谐振势阱中旋转广义玻色系统的热力学性质*

张楠[1],孙帅[2],李玉山[2†]

1.天津渤海职业技术学院信息工程学院，天津 300402；

2.菏泽学院物理与电子工程学院，菏泽 274015

收稿日期:2020-04-22;接收日期:2020-06-11

【摘要】 以非广延 Tsallis 统计理论为基础,导出了广义玻色-爱因斯坦统计分布表达式,并用其分别讨论了三维和二维谐振势阱约束的旋转广义玻色气体的热力学性质.结合系统粒子数、玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)临界温度、基态粒子占据率和比热等物理量的解析表达式,分析了非广延参数和势阱旋转频率等因素对系统热力学性质的影响.

关键词:旋转广义玻色气体,非广延参数,玻色-爱因斯坦凝聚

PACS： 05.30.Jp；74.25.Bt

DOI： 10.13380/j.ltpl.2020.04.005

Thermodynamic Properties of a Rotating Generalized Bose System in a Harmonic Trap

ZHANG Nan[1], SUN Shuai[2], LI Yushan[2]

1. *College of Information Engineering*, *Tianjin Bohai Vocational Technical College*, *Tianjin* 300402;

2. *School of Physics and Electronic Engineering*, *Heze University*, *Heze* 274015, *China*

Received date: 2020-04-22; accepted date: 2020-06-11

【Abstract】 Based on the nonextensive Tsallis statistics theory, the generalized Bose-Einstein distribution function is derived. The thermodynamics of a rotating generalized Bose system in the three- and two-dimensional harmonic traps are respectively studied by using it. The influences of nonextensive parameter and rotation frequency are discussed based on the analytical expressions of the particle number, the Bose-Einstein condensation (BEC) critical temperature, the ground state condensation fraction and specific heat etc.

Keywords: rotating generalized Bose gas, nonextensive parameter, Bose-Einstein condensation

PACS: 05.30.Jp; 74.25.Bt

DOI: 10.13380/j.ltpl.2020.04.005

Reference method: ZHANG Nan, SUN Shuai, LI Yushan, Low. Temp. Phys. Lett. **41**, 0206 (2020)

* 国家自然科学基金项目(11804085)资助的课题.

† lysh507@163.com

1 引　　言

大量研究者已经基于广延的统计理论研究了谐振势阱中的旋转玻色系统的热力学行为[1-4]，从理论上给出了空间维度、有限尺度效应和粒子间相互作用等因素对系统热力学性质的影响，揭示了热力学参量与这几个因素之间的普遍关系，为实验上操控旋转玻色系统提供了理论依据.

最近，非广延统计物理也得到了较好的发展，它是传统的广延统计物理的一个延伸和拓展.由于它能够解释广延统计物理无法解释的一些奇异现象，因此迅速成为基础物理研究的热点.Tsallis 统计作为非广延统计的核心和代表，以其简洁的形式和广泛的适用性赢得了人们的日益关注.研究者利用 Tsallis 统计在非线性系统[5]、铁磁性系统[6,7]和相空间量子力学系统[8,9]等方面取得了许多重要的成果.陈金灿课题组[10-13]基于非广延 Tsallis 理论，通过严密的数学推导，给出了谐振势阱中广义理想玻色和费米系统的各热力学参量在 Tsallis 理论中的合理表述形式.这些表达式较好的吻合了教科书中许多重要的结论，引起了国内外同行的高度关注.但它们的研究中尚未涉及旋转效应的影响，鉴于旋转在破坏和压制玻色气体到达玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)态及探测其量子性质中起着举足轻重的作用，因此旋转广义玻色系统热力学性质的研究值得特别关注.

基于此，本文将以非广延 Tsallis 统计理论为基础建立谐振势阱中的旋转广义玻色系统模型，探索非广延参数和旋转频率对旋转广义玻色气体热力学性质的影响，并将所得结果进行归纳概括，以期能够对对一整类玻色气体(包括广延和非广延的情况)的热力学性质进行统一的描述.

2　三维谐振势阱中旋转广义玻色系统的热力学性质

2.1　原理与计算

根据 Tsallis 熵的表达式

$$S_q = k_B \frac{1-\sum_{i=1}^{W} p_i^q}{q-1},$$

利用因式分解法取近似，可求得广义玻色—爱因斯坦分布函数

$$n_q = \frac{1}{[1+(q-1)\beta(\varepsilon-\mu)]^{1/(q-1)}-1}. \quad (1)$$

其中，p_i 为处在第 i 个量子态的粒子动量，W 是系统的总量子态数.n_q 为能量为 ε 的微观状态的平均粒子占有数，μ 为该广义玻色系统的化学势.当 q 趋近于 1 时，(1)式将过渡到经典玻色—爱因斯坦统计分布.

在三维谐振势阱中，旋转广义玻色气体的单粒子哈密顿为

$$H = \frac{(\vec{P}-\vec{A})^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_0^2-\Omega^2)(x^2+y^2)+\frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2. \quad (2)$$

m 为粒子质量，P 为动量，谐振势阱的横向特征频率是 ω_0，轴向特征频率是 ω_z，谐振势阱沿 z 轴的旋转频率是 Ω.由旋转引入的对称规范下的矢量势可表示为 $\vec{A}=m(\vec{\Omega}\times\vec{r})$.(2)式和磁场中运动的单位带电粒子的哈密顿相似，旋转的作用相当于对系统引入等效磁场 $\vec{B}=2m\vec{\Omega}$.

采用托马斯-费米准经典近似，用相空间的积分替代量子态的求和，可以求出 $H\leqslant\varepsilon$ 的量子态总数为

$$\sum(\varepsilon)=\frac{1}{h^3}\iiint_{H\leqslant\varepsilon}\prod_{i=1}^{3}(dr_i dp_i)=\frac{\varepsilon^3}{3!\ \hbar^3(\omega_0^2-\Omega^2)\omega_z}. \quad (3)$$

三维谐振势内旋转广义玻色系统态密度的表达式可由(3)式得出

$$D(\varepsilon)=\frac{\varepsilon^2}{2!\ \hbar^3(\omega_0^2-\Omega^2)\omega_z}. \quad (4)$$

系统的总粒子数可以写成

$$N = N_0 + \int n_q D(\varepsilon)\,d\varepsilon = N_0 + \frac{1}{x_s^3}\frac{\pi^{3/2}}{(m/2)^{3/2}}g_{q,3}(z_q). \quad (5)$$

其中 $z_q=[1+(1-q)\beta(\varepsilon-\mu)]^{1/(1-q)}$ 称为广义逸度，$x_s=\beta\left\{\frac{h^2[(\omega_0^2-\Omega^2)\omega_z]^{2/3}}{2m\pi}\right\}^{1/2}$ 称之为广义热波长，它和参数 q 无关.N_0 为广义玻色系统中处于最低能级粒子的数目.引入的玻色积分为

$$g_{q,\lambda}(z_q)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{z_q^{j+(1-q)\lambda}}{(1-q)^{\lambda}}\frac{\Gamma(j/(1-q)+1)}{\Gamma(j/(1-q)+\lambda+1)},(q<1)\\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{z_q^{j-(q-1)\lambda}}{(q-1)^{\lambda}}\frac{\Gamma(j/(q-1)-\lambda)}{\Gamma(j/(q-1))},(q>1)\end{cases}. \quad (6)$$

(5)式中的 $g_{q,3}(z_q)$ 可由(6)式取 $\lambda=3$ 得到. 为了使 $g_{q,3}(z_q)$ 的值为正数,需满足 $q<4/3$. 由(6)式可以看出, $g_{q,\lambda}(z_q)$ 是 z_q 的单调增函数,当 $\mu=0$ 时, $z_q=1$,这时 $g_{q,\lambda}(z_q)$ 达到最大值.

当 $T\geqslant T_{q,c}$ 时,系统大多数粒子处于激发态,处于基态的粒子数在宏观上可以忽略不计,由此可以得到激发态的粒子数为

$$N\approx N_e=\frac{1}{x_s^3}\frac{\pi^{3/2}}{(m/2)^{3/2}}g_{q,3}(z_q)=\frac{1}{x_{s,c}^3}\frac{\pi^{3/2}}{(m/2)^{3/2}}\zeta_q(3). \tag{7}$$

$x_{s,c}=\left(\frac{1}{k_B T_{q,c}}\right)\left\{\frac{\hbar^2\left[(\omega_0^2-\Omega^2)\omega_z\right]^{2/3}}{2m\pi}\right\}^{1/2}$ 称为达到 BEC 临界温度时的广义热波长. 广义临界温度的定义和经典的 BEC 临界温度,即 $q=1$ 时的定义相同,可写成

$$T_{q,c}=\frac{1}{k_B}\left[\frac{N\hbar^3(\omega_0^2-\Omega^2)\omega_z}{\zeta_q(3)}\right]^{1/3}, \tag{8}$$

其中

$$\zeta_q(\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q)^{\lambda}}\frac{\Gamma(j/(1-q)+1)}{\Gamma(j/(1-q)+\lambda+1)},(q<1)\\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(q-1)^{\lambda}}\frac{\Gamma(j/(q-1)-\lambda)}{\Gamma(j/(q-1))},(q>1)\end{cases}. \tag{9}$$

称之为广义黎曼-泽塔函数. (8)式中的 $\zeta_q(3)$ 可由(9)式中令 $\lambda=3$ 得到. 当 $q=1$ 时,(9)式就成为黎曼-泽塔函数,即

$$\lim_{q\to1}\zeta_q(\lambda)=\zeta(\lambda). \tag{10}$$

而(8)式变成

$$T_{1,c}=\frac{1}{k_B}\left[\frac{N\hbar^3(\omega_0^2-\Omega^2)\omega_z}{\zeta(3)}\right]^{1/3}=T_c. \tag{11}$$

这正是旋转理想玻色系统在三维谐振势中 BEC 临界温度的表达式[14]. 利用(8)和(11)式,可以得到

$$\frac{T_{q,c}}{T_c}=\left[\frac{\zeta(3)}{\zeta_q(3)}\right]^{1/3}. \tag{12}$$

当 $T<T_{q,c}$ 时,系统内有部分粒子会处于基态,由(5)和(7)式求出处于激发态粒子数

$$N_e=N\left(\frac{T}{T_{q,c}}\right)^3, \tag{13}$$

和基态凝聚部分的比例

$$\frac{N_0}{N}=1-\left(\frac{T}{T_{q,c}}\right)^3. \tag{14}$$

利用(4)式可以得到系统总内能

$$E=\int n_q\varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{3}{\hbar^3(\omega_0^2-\Omega^2)\omega_z\beta^4}g_{q,4}(z_q). \tag{15}$$

当 $T\leqslant T_{q,c}$ 时, $\mu\to0$,此时 $g_{q,4}(z_q)\to\zeta_q(4)$. 联立(7)、(15)式得

$$E=3Nk_BT\left(\frac{T}{T_{q,c}}\right)^3\frac{\zeta_q(4)}{\zeta_q(3)}. \tag{16}$$

当 $T>T_{q,c}$ 时,易得

$$E=3Nk_BT\frac{g_{q,4}(z_q)}{g_{q,3}(z_q)}. \tag{17}$$

将(16)、(17)式代入比热的定义式 $C_V=\left[\frac{\partial E}{\partial T}\right]_{N,V}$,则有

$$C_V(T\leqslant T_{q,c})=12Nk_B\left(\frac{T}{T_{q,c}}\right)^3\frac{\zeta_q(4)}{\zeta_q(3)}, \tag{18}$$

$$C_V(T>T_{q,c})=12Nk_B\frac{g_{q,4}(z_q)}{g_{q,3}(z_q)}-9Nk_B\frac{g_{q,3}(z_q)}{g_{q,2}(z_q)}. \tag{19}$$

由(18)、(19)式知,临界温度 $T_{q,c}$ 处比热的突变为

$$\left[\frac{\Delta C_V}{Nk_B}\right]_{T=T_{q,c}}=9\frac{\zeta_q(3)}{\zeta_q(2)}. \tag{20}$$

2.2 结果与讨论

基于(6)、(8)、(12)、(13)、(14)、(16)、(17)、(18)、(19)和(20)式,可以得到以下几点结论:

(a)由(8)式知,旋转频率越小,BEC 临界温度就越高. 同样,非广延参数变小也会导致 BEC 临界温度变高.

(b)由(13)式知,当温度和非广延参数相同时,旋转频率越小,基态粒子的凝聚比例越大. 温度与旋转频率相同时,非广延参数变小也会导致基态粒子凝聚比例增大.

(c)由(16)、(18)式知,当 $T\leqslant T_{q,c}$ 时,若保持温度与非广延参数相同,旋转频率越小,内能与比热越小.

(d)由(20)式知,比热在 BEC 的临界温度点是不连续的.

(e)Tsallis 统计理论是在量子统计基础上发展起来的,当非广延参数退化到 1 时就可以得到原来 BEC 理论的所有结果.

3 二维谐振势阱中旋转广义玻色系统的热力学性质

近年来,人们对低维系统也进行了深入的研究,低维系统的性质逐渐为人们所熟知,并且被广泛应用,低维玻色系统也是有待探索的领域之一.二维谐振势阱中,旋转单粒子粒子哈密顿为

$$H=\frac{(\vec{P}-\vec{A})^2}{2m}+\frac{1}{2}m(\omega_0^2-\Omega^2)(x^2+y^2). \tag{21}$$

采用和三维谐振势阱相类似的推导方法,基于托马斯-费米准经典近似求得

$$\sum(\varepsilon)=\frac{1}{h^2}\iint\limits_{H\leqslant\varepsilon}\prod_{i=1}^{2}(dr_i dp_i)=\frac{\varepsilon^2}{2!\ \hbar^2(\omega_0^2-\Omega^2)}. \tag{22}$$

上式对 ε 求偏导可求得态密度为

$$D(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{\hbar^2(\omega_0^2-\Omega^2)}. \tag{23}$$

粒子数为

$$N=N_0+\frac{1}{x_s^2}\frac{\pi}{(m/2)}g_{q,2}(z_q). \tag{24}$$

其中广义逸度为 $z_q=[1+(1-q)\beta(\varepsilon-\mu)]^{1/(1-q)}$,广义热波长为 $x_s=\beta\left[\frac{h^2(\omega_0^2-\Omega^2)}{2m\pi}\right]^{1/2}$,它和参数 q 无关. $g_{q,2}(z_q)$ 可由(6)式取 $\lambda=2$ 得到.

当 $T\geqslant T_{q,c}$ 时,

$$N\approx N_e=\frac{1}{x_s^2}\frac{\pi}{(m/2)}g_{q,2}(z_q)=\frac{1}{x_{s,c}^2}\frac{\pi}{(m/2)}\zeta_q(2). \tag{25}$$

其中 $x_{s,c}=\left(\frac{1}{k_B T_{q,c}}\right)\left[\frac{h^2(\omega_0^2-\Omega^2)}{2m\pi}\right]^{1/2}$ 称为达到 BEC 临界温度时的广义热波长. $\zeta_q(2)$ 可由(9)式取 $\lambda=2$ 得到.广义临界温度为

$$T_{q,c}=\frac{1}{k_B}\left[\frac{N\hbar^2(\omega_0^2-\Omega^2)}{\zeta_q(2)}\right]^{1/2}. \tag{26}$$

当 $q=1$ 时,上式退化为

$$T_{1,c}=\frac{1}{k_B}\left[\frac{N\hbar^2(\omega_0^2-\Omega^2)}{\zeta(2)}\right]^{1/2}=T_c. \tag{27}$$

此为旋转玻色系统在二维谐振势中临界温度的表达式[15].利用(26)和(27)式,可以得到

$$\frac{T_{q,c}}{T_c}=\left[\frac{\zeta(2)}{\zeta_q(2)}\right]^{1/2}. \tag{28}$$

由(24)和(25)式,可以得到处于激发态粒子的数目为

$$N_e=N\left(\frac{T}{T_{q,c}}\right)^2. \tag{29}$$

基态粒子的凝聚比例为

$$\frac{N_0}{N}=1-\left(\frac{T}{T_{q,c}}\right)^2. \tag{30}$$

系统总能量为

$$E=\frac{2}{\hbar^2(\omega_0^2-\Omega^2)\beta^3}g_{q,3}(z_q). \tag{31}$$

其中 $g_{q,3}(z_q)$ 为(6)式中令 $\lambda=3$ 得到.

当 $T\leqslant T_{q,c}$ 时,由(25)和(31)式得

$$E=2Nk_BT\left(\frac{T}{T_{q,c}}\right)^2\frac{\zeta_q(3)}{\zeta_q(2)}. \tag{32}$$

当 $T>T_{q,c}$,则有

$$E=2Nk_BT\frac{g_{q,3}(z_q)}{g_{q,2}(z_q)}. \tag{33}$$

将(32)、(32)式代入比热定义式,则有

$$C_V(T\leqslant T_{q,c})=6Nk_B\left(\frac{T}{T_{q,c}}\right)^2\frac{\zeta_q(3)}{\zeta_q(2)}, \tag{34}$$

$$C_V(T>T_{q,c})=6Nk_B\left(\frac{T}{T_{q,c}}\right)^2\frac{g_{q,3}(z_q)}{g_{q,2}(z_q)}-4Nk_B\frac{g_{q,2}(z_q)}{g_{q,1}(z_q)}. \tag{35}$$

BEC 临界温度处比热的跳变为

$$\left[\frac{\Delta C_V}{Nk_B}\right]_{T=T_{q,c}}=4\frac{\zeta_q(2)}{\zeta_q(1)}=0. \tag{36}$$

显然,二维谐振势阱中旋转广义玻色气体的 BEC 临界温度、基态粒子占据率和比热的表达式同三维的情形在形式上相似.其区别在于,二维谐振势阱下的比热在 BEC 临界温度点处是连续的[14, 15].

4 结　论

本文以非广延统计理论为基础,推导出广义玻色-爱因斯坦分布表达式,并详细分析了处于三维和二维谐振势阱中旋转广义玻色系统的热力学性质.研究发现,处于谐振势阱中的旋转广义玻色系统热力学性质不仅与非广延参数 q、空间维数有关,而且与旋转频率有关.旋转频率越小,BEC 临界温度越高.同样,非广延参数变小也会导致 BEC 临界温度变高.温度与非广延参数相同时,旋转频率越小,基态粒子的凝聚比例越大.温度与旋转频率相同时,非广延参数变小也会导致基态粒子的凝聚比例增大.

当 $T \leqslant T_{q,c}$ 时,若保持温度与非广延参数相同,旋转频率越小,内能与比热越小.三维谐振势阱的旋转广义玻色系统比热在BEC临界温度点不连续,二维谐振势阱则是连续的.

参 考 文 献

[1] Bagci G B, Oikonomou T. Tsallis power laws and finite baths with negative heat capacity [J]. *Phys. Rev. E*, 2013, 88: 042126.

[2] Bagci G B, Oikonomou T. Validity of the third law of thermodynamics for the Tsallis entropy[J]. *Phys. Rev. E*, 2016, 93: 022112.

[3] Deppman A. Thermodynamics with fractal structure, Tsallis statistics, and hadrons [J]. *Phys. Rev. D*, 2016, 93: 054001.

[4] 欧聪杰. 非广延统计物理中的四个基本问题与广义量子气体的热力学性质[D]. 厦门: 厦门大学, 2006: 53-62.

[5] Gupta H M, Campanha J R, Pesce R A G. Power-law distributions for thecitation Index of scientific publications and scientists[J]. *Braz. J. Phys.*, 2005, 35: 981-986.

[6] Holandda A J, Pisa I T, Kinouchi o. et al. Thesaurus as a complex network [J]. *Physica A*, 2004, 344: 530-536.

[7] Andrade R F S, Pinho S T R. Tsallis scaling and the long-range lsing chain: A transfer matrix approach [J]. *Phys. Rev. E*, 2005, 71: 026126.

[8] Nobre F D. Tsallis C. Metastable states of the classical inertial infinite-range interaction Heisenberg ferromagner: role of initial conditions [J]. *Physica A*, 2004, 344: 587-594.

[9] Sadeghi P, Khademi S, Darooneh A H. Tsallis entropy in phase-space quantum mechanics [J]. *Phys. Rev. A*, 2012, 86: 012119.

[10] Ou C J, Chen J C. Thermostatistic properties of a q-generalized Bose system trapped in an n-dimensional harmonic oscillator potential [J]. *Phys. Rev. E*, 2003, 68: 026123.

[11] Ou C J, Chen J C. Nonextensive thermostatistic properties of a q-generalized Fermi system [J]. *Eur. Phys. J.* B, 2005, 43: 271-277.

[12] Ou C J, Chen J C. A unified description of the thermostatistic properties of a class of Bose system [J]. *Phys. Lett. A*, 2005, 342: 107-113.

[13] Ou C J, Chen J C. Temperature definition and fundamental thermodynamic relations in incomplete statistics [J]. *Chaos Solitons Fract.*, 2006, 28: 518-521.

[14] 李玉山. 谐振子势阱囚禁玻色气体的玻色-爱因斯坦凝聚 [J]. 原子与分子物理学报, 2014, 31(4): 683-686.

[15] 李玉山. 二维简谐势阱中旋转理想玻色气体热力学性质的修正 [J]. 原子与分子物理学报, 2017, 34(5): 973-978.