩阵 $\boldsymbol{Y} = \left[\boldsymbol{y}(1), \boldsymbol{y}(2), \cdots, \boldsymbol{y}(L)\right]$，令 $\boldsymbol{\Phi} = \left[\boldsymbol{\varphi}(1), \boldsymbol{\varphi}(2), \cdots, \boldsymbol{\varphi}(L)\right]$，$\boldsymbol{N} = \left[\boldsymbol{n}(1), \boldsymbol{n}(2), \cdots, \boldsymbol{n}(L)\right]$，接收数据矩阵可以写为

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}_{tr}\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{N}. \tag{5}$$

采样数据矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 表示为

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{L}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}_{tr}\hat{\boldsymbol{R}}_{\Phi}\boldsymbol{A}_{tr}^{\mathrm{H}} + \sigma_n^2\boldsymbol{I}_{M_tM_r}, \tag{6}$$

式 (6) 中，$\hat{\boldsymbol{R}}_{\Phi} = \dfrac{1}{L}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}}$。

对 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 进行特征分解：

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U}_S\boldsymbol{\Lambda}_S\boldsymbol{U}_S^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{U}_N\boldsymbol{\Lambda}_N\boldsymbol{U}_N^{\mathrm{H}}, \tag{7}$$

式 (7) 中，$\boldsymbol{U}_S$ 为信源所对应的 K 个大特征值的特征矢量张成的信号子空间，$\boldsymbol{U}_N$ 为其余 (M_tM_r-K) 个特征值的特征矢量张成的噪声子空间。

阵列流形矩阵 $\boldsymbol{A}_{tr} = \left[\boldsymbol{a}_{tr}(\theta_1), \boldsymbol{a}_{tr}(\theta_2), \cdots, \boldsymbol{a}_{tr}(\theta_K)\right]$ 张成的空间和信号子空间 $\boldsymbol{U}_S$ 是相等的，因此必然存在唯一的非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$，有式 (8) 成立：

$$\boldsymbol{U}_S = \boldsymbol{A}_{tr}\boldsymbol{T}. \tag{8}$$

2.1 MIMO 阵列 ESPRIT 算法进行粗估计

考虑 MIMO 阵列的虚拟 SIMO 阵列，取每条虚拟线阵中左起前 (M_r-1) 个阵元和后 (M_r-1) 个阵元分别组成结构相同的两个子阵 C_1 和 C_2，两子

阵基线间距 $\Delta = d_r$。这两个子阵满足 ESPRIT 算法的空域旋转不变关系，该旋转不变关系可以表示为

$$\boldsymbol{J}_{C_1}\boldsymbol{A}_{tr}\boldsymbol{\Theta}_C = \boldsymbol{J}_{C_2}\boldsymbol{A}_{tr}, \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{J}_{C_1} = \boldsymbol{I}_{M_t} \otimes \left[\, \boldsymbol{I}_{M_r-1}\ \boldsymbol{0}_{(M_r-1)\times 1} \,\right]$ 为子阵 C_1 的选择矩阵，$\boldsymbol{J}_{C_2} = \boldsymbol{I}_{M_t} \otimes \left[\, \boldsymbol{0}_{(M_r-1)\times 1}\ \boldsymbol{I}_{M_r-1} \,\right]$ 为子阵 C_2 的选择矩阵，$\boldsymbol{\Theta}_C = \mathrm{diag}\left(z_C^1, z_C^2, \cdots, z_C^K \right)$，$z_C^k = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\Delta\sin(\theta_k)/\lambda}$，$\mathrm{diag}(\cdot)$ 表示向量对角矩阵化操作。

将式 (8) 带入 (9) 中，可得

$$\boldsymbol{J}_{C_1}\boldsymbol{U}_S\boldsymbol{\Omega}_C = \boldsymbol{J}_{C_2}\boldsymbol{U}_S, \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{\Omega}_C = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Theta}_C\boldsymbol{T}$。式 (10) 中 $\boldsymbol{\Omega}_C$ 利用最小二乘法求解得到其估计结果：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_C &= \left[\left(\boldsymbol{J}_{C_1}\hat{\boldsymbol{U}}_S\right)^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{J}_{C_1}\hat{\boldsymbol{U}}_S\right)\right]^{-1}\left(\boldsymbol{J}_{C_1}\hat{\boldsymbol{U}}_S\right)^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{J}_{C_2}\hat{\boldsymbol{U}}_S\right)\\ &= \left(\boldsymbol{J}_{C_1}\hat{\boldsymbol{U}}_S\right)^{+}\boldsymbol{J}_{C_2}\hat{\boldsymbol{U}}_S.\end{aligned} \tag{11}$$

之后对 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_C$ 进行特征分解，$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_C$ 的特征值组成的对角阵即为 $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_C$。$\hat{z}_C^k$ 表示对角阵 $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_C$ 上的第 k 个元素，则第 k 个信号的方向余弦粗估计为

$$\hat{\beta}_k^C = \frac{\angle\left(\hat{z}_k^C\right)}{2\pi\Delta/\lambda}, \tag{12}$$

其中，$\angle\left(\hat{z}_k^C\right)$ 表示 $\hat{z}_k^c$ 在 $[-\pi,\pi]$ 范围内的相位，因为 $\Delta = d_r = \lambda/2$，$\hat{z}_k^C$ 的相位是无模糊的，因此得到的方向余弦粗估计结果 $\hat{\beta}_k^C$ 是无模糊的。所以第 k 个信号的 DOA 粗估计结果为

$$\hat{\theta}_k^C = \arcsin\left(\hat{\beta}_k^C\right). \tag{13}$$

2.2 MIMO 阵列双尺度 ESPRIT 算法进行精估计

ESPRIT 算法只利用了基线间隔 $\Delta = d_r$ 的两子阵间旋转不变关系进行 DOA 估计，为了提高算法的估计精度，利用 MIMO 声呐阵列的虚拟 SIMO 阵列中各条虚拟线阵结构相同的特点，提出了 MIMO 阵列的双尺度 ESPRIT 算法。

由于 MIMO 声呐阵列的虚拟阵列由 M_t 条结构相同的虚拟线阵构成，将前 $(M_t - P)$ 条虚拟线阵看作子阵 F_1，后 $(M_t - P)$ 条虚拟线阵看作子阵 F_2，两子阵间的基线长度 $\Delta_1 = Pd_t$。这两个子阵间的空域旋转不变关系可以表示为

$$\boldsymbol{J}_{F_1}\boldsymbol{A}_{tr}\boldsymbol{\Theta}_F = \boldsymbol{J}_{F_2}\boldsymbol{A}_{tr}, \tag{14}$$

其中，$\boldsymbol{J}_{F_1} = \left[\, \boldsymbol{I}_{(M_t-P)M_r}\ \boldsymbol{0}_{(M_t-P)M_r\times PM_r} \,\right]$ 为子阵 F_1 的选择矩阵，$\boldsymbol{J}_{F_2} = \left[\boldsymbol{0}_{(M_t-P)M_r\times PM_r}\ \boldsymbol{I}_{(M_t-P)M_r}\right]$ 为子阵 F_2 的选择矩阵，$\boldsymbol{\Theta}_F = \mathrm{diag}\left(z_F^1, z_F^2, \cdots, z_F^K \right)$，$z_F^k = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\Delta_1\sin(\theta_k)/\lambda}$。实质上双尺度 ESPRIT 算法利用了发射阵列内子阵间的旋转不变关系。

将式 (8) 带入式 (14) 可得

$$\boldsymbol{J}_{F_1}\boldsymbol{U}_S\boldsymbol{\Omega}_F = \boldsymbol{J}_{F_2}\boldsymbol{U}_S, \tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{\Omega}_F = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Theta}_F\boldsymbol{T}$。求解式 (15) 得到 $\boldsymbol{\Omega}_F$ 的估计结果 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_F$。之后对 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_F$ 进行特征分解得到其特征值 $\hat{z}_k^F$，则第 k 个信号的方向余弦精估计结果

$$\hat{\beta}_k^F = \frac{\angle\left(\hat{z}_k^F\right)}{2\pi\Delta_1/\lambda}. \tag{16}$$

由于子阵的基线间距 $\Delta_1 = Pd_t > \lambda/2$，所以 $\hat{z}_k^f$ 得到的 $[-\pi,\pi]$ 范围内的相位是存在模糊周期为 2π 的相位模糊的，因此需要进行解模糊处理。

在进行多目标估计时，由于得到的各目标方向余弦粗估计结果和精估计结果顺序是任意的，所以首先要利用置换矩阵进行方向余弦粗估计和精估计的配对 [25]。配对后，利用方向余弦粗估计结果对精估计结果进行解模糊，最终得到无模糊的精估计 β_k^{lF}：

$$\beta_k^{lF} = \hat{\beta}_k^F + l_k^o\frac{\lambda}{\Delta_1}, \tag{17}$$

式 (17) 中，l_k^o 为模糊周期数，该周期数可以通过式 (18) 搜索得到：

$$l_k^o = \arg\min_{l_k}\left|\hat{\beta}_k^C - \hat{\beta}_k^F - l_k\lambda/\Delta_1\right|, \tag{18}$$

其中，$\lceil(-1-\hat{\beta}_k^F)\Delta_1/\lambda\rceil \leqslant l_k \leqslant \lfloor(1-\hat{\beta}_k^F)\Delta_1/\lambda\rfloor$，$\lceil\cdot\rceil$ 和 $\lfloor\cdot\rfloor$ 分别表示向正和向负无穷大方向取整。

因此可以得到第 k 个信号的无模糊的 DOA 精估计结果：

$$\hat{\theta}_k^F = \arcsin\left(\hat{\beta}_k^{lF}\right). \tag{19}$$

实际上，即使发射阵与接收阵基线不平行，在与接收阵和声线构成的平面垂直的平面内，当发射阵的投影与接收阵夹角 φ 时，MIMO 阵列的虚拟阵列可以看作由 M_t 条、阵内阵元间距为 d_r 的 M_r 元虚拟均匀线阵构成，且相邻虚拟线阵的同号阵元间相位差为 $2\pi d_t\sin(\theta_i+\varphi)/\lambda$，MIMO 虚拟阵列的导向矢量 $\boldsymbol{a}'_{tr}(\theta_k) = \boldsymbol{a}'_t(\theta_k)\otimes\boldsymbol{a}_r(\theta_k)$，$\boldsymbol{a}'_t(\theta_k) = \left[\, 1\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi d_r\sin(\theta_k+\varphi)}{\lambda}}\ \cdots\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi(M_t-1)d_r\sin(\theta_k+\varphi)}{\lambda}} \,\right]^{\mathrm{T}}$，此时仍可以采用双尺度 ESPRIT 算法的思路进行 DOA 估计。

2.3　MIMO 阵列的双尺度降维 ESPRIT 算法

尽管 MIMO 阵列的虚拟阵列由 M_tM_r 个虚拟阵元构成，但当 MIMO 阵列的发射阵阵元间距 d_t 和接收阵阵元间距 d_r 满足一定分数倍关系时，虚拟阵列中会存在大量位置重叠的虚拟阵元。以 $M_r = 8$, $d_r = \lambda/2$、$M_t = 3$, $d_t = 2d_r = \lambda$ 为例。图 1(a) 为 MIMO 声呐阵列模型，三角形表示发射阵元，圆形表示接收阵元。MIMO 声呐阵列的虚拟阵列如图 1(b) 所示，用正方形、圆形、菱形表示的各虚拟线阵分别代表接收阵的接收信号与不同发射信号匹配滤波后得到的输出。由于发射阵元和接收阵元的位置关系，虚拟阵列中会出现位置重叠的虚拟阵元。实际仅有 $M_v = (2M_t + M_r - 2)$ 个位置不同的阵元。为了降低运算复杂度，可以将多个阵元位置重叠的虚拟阵列降维转化为一条均匀线阵，图 1(c) 为降维虚拟 SIMO 阵列。

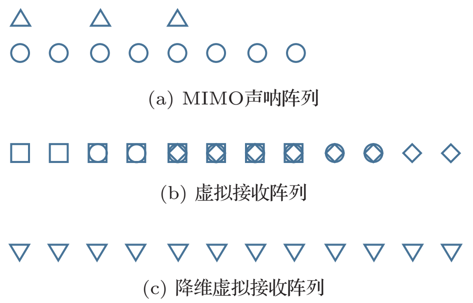


图 1　MIMO 声呐阵列及其虚拟阵列

Fig. 1　MIMO sonar array and its virtual array

定义有效阵元数为 M_v 的降维虚拟 SIMO 阵列导向矢量矩阵为 $\boldsymbol{B} = \left[\boldsymbol{b}(\theta_1),\ \boldsymbol{b}(\theta_2),\ \cdots,\boldsymbol{b}(\theta_K)\right]$, $\boldsymbol{b}(\theta_k) = \left[1\ \ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi d_r\sin(\theta_k)}{\lambda}}\ \ \cdots\ \ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi(M_v-1)d_r\sin(\theta_k)}{\lambda}}\right]$。构造稀疏矩阵 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{C}^{M_tM_r\times M_v}$，令 $\boldsymbol{G}$ 满足 $\boldsymbol{A}_{tr} = \boldsymbol{GB}$，$\boldsymbol{G}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{G} = \left[\boldsymbol{F}_0,\ \boldsymbol{F}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{F}_{M_t-1}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{F}_m = \left[\boldsymbol{0}_{M_r\times 2m},\ \boldsymbol{I}_{M_r},\ \boldsymbol{0}_{M_r\times(2M_t-2m-2)}\right]$, $m = 0, 1,\cdots,M_t-1$。

构造降维转换矩阵 $\boldsymbol{W} = \left(\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}\right)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}$，对回波信号 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 进行降维处理可得

$$\tilde{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}} = \left(\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{R}}_{\Phi}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\left(\left(\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{H}} + \sigma_n^2\boldsymbol{I}_{M_v}. \tag{21}$$

对 $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 进行特征分解得到 $M_v \times K$ 维信号子空间 $\tilde{\boldsymbol{U}}_s$，之后构造新的信号子空间矩阵：

$$\boldsymbol{U}_s' = \left(\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}\right)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{U}}_S. \tag{22}$$

阵列流形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 张成的空间和信号子空间 $\boldsymbol{U}_s'$ 是相等的，存在唯一的非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}'$ 满足

$$\boldsymbol{U}_s' = \boldsymbol{BT}'. \tag{23}$$

降维 ESPRIT 算法取降维后 M_v 元虚拟均匀线阵的左起前 (M_v-1) 个阵元和后 (M_v-1) 个阵元分别组成结构相同的两个子阵 C_1' 和 C_2'，构造子阵 C_1' 和 C_2' 的选择矩阵 $\boldsymbol{J}_{C_1}' = \left[\boldsymbol{I}_{M_v-1}\ \ \boldsymbol{0}_{(M_v-1)\times 1}\right]$ 和 $\boldsymbol{J}_{C_2}' = \left[\boldsymbol{0}_{(M_v-1)\times 1}\ \ \boldsymbol{I}_{M_v-1}\right]$，参考式 (10)～式 (13) 得到各信号方向的粗估计结果。

之后本文提出了 MIMO 阵列的双尺度降维 ESPRIT 算法，拉大两子阵间的基线间距，利用 M_v 元降维虚拟均匀线阵的左起前 (M_v-P_1) 个阵元和后 (M_v-P_1) 个阵元间旋转不变关系进行 DOA 估计，此时两子阵基线间距为 $\Delta_1' = P_1d_r$。构造矩阵 $\boldsymbol{J}_{F_1}' = \left[\boldsymbol{I}_{M_v-P_1}\ \ \boldsymbol{0}_{(M_v-P_1)\times P_1}\right]$ 和 $\boldsymbol{J}_{F_2}' = \left[\boldsymbol{0}_{(M_v-P_1)\times P_1}\ \ \boldsymbol{I}_{M_v-P_1}\right]$，参考式 (15)～式 (16) 求解存在模糊的方向余弦精估计结果。之后利用粗估计结果参考式 (17)～式 (19) 进行解模糊，最终得到无模糊的 DOA 精估计结果。

3　数值仿真与分析

本节进行仿真实验来验证算法的有效性及性能。

为了评估双尺度 ESPRIT 算法及双尺度降维 ESPRIT 算法对点目标进行 DOA 估计的性能，仿真试验采用 6 发 8 收的单基地 MIMO 阵列模型，MIMO 阵列的发射阵为 $M_t = 6$ 元、阵元间距 $d_t = \lambda$ 的均匀线阵，接收阵为 $M_r = 8$ 元、阵元间距 $d_r = \lambda/2$ 的均匀线阵，其虚拟接收阵列中包含大量位置重叠的虚拟阵元。假设在远场同一距离单元内存在 $K = 2$ 个目标，方向角分别为 $\theta_1 = 20°$、$\theta_2 = 25°$，信号快拍数 $L = 128$。

首先评估 MIMO 阵列双尺度 ESPRIT 算法子阵选择不同基线间距时的 DOA 估计性能。分别统计子阵间距 $\Delta = d_t \sim 5d_t$ 时，角度估计结果均方根误差 (Root mean square error, RMSE) 随 SNR 的变化情况，每种 SNR 条件下均进行 $Q = 500$ 次 MonteCarlo 试验。均方根误差 RMSE 定义如下：

$$\mathrm{RMSE}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{QK}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{k=1}^{K}\left(\hat{\theta}_k^{(q)} - \theta_k\right)^2}. \tag{24}$$

仿真结果如图2所示，由于双尺度ESPRIT算法解模糊时需要参考ESPRIT算法的粗估计结果，当SNR较低时，ESPRIT算法估计精度已无法满足正确解模糊的要求，所以从图2中可以看出，当SNR低于 −15 dB时，双尺度ESPRIT算法估计误差与ESPRIT算法相近。随着SNR的增加，与ESPRIT算法相比，双尺度ESPRIT算法DOA估计均方误差明显小于ESPRIT算法，认为加大子阵间距能够起到提高DOA估计精度的作用，且间距 $\Delta_1 = 3d_t$ 时性能最优。所以在接下来的仿真实验中双尺度ESPRIT算法精估计时子阵间距选择 $\Delta_1 = 3d_t$。

之后评估了双尺度降维ESPRIT算法选择不同基线间距时的DOA估计性能。图3展示了子阵间距 $\Delta_2 = 3d_r \sim 13d_r$ 时，角度估计均方根误差随SNR的变化情况。从图3能够看出，适当拉大子阵

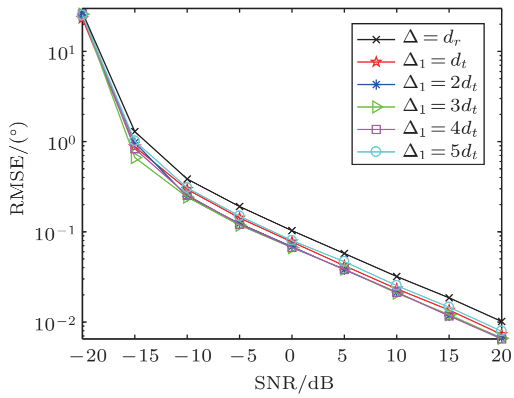


图2 在不同子阵间距的条件下，MIMO阵列双尺度ESPRIT算法的估计性能

Fig. 2 RMSE versus SNR at different interval for dual-resolution ESPRIT algorithm

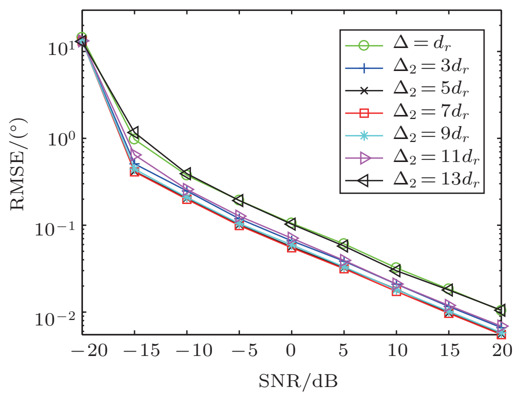


图3 在不同子阵间距的条件下，MIMO阵列双尺度降维ESPRIT算法的估计性能

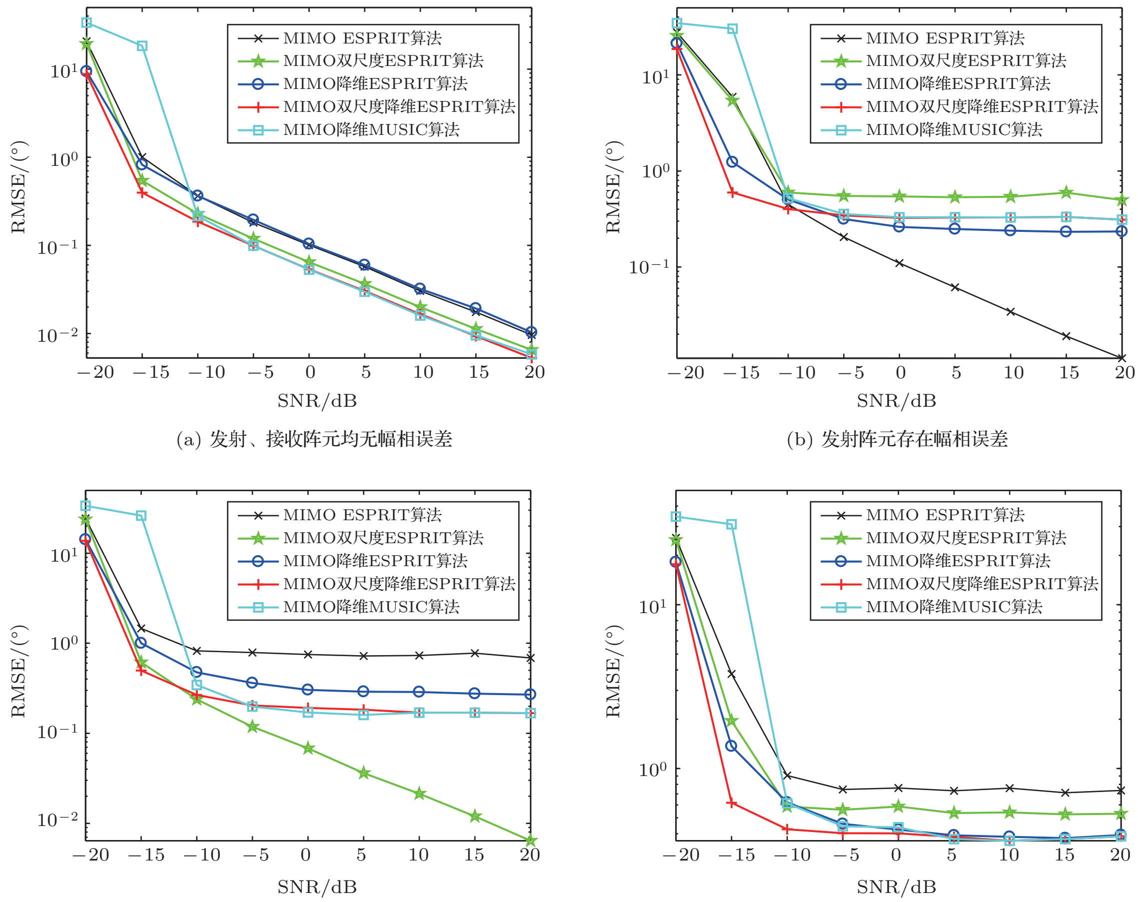
Fig. 3 RMSE versus SNR at different interval for dual-resolution RD-ESPRIT algorithm

间距可以提高DOA估计性能，但也不宜将间距选择得过大，间距过大可能会损失部分虚拟阵元接收信号的信息，所以需要利用仿真实验确定合适的子阵间距。在本实验条件下，认为当子阵间距 $\Delta_2 = 7d_r$ 时算法DOA估计精度最高，所以在接下来的仿真试验中双尺度降维ESPRIT算法精估计时子阵间距选择 $\Delta_2 = 7d_r$。

图4(a)对比了EPSRIT算法、双尺度EPSRIT算法、降维ESPRIT算法、双尺度降维EPSRIT算法和降维MUSIC算法[26]的DOA估计性能。可以看出随着SNR的增高，ESPRIT 算法和降维ESPRIT算法的DOA估计性能逐渐相近，且始终低于双尺度类算法估计精度。双尺度降维ESPRIT算法精度略高于双尺度ESPRIT算法。降维MUSIC算法在SNR低于 −10 dB时，估计性能明显差于其他几种算法，随着SNR的增高，估计精度与双尺度降维ESPRIT 算法相近。但值得注意的是，双尺度类算法无法有效降低SNR门限，当SNR较低时，粗估计结果的精度已无法满足正确解模糊的要求，导致此时精估计结果精度也会很差。之后还评估了阵列流形误差对各算法DOA估计精度的影响，分别对接收阵列和发射阵列流形误差的影响进行分析。图4(b)∼图4(d)分别展示了发射阵元或接收阵元存在幅相扰动误差以及发射、接收阵元同时存在幅相扰动误差时，几种算法估计性能的变化情况。假设图4(b)∼图4(d)中发射阵元或接收阵元均满足阵元幅度不一致性相对起伏标准差小于0.2、相位不一致性小于10°的条件。因为ESPRIT算法利用MIMO阵列各条虚拟线阵内部的子阵旋转不变关系进行DOA估计，所以接收阵元的幅相误差会对算法精度造成较大影响，但发射阵元的幅相误差对算法估计精度的影响不大。而双尺度ESPRIT算法实质上利用MIMO阵列各条虚拟线阵间的旋转不变关系进行DOA估计，所以算法估计性能对接收阵元的幅相误差不敏感，但受发射阵元幅相误差影响较大。对于降维类算法，因为降维虚拟线阵信号模型的导向矢量与发射阵和接收阵的导向矢量都有关，发射阵元或接收阵元的幅相误差均会使降维虚拟阵列的阵列模型发生变化，所以发射阵元或接收阵元的幅相误差均会对算法估计精度造成影响。但当发射、接收阵元同时存在相同程度的幅相扰动误差时，由于降维虚拟阵列的阵元幅相信号可以看作综合了降维前虚拟阵列中原本位置重叠的各虚

拟阵元的幅相信息，这使得降维后虚拟阵元幅相误差小于降维前各单个虚拟阵元的幅相误差，所以从图 4(d) 可以看出，降维类算法 DOA 估计性能受影响的程度要小于非降维类算法 (即 ESPRIT 算法和双尺度 ESPRIT 算法)。

最后对比了各种算法的运算复杂度。对于由 $d_r = \lambda/2$ 的 M_r 元接收阵和 $d_t = \lambda$ 的 M_t 元发射阵构成的 MIMO 声呐阵列，其降维虚拟均匀线阵的阵元数目 $M_v = 2M_t + M_r - 2$。假设目标数目为 K，信号快拍数为 L。表 1 统计了各种算法的运算复杂度，表中 n 表示降维 MUSIC 算法需要进行谱搜索的次数。



(a) 发射、接收阵元均无幅相误差　(b) 发射阵元存在幅相误差

(c) 接收阵元存在幅相误差　(d) 发射、接收阵元同时存在幅相误差

图 4　阵列流形存在误差时，5 种算法的 DOA 估计性能

Fig. 4　The influence of the amplitude and phase disturbance errors of transmit and receive arrays

表 1　运算复杂度对比

Table 1　Computational complexity comparison

算法	运算复杂度
ESPRIT 算法	$O\left(M_t^2M_r^2L+M_t^3M_r^3+4M_tM_rK^2+5K^3\right)$
双尺度 ESPRIT 算法	$O\left(M_t^2M_r^2L+M_t^3M_r^3+8M_tM_rK^2+10K^3\right)$
降维 ESPRIT 算法	$O\left(M_vM_rM_tL+M_v^2L+M_v^3+M_v^2K+4M_vK^2+5K^3\right)$
双尺度降维 ESPRIT 算法	$O\left(M_vM_rM_tL+M_v^2L+M_v^3+M_v^2K+8M_vK^2+10K^3\right)$
降维 MUSIC 算法	$O\big(M_vM_rM_tL+M_v^2L+M_v^3+M_v^2K$ $+n\left[M_v\left(M_v-K\right)+\left(M_v-K\right)\right]\big)$

图5描绘了各种算法运算复杂度随阵元数变化的曲线。假设目标数目 $K=2$、信号快拍数为 $L=128$，发射阵元数和接收阵元数设为相等，即 $M_r=M_t$，降维MUSIC算法需要在 $-90^\circ\sim 90^\circ$ 区间内以 0.01° 为间隔进行搜索。从图5中可以看出，双尺度类DOA估计算法增加的精估计步骤并不会增加过多运算量。此外，MIMO声呐阵列的虚拟阵元数目呈 $O(M_r^2)$ 趋势增长的，而降维虚拟线阵的阵元数目呈 $O(M_r)$ 趋势增长，所以随着阵元数的增多，ESPRIT算法和双尺度ESPRIT算法的运算复杂度增长速度比降维类算法增长速度快。降维ESPRIT算法和双尺度降维ESPRIT算法在运算量上最有优势。降维MUSIC算法由于要进行谱搜索，所以阵元数较少时，降维MUSIC算法的运算复杂度最大。但随着阵元数目的增多，ESPRIT算法和双尺度ESPRIT算法运算量增长较快，其运算量可能会超过降维MUSIC算法。

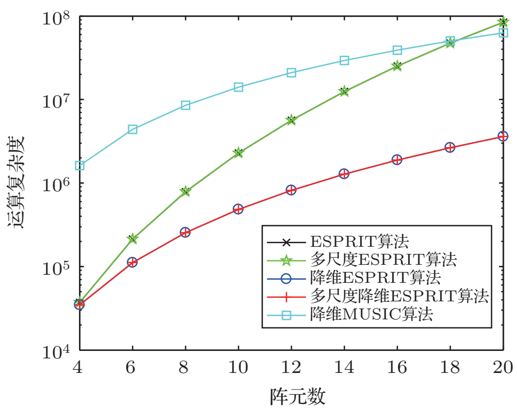


图5　运算复杂度随阵元数目变化关系

Fig. 5 Complexity versus element number for five algorithms

4 结论

对于单基地MIMO声呐阵列的目标方位估计问题，本文提出了一种基于旋转不变子空间的双尺度DOA算法。对于由 M_t 元发射线阵和 M_r 元接收线阵构成的MIMO阵列，其虚拟阵列由 M_t 条与接收阵结构相同的虚拟线阵构成。利用各虚拟线阵内、基线间距不大于半波长的子阵间的旋转不变关系得到无模糊的粗估计结果。之后利用虚拟线阵间、基线较长的子阵间的旋转不变关系得到一组有模糊的精估计结果。最后参考粗估计结果对精估计结果进行解模糊，得到高精度、无模糊的DOA估计结果。当MIMO阵列的虚拟阵列有较多位置重叠的虚拟阵元时，还可以对接收数据进行降维处理，对降维后的阵列分别构造短、长基线的子阵进行粗、精DOA估计。仿真结果验证了双尺度类DOA估计算法的有效性，适当地加大子阵间距可以提升DOA估计精度，但应注意的是双尺度类算法无法有效降低DOA估计的SNR门限。此外，讨论了几种算法对MIMO声呐阵列接收、发射阵元幅相扰动误差的不同敏感程度。实际应用时可以根据运算复杂度能否满足实时性要求以及发射、接收阵各阵元的幅相一致性情况选择适当的算法。

参 考 文 献

[1] Damasco M F. A simple transmit diversity technique for wireless communications[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1998, 16(8): 1451–1458.

[2] Foschini G J, Golden G D, Valenzuela R A, et al. Simplified processing for high spectral efficiency wireless communication employing multi-element arrays[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1999, 17(11): 1841–1852.

[3] Bekkerman I, Tabrikian J. Target detection and localization using MIMO radars and sonars[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(10): 3873–3883.

[4] Li J, Stoica P, Xu L, et al. On parameter identifiability of MIMO radar[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2007, 14(12): 968–971.

[5] 孙超, 刘雄厚. MIMO 声纳: 概念与技术特点探讨 [J]. 声学技术, 2012, 31(2): 117–124.
Sun Chao, Liu Xionghou. MIMO sonar: concept and technical characteristic discuss[J]. Technical Acoustics, 2012, 31(2): 117–124.

[6] He Q, Blum R S, Godrich H, et al. Target velocity estimation and antenna placement for MIMO radar with widely separated antennas[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(1): 79–100.

[7] Pailhas Y, Petillot Y, Brown K, et al. Spatially distributed MIMO sonar systems: principles and capabilities[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2017, 42(3): 738–751.

[8] Shi W, Huang J, Hou Y. Fast DOA estimation algorithm for MIMO sonar based on ant colony optimization[J]. Journal of Systems Engineering & Electronics, 2012, 23(2): 173–178.

[9] Koupatsiaris D A, Karystinos G N. Efficient DOA, DOD, and target estimation for bistatic MIMO sonar[C]// 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing ICASSP 2013. IEEE, 2013: 5155–5159.

[10] 程雪, 王英民. 低复杂度的 MIMO 声呐协方差矩阵重构方法 [J]. 应用声学, 2019, 38(4): 666–673.

Cheng Xue, Wang Yingmin. A low complexity covariance matrix reconstruction method of MIMO sonar[J]. Journal of Applied Acoustics, 2019, 38(4): 666–673.

[11] Tabrikian J, Bekkerman I. Transmission diversity smoothing for multi-target localization [radar/sonar systems][C]// IEEE International Conference on Acoustics. IEEE, 2005.

[12] Xu L, Li J, Stoica P, et al. Target detection and parameter estimation for MIMO radar systems[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 2008.

[13] Fan K, Sun C, Liu X, et al. MIMO sonar DOA estimation based on improved transmitting diversity smoothing (TDS)[C]// MTS/IEEE Charleston OCEANS Conference, 2018.

[14] Xu D, Zhang X, Huang Y, et al. Reduced-complexity Capon for direction of arrival estimation in a monostatic multiple-input multiple-output radar[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2012, 6(8): 796–801.

[15] Cheng X, Wang Y. Multi-target localization analysis based on nonparametric spectral estimation method for MIMO sonar [C]// IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing, IEEE Press, 2017: 1–5.

[16] Zhang Y, Zhang G, Wang X. Computationally efficient DOA estimation for monostatic MIMO radar based on covariance matrix reconstruction[J]. Electronics Letters, 2017, 53(2): 111–113.

[17] Duofang C, Baixiao C, Guodong Q. Angle estimation using ESPRIT in MIMO radar[J]. Electronics Letters, 2008, 44(12): 770–771

[18] Chen F, Zheng J, Dai J. DOD and DOA estimation for bistatic MIMO radars with sparse bayesian learning[C]//in 2018 International Workshop on Antenna Technology, 2018.

[19] Shi W, Huang J, Zhang Q, et al. DOA estimation in monostatic MIMO array based on sparse signal reconstruction[C]// IEEE International Conference on Signal Processing. IEEE, 2016.

[20] Zhang X, Xu D. Low-complexity ESPRIT-based DOA estimation for colocated MIMO radar using reduced-dimension transformation[J]. Electronics Letters, 2011, 47(4): 283–284.

[21] Lemma A N, Alle-J V D V. Multiresolution ESPRIT algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(6): 1722–1726.

[22] Vasylyshyn V I. Closed-form DOA estimation with multiscale unitary ESPRIT algorithm[C]// European Radar Conference. IEEE, 2004: 317–320.

[23] Zheng G, Chen B. Unitary dual-resolution ESPRIT for joint DOD and DOA estimation in bistatic MIMO radar[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2015, 26(1): 159–178.

[24] Zheng G. DOA estimation in MIMO radar with non-perfectly orthogonal waveforms[J]. IEEE Communications Letters, 2017, 21(2): 414–417.

[25] 马严, 陈伯孝, 杨明磊, 等. 基于 ESPRIT 的多基线分布式阵列 DOA 估计方法 [J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(8): 1453–1459.
Ma Yan, Chen Baixiao, Yang Minglei, et al. Multi-baseline distributed array DOA estimation using ESPRIT algorithm[J]. System Engineering and Electronics, 2014, 36(8): 1453–1459.

[26] Zhang X, Xu L, Xu L, et al. Direction of departure (DOD) and direction of arrival (DOA) estimation in MIMO radar with reduced dimension MUSIC, IEEE Communication Letters, 2010, 14(12): 1161–1163.