一维准周期声子晶体中平面波的传播和局部化*

陈阿丽† 汪越胜
(北京交通大学工程力学所 北京 100044)

摘要 本文研究了平面波在一维准周期声子晶体中的传播，引进局部化因子的概念研究了结构的带隙特性和局部化特征，利用 Wolf 方法给出了局部化因子的表达式并用传递矩阵法计算了局部化因子，考查了平面波垂直入射和斜入射的情形，并与相应的周期结构及随机失谐结构进行了比较。

关键词 准周期，Fibonacci 序列，局部化因子，带隙，声子晶体

Plane Wave Propagation in One-Dimensional Quasi-periodic phononic Crystals

CHEN A-Li WANG Yue-Sheng
(*Institute of Engineering Mechanics, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044*)

Abstract The propagation of plane wave in one dimensional quasi-periodic structure is studied by employing the conception of the localization factor. The properties of band gaps and the localization phenomenon are studied. The localization factor is expressed by Wolf's algorithm and calculated by the transfer matrix method. Normal and oblique incidence are addressed and compared to the corresponding perfect phononic crystal and randomly disordered one.

Key words Quasi-periodic, Fibonacci sequence, Localization factor, Band gap, Phononic crystal

1 引言

自从 Yablonovitch[1] 和 John[2] 分别独立提出光子晶体的概念以来，周期结构的波传播问题就被人们广泛关注。进而在光子晶体的基础上 Kushwaha 等 [3] 又提出了声子晶体的概念。声子晶体是相对于光子晶体而言的，是具有

2006-06-06 收稿；2007-10-28 定稿
* 国家自然科学基金资助 (10632020)
作者简介：陈阿丽 (1981-)，女，河南省汝州市人，博士研究生，研究方向：声子晶体中波的传播。
汪越胜 (1965-)，男，教授，博士生导师。
† 通讯联系人 E-mail: ali6978@126.com

声带隙特点的周期结构，弹性波在其中传播时会产生声子禁带或称为声子带隙，在带隙内弹性波被禁止传播。声子晶体的这一特性使得其在许多领域有着潜在的应用，因而受到众多学者的关注并已取得了许多的研究成果 [4~6]，对于具有缺陷 [7~9] 和失谐 [10,11] 的周期结构中弹性波的局部化 [12] 的研究也取得了若干成果。自从 1984 年 Shechtman[13] 等人发现了具有 5 次对称轴的准晶体后，介于周期结构和无序系统的中间情况的准周期结构 [14] 引起了人们的广泛重视。朱敏等 [15] 研究了光波在准周期结构中的带隙结构；罗青 [16] 研究了声波在由水和空气两种介质组成的一维准周期结构中的传播情况；方云团等 [17] 研究了声波在固体 — 气体所组成的球状准周期结构中的传播。以上研究只考虑了一维纵波的传播，没有考虑纵横波耦合的复杂情况，并且都是利用透射系数来描述结构的能带特征。本文通过引进局部化因子 [18] 的概念，针对弹性波在由两种固体介质所组成的一维准周期声子晶体中的传播特点和局部化现象进行了研究，考虑了波沿任意方向传播的情况，因此将考虑纵波和横波耦合的情况。

2 问题的描述及方程的求解

本文所研究的一维准周期声子晶体是由两种材料 A 和 B 按 Fibonacci 序列 [19] 排列的层状结构，层厚分别为 a_1 和 a_2。假定初始状态为：S_1=A, S_2=AB 则 Fibonacci 序列可以描述为 $S_{i+1} = S_i S_{i-1}$，例如：S_3=ABA, S_4=ABAAB, S_5=ABAABABA, $\cdots$，其中下标 i 表示第 i 代 Fibonacci 序列。本文将研究平面波在如上所述的一维准周期声子晶体中传播的特性，计算中以每两层作为一个单胞，整个准周期结构共有 n 个单胞组成，如图 1 所示。

考查平面波以任意方向 θ_0 入射图 1 所示的准周期声子晶体，此时要考虑纵波和横波的耦合。通过引进势函数 φ 和 ψ 进行解耦，其中，φ 为标量势，ψ 为矢量势，转而求解如下

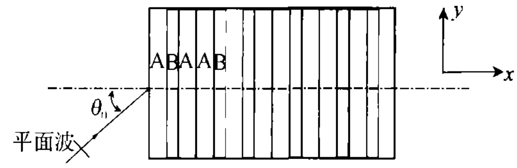

图 1 准周期结构示意图

的波动方程 [20]：

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{c_L^2}\ddot{\varphi} \quad , \quad \nabla^2\psi = \frac{1}{c_T^2}\ddot{\psi} \qquad (1)$$

式中 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $c_L = \sqrt{\lambda + 2\mu/\rho}$ 和 $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$ 分别是纵波和横波的波速，λ 和 μ 是 Lame 常数，ρ 为材料质量密度。考虑 Snell 定律，φ 和 ψ 可表示为：

$$\begin{aligned}\varphi_j(x_j, y_j, t) &= \Phi_j(x_j)\exp(ik_0\sin\theta_0 y_j - i\omega t),\\ \psi_j(x_j, y_j, t) &= \Psi_j(x_j)\exp(ik_0\sin\theta_0 y_j - i\omega t)\end{aligned} \qquad (2)$$

其中，$i^2 = -1$。将方程 (2) 代入方程 (1) 可得到简谐波对应的 φ 和 ψ 的表达式，进行无量纲化有：

$$\begin{aligned}\varphi_j(\xi_j, \eta_j, t) = [A_1\exp(-i\alpha q_{Lj}\xi_j)+\\ A_2\exp(i\alpha q_{Lj}\xi_j)]\exp(i\alpha\sin\theta_0\eta_j - i\omega t)\\ \psi_j(\xi_j, \eta_j, t) = [B_1\exp(-i\alpha q_{Tj}\xi_j)+\\ B_2\exp(i\alpha q_{Tj}\xi_j)]\exp(i\alpha\sin\theta_0\eta_j - i\omega t)\end{aligned} \qquad (3)$$

其中 $\xi_j = x_j/\bar{a}_1$ 和 $\eta_j = y_j/\bar{a}_1$ 为无量纲坐标，$\bar{a}_1$ 为第一层厚度的均值，ξ_j 为厚度方向的无量纲坐标，$0 \leqslant \xi_j \leqslant \zeta_j$, $\zeta_j = a_j/\bar{a}_1$ 为无量纲厚度；A_1、A_2、B_1 和 B_2 是未知系数，需通过边界条件确定；$\alpha = k_0\bar{a}_1$ 为入射波的无量纲波数，k_0 为入射波的波数；$q_{Lj} = \sqrt{c_0^2/c_{Lj}^2 - \sin^2\theta_0}$, $q_{Tj} = \sqrt{c_0^2/c_{Tj}^2 - \sin^2\theta_0}$；$\omega$ 为频率，c_0 为入射波波速，下标 j=1,2 分别表示子层 A 和子层 B。

3 传递矩阵和局部化因子

由各单胞子层间左右两端状态向量之间的关系以及两子层界面处的边界条件可得第 k 个单胞和第 k+1 个单胞间的传递矩阵 $\mathbf{T}_k$：

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{T'}_2\mathbf{T'}_1 \qquad (4)$$

其中，$\mathbf{T}'_j$ 为各单胞子层间的传递矩阵，$j=1,2$ 表示子层 1 和子层 2, $\mathbf{T}_k$ 为 4×4 阶的矩阵。P 波垂直入射即 $\theta_0=0$ 时，状态向量中只有两项，传递矩阵为 2×2 阶，可以由 4×4 阶的传递矩阵简化而得到。

本文将工程结构振动局部化问题研究中定义的局部化因子的概念 [18] 引入到声子晶体的波传播问题中，该因子定义为最小的 Lyapunov 指数 [21]。Lyapunov 指数是对相空间中相邻相轨线的平均指数发散程度或收敛程度的度量，它定量地对动力系统的力学行为进行了有力的描述 [22]。研究周期结构中弹性波的传播和局部化时，引用 Lyapunov 指数的概念，可以提供一种关于弹性波幅值衰减程度的度量指标。局部化导致波动幅值沿失谐周期结构渐近地以空间指数形式衰减，而相应的波动幅值的空间指数衰减常数称为局部化因子。因此，局部化因子用来表示弹性波沿周期结构传播时，波动幅值的空间指数衰减程度 [23]。

根据周期结构的对称性，可以证明 Lyapunov 指数总是以互为相反数的关系成对出现 [21]。若周期结构的传递矩阵的阶数为 $2m\times 2m$, 则可将 Lyapunov 指数按从大到小的顺序排列为：

$$\begin{aligned}&\gamma_1\geqslant\gamma_2\geqslant\cdots\geqslant\gamma_m\geqslant\gamma_{m+1}(=-\gamma_m)\\&\geq\gamma_{m+2}(=-\gamma_{m-1})\geqslant\cdots\geqslant\gamma_{2m}(=-\gamma_1)\end{aligned}\tag{5}$$

其中，最小正 Lyapunov 指数 (γ_m) 代表了幅值衰减程度最弱的波，它在结构中传播的距离最远，沿结构传输的能量也最远，刻画了系统中弹性波主要的衰减特性，因此局部化因子由最小正 Lyapunov 指数 γ_m 来确定。

利用 Wolf 方法 [22] 可给出周期结构中局部化因子 (γ_m) 的表达式：

$$\gamma_m=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left\|\hat{v}_{2R,m}^{(k)}\right\|\tag{6}$$

其中向量 $\hat{v}_{2R,m}^{(k)}$ 的定义见文献 [24]。本文中 $m=2$, 因此最小正 Lyapunov 指数 γ_2 在数值上就等于局部化因子。计算出局部化因子后，则弹性波在经过失谐声带隙结构的每个单胞时，其幅值以指数 $\mathrm{e}^{-\gamma_2}$ 衰减，而能量以指数 $\mathrm{e}^{-2\gamma_2}$ 衰减；当弹性波传遍整个结构后，其幅值相对于初始幅值的衰减幅度为 $\mathrm{e}^{-n\gamma_2}$, 能量相对初始能量的衰减幅度为 $\mathrm{e}^{-2n\gamma_2}$。而对于垂直入射情况，最大的 Lyapunov 指数 γ_1 就等于局部化因子。

4　数值计算与分析

本文以 Pb(材料 A) 和 Epoxy(材料 B) 组成的一维准周期声子晶体为例给出算例，考查局部化因子在不同情况下随无量纲波数 α 的变化。为简便令 $C_1=c_0/c_{\mathrm{L1}}$, $C_2=c_0/c_{\mathrm{L2}}$, $C_3=c_0/c_{\mathrm{T1}}$ 和 $C_4=c_0/c_{\mathrm{T2}}$。分别计算了 P 波垂直入射和斜入射的情况，并与相应周期结构的情况进行了比较。

4.1　垂直入射

由公式 (6) 可知局部化因子的计算应取 n 为无限大，但实际计算时只能取有限值，所以为确定取多大 n 值能够反映波传播的特性，我们先考查平面波垂直入射时，单胞数对局部化因子的影响，分别取 n=72, 144, 628 和 2160(即 144, 288, 1256 和 4320 层), 计算结果如图 2 所示。图中局部化因子为零的区间为通带，局部化因子大于零的区间为禁带区间或称为带隙。从图中可以看出随着单胞数的增多，局部化因子的值逐渐稳定，结构的频带特性逐渐显现。例如在区间 $\alpha\in(0,1)$ 之间当单胞个数为 72 时，此区间仍显示为禁带区间，随着 n 的增大，局部化因子逐渐减小，弹性波的衰减程度降低，当单胞数为 2160 时局部化因子的值已非常稳定并趋于零。在另外几个区间如 $\alpha\in(3.0,3.4)$ 和 $\alpha\in(8.0,8.8)$ 中都有类似情况出现。这说明取 n=2160 已经可以很好地反映能带结构特征。

以下计算比较准周期、周期与随机失谐声子晶体的能带结构特征，取单胞数为 2160, 结果如图 3 所示。图中三条曲线分别代表准周期结构，相应的周期结构以及子层 1 厚度符合均匀分布的失谐周期结构，失谐度为 0.02, 其中

失谐周期结构的局部化因子的计算可以参考文献 [24]。图中比较明显的特征是在周期结构大的带隙区间内准周期结构把此带隙区间一分为二，并且几乎是在带隙中点进行平分。如在区间 $\alpha\in(3.5,5.8)$ 和 $\alpha\in(10.2,12.3)$ 内，周期结构有一个带隙，而准周期结构则有两个带隙，中间有一很窄的通带。另外可以看出周期结构的通带比准周期结构的宽。从图 3 中可以看出，周期结构存在失谐时，会出现波动的局部化现象，即原来的通带区间转化为带隙。如图中所示区间 $\alpha\in(5.8,6.4)$ 和 $\alpha\in(7.7,8.6)$，对于周期结构来说局部化因子等于零，是通带区间；当结构出现失谐，即失谐度为 0.02 时，这两个区间中出现局部化因子大于零的情况，出现带隙。对于准周期结构，在相同的两个区间内可以看出它本身就具有局部化的现象，这是准周期系统自身的特点决定的。另外，在考虑的频率区间内点线几乎都在实线下方，这说明准周期结构中弹性波的衰减程度要比周期结构的小。

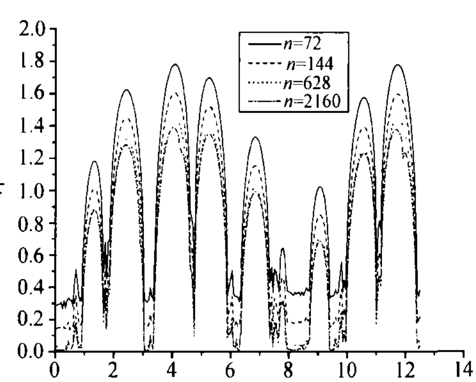

图 2 垂直入射时层数的影响

同时我们计算了 P 波垂直入射第 8 代 Fibonacci 序列时的透射波幅值情况以及相应周期结构的幅值，如图 4 所示。其中图中实线表示周期结构，虚线表示准周期结构，可以看出准周期结构的能带宽度比周期结构小，但是能带数目比周期结构多。另外，周期结构的透射系数在峰值处等于 1，但准周期的透射系数在某些峰值处小于 1，透射波系数图所反映的能带特征与前面的局部化因子完全一致。

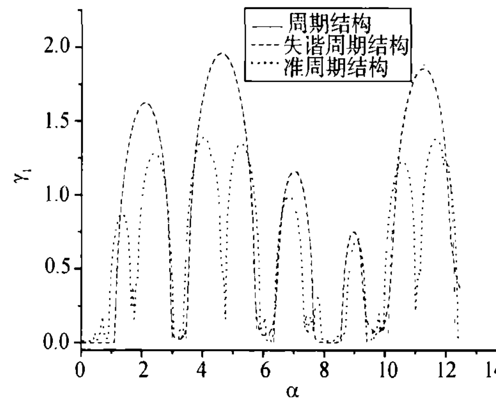

图 3 三种结构中局部化因子随无量纲波数的变化情况

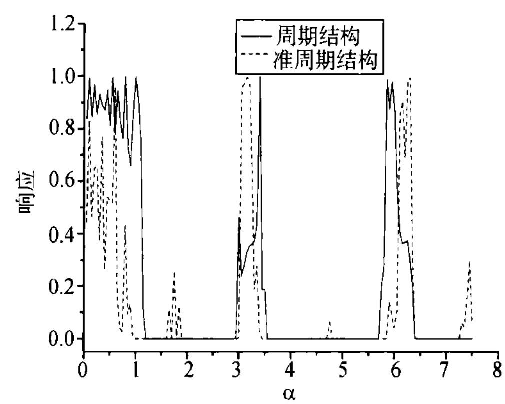

图 4 周期结构与准周期结构的响应比较

4.2 40° 斜入射

计算了入射角为 40°，C_1=1.0 时，分别用局部化因子表示的频带区间和 P 波透射第 8 代 Fibonacci 序列的透射波幅值，如图 5 所示。从

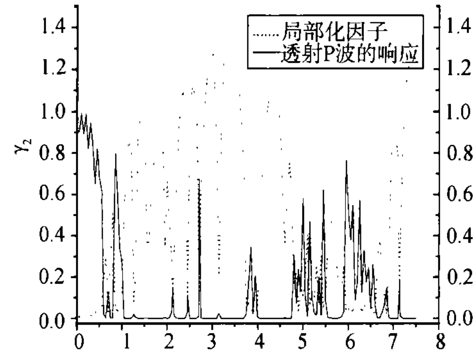

图 5 入射角为 40 度时准周期结构的局部化因子和响应

图中可以看出用两种方法计算的频带区间十分吻合，局部化因子为峰值时对应的透射 P 波幅值近似为零，局部化因子较小时就对应一个幅值凸起。可以看出平面波 40° 斜入射时，结构的能带数目比垂直入射时的多，但能带宽度相对较小。

5 结论

本文通过引进局部化因子的概念描述了平面波在一维准周期声子晶体中的传播和局部化特性，并与相应的周期结构及失谐周期结构进行了比较。利用传递矩阵的方法计算了局部化因子，考虑了平面波垂直入射和斜入射两种情况。用传递矩阵法计算局部化因子要比直接用传递矩阵法计算结构响应稳定的多，因此可以计算任意多层数的准周期结构的频带特性。通过计算分析可以看出：

(1) 利用局部化因子的概念可以很好地描述弹性波在准周期结构中的传播性质；

(2) 准周期结构的能带宽度比周期结构小，但数目比周期结构多；

(3) 准周期结构中弹性波的衰减程度要比周期结构的小；

(4) 准周期结构本身就具有失谐周期结构才具有的波动局部化现象。

参 考 文 献

[1] Yablonovitch E. Physical Review Letters 1987, 58(20): 2059–2062.

[2] John S. Physical Review Letters 1987, 58(20): 2486–2489.

[3] Kushwaha M S, Halevi P, Martinez G, et al. Physical Review Letters, 1993, 71: 2022–2025.

[4] Zhilin Hou, Youyan Liu and Xiujun Fu. Physical Review B, 2004, 70: 014304.

[5] Kushwaha M S, Halevi P, Martinez G, et al. Physical Review B, 1994, 49(4): 2313–2322.

[6] Tsung-Tsong Wu, Zi-Gui Huang, and S. Lin. Physical Review B, 2004, 69, 094301.

[7] Fugen Wu, Zhilin Hou, Zhengyou Liu, et al. Physics Letters A, 2001, 292: 198–202.

[8] Psarobas I E and Stefanou N. Physical Review B, 2000, 62(9): 5536–5540.

[9] Kafesaki M, Sigalas M M, and García N. Physical Review Letters, 2000, 85(19): 4044–4047.

[10] 李凤明, 汪越胜, 黄文虎, 等. 力学进展, 2005, 35(4): 498–512.

[11] 陈阿丽，李凤明，汪越胜. 振动工程学报， 2005, 18(3)： 272–275.

[12] Anderson P W. Physical Review, 1958, 109, 1492–1505.

[13] Shechtman D, et al. Physical Review Letters, 1984, 53(20): 1951–1953.

[14] Christian Janot and Jean—Marie Dubois (宣桂鑫，张治国译). 大自然探索， 1995, 14 (51): 11–24.

[15] 朱敏，方云团，姚洁，等. 激光杂志， 2004, 25(4): 39–40.

[16] 罗青. 南京师大学报 (自然科学版), 2002, 25(2): 110–115.

[17] 方云团, 王永顺, 姜光. 应用声学, 2004, 23(1): 23–28.

[18] Xie W C, Chao S. Solitons and Fractals, 2000, 11(10): 1505–1518.

[19] Aynaou H, Boudouti E H El, Djafari-Rouhani B, et al. Journal of Physics: Condensed Matter, 2005,17: 4245–4262.

[20] Miklowitz J. New York: North-Holland Publishing Company, 1978, Volume 22, 57–169.

[21] Xie W C. Computers and Structures, 1998, 67: 175–189.

[22] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Physica D, 1985, 16: 285–317.

[23] Castanier M P, Pierre C. Journal of Sound and Vibration. 1995, 183(3): 493–515.

[24] Feng-Ming Li, Yue-sheng Wang. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(24–25): 6457–6474.