

# 硅烯/ $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ 混合波超导隧道结隧道输运性质研究

杨新建<sup>†</sup>, 李红

中国石油大学(华东)理学院, 山东青岛 266580

收稿日期: 2019-02-21; 接收日期: 2019-04-23

**【摘要】** 运用 Blonder-Tinkham-Klapwijk (BTK) 理论研究了硅烯/ $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$  混合波超导隧道结的隧穿性质。研究发现: 垂直施加的电场、超导配对势的方向角和两种混合波配对能隙的比值  $\Delta_1/\Delta_0$  强烈地影响正常反射、Andreev 反射和隧穿电导的值; 当两种混合波的序参量比值较大时, 隧道谱线在外加偏压  $E = \Delta_1$  处出现谐振峰; 系统的隧穿电导、正常反射幅和 Andreev 反射幅随超导方向角成周期性变化, 变化周期为  $\pi/2$ ; 由于  $d_{xy}$ -波的存在, 通过改变外加电场可以对隧穿电流加以调控。

**关键词:**  $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$  混合波, 硅烯/ $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$  混合波超导隧道结, Andreev 反射

**PACS:** 74. 45. +c

**DOI:** 10.13380/j.ltpl.2019.03.012

## Tunneling Transport in $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ Mixed Wave Superconductor-silicene Junctions

YANG Xinjian, LI Hong

College of Science, China University of Petroleum, Qingdao 266580

Received date: 2019-02-21; accepted date: 2019-04-23

**【Abstract】** The tunneling conductance in normal/ $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$  mixed wave superconductor (N/ $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ S)-silicene junction is studied based on the Blonder-Tinkham-Klapwijk (BTK) theory. It is demonstrated that the amplitude of the normal reflection(NR), Andreev reflection(AR) and the conductance strongly depend on the perpendicular electric field( $E_z$ ), the superconducting pair symmetry orientation, and the magnitude of the ratio of  $\Delta_1/\Delta_0$ . Here  $\Delta_1$  ( $\Delta_0$ ) is the absolute of pair potential of  $d_{x^2-y^2}$  ( $d_{xy}$ ) component. For large magnitude of the ratio, a resonance peak appears in the conductance spectrum at bias voltage  $E = \Delta_1$  and the conductance, NR, and AR exhibit an oscillatory behavior as a function of the superconducting rotation angle with a period of  $\pi/2$ . It is possible to control the tunneling current by applying an electric field due to the presence of  $d_{xy}$ -wave.

**Keywords:**  $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$  mixed wave, N/ $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ S-silicene junction, Andreev reflection

**PACS:** 74. 45. +c

**DOI:** 10.13380/j.ltpl.2019.03.012

**Reference method:** YANG Xinjian, LI Hong, Low. Temp. Phys. Lett. **41**, 0223 (2019)

<sup>†</sup> yangxj1998@upc.edu.cn

## 1 引言

硅烯是由碳原子构成的蜂窝状结构的单原子二层薄膜,由于具有奇特的物理性质,近年来成为理论和实验研究的热点<sup>[1-5]</sup>。理论研究表明,硅烯是理想的狄拉克电子系统,具有与石墨烯相同的非平庸拓扑不变量。由于硅原子自旋轨道耦合强度较大,使得硅烯具有比石墨烯更大的能隙,并有可能在液氦温度下实现量子自旋霍尔效应。硅烯作为一种全新的二维拓扑绝缘体,通过外加电场和交换场,可以实现对其能隙大小的调控<sup>[6]</sup>,还可以实现量子反常霍尔态、谷极化金属态等许多稀奇的量子效应<sup>[7-9]</sup>。与此同时,由硅烯和超导体组成的隧道结器件中的输运性质也受到广泛关注<sup>[10,11]</sup>。研究表明,对于硅烯/超导隧道结和硅烯/超导/硅烯隧道结,局域和非局域的Andreev反射都可以通过外加电场进行控制<sup>[20]</sup>。硅烯/ $d_{x^2-y^2}$ -波超导隧道结中Andreev反射<sup>[12]</sup>和能隙内的电导与d-波超导体的能隙角和外加电场有关<sup>[11]</sup>。这些结果说明硅烯可以提供独特的可控超导运输。鉴于此,本文利用Blonder-Tinkham-Klapwijk(BTK)<sup>[13]</sup>理论研究了硅烯/ $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$ 混合波超导隧道结的输运性质,得到了一些不同于硅烯/ $d_{x^2-y^2}$ -波超导隧道结的现象,可作为区分两种波的一种依据。

## 2 理论模型

硅烯/ $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$ 混合波超导体(N/ $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$ S)隧道结系统满足Dirac-Bogoliubov-de Gennes(DBdG)方程<sup>[10]</sup>

$$\begin{pmatrix} H & \Delta \\ \Delta^* & -H \end{pmatrix} \psi(x) = E \psi(x) \quad (1)$$

其中  $H = \hbar v_F (\eta k_x \tau_x - k_y \tau_y) - (\eta \sigma \lambda_{SO} - l E_z) \tau_z - E_F(x) l$  是单粒子的哈密顿量,硅烯中的费米速度  $v_F = 5.5 \times 10^5 \text{ m/s}$ ;  $\eta = 1(-1)$  对应于布里渊区费

$$r_e = -\frac{v_+ v_- e^{-i\varphi_+ + i\varphi_-} (k_F e^{-i\theta} - \tau_-) (\tau_+ + k_F e^{i\theta}) + u_+ u_- (k_F e^{-i\theta} + \tau_-) (\tau_+ + k_F e^{i\theta})}{X} \quad (6)$$

其中  $X = v_+ v_- e^{-i\varphi_+ + i\varphi_-} (k_F e^{-i\theta} - \tau_-) (\tau_+ + k_F e^{i\theta}) + u_+ u_- (k_F e^{-i\theta} + \tau_-) (\tau_+ + k_F e^{i\theta})$ 。

N/ $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$ S隧道结系统的电导表达式为<sup>[22]</sup>

$$\frac{G}{G_N} = \frac{1}{4} \sum_p \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta (1 + |r_h|^2 - |r_e|^2) d\theta \quad (7)$$

式中  $G_N$  是硅烯的弹道电导。

米面上的Dirac点  $K(K')$ ,  $\tau_x, \tau_y$  和  $\tau_z$  是  $2 \times 2$  阶的泡利矩阵,  $\lambda_{SO}$  是自旋轨道耦合项,  $E_F(x) = E_{FN} \Theta(-x) + E_{FS} \Theta(x)$  是费米能,  $\Delta$  是  $d_{x^2+y^2} + id_{xy}$ -混合波超导体中的能隙,对于电子和空穴超导配对势表示为<sup>[14]</sup>:

$$\Delta_{\pm} = \Delta_0 \cos(2\theta_S \mp 2\alpha) \pm i\Delta_1 \sin(2\theta_S \mp 2\alpha) \quad (2)$$

其中  $\theta_S$  是粒子的隧穿角,  $\alpha$  是  $d$ -波的  $a$  轴与  $x$  的夹角,  $\Delta_0$  和  $\Delta_1$  分别是  $d_{x^2+y^2}$ -波和  $d_{xy}$ -波的序参数幅值。

N/ $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$ S系统中超导体和硅烯中载流子的波函数分别为:

$$\psi_S|_{x=0} = \frac{t_e}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \eta e^{i\theta_S} u_+ \\ u_+ \\ \eta e^{i\theta_S} v_+ e^{-i\varphi_+} \\ v_+ e^{-i\varphi_+} \end{bmatrix} + \frac{t_h}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\eta e^{-i\theta_S} v_- e^{i\varphi_-} \\ v_- e^{i\varphi_-} \\ -\eta e^{-i\theta_S} u_- \\ u_- \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\psi_N|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{2E\tau_+}} \begin{bmatrix} \eta k_F e^{i\theta} \\ \tau_+ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{r_e}{\sqrt{2E\tau_+}} \begin{bmatrix} \tau_+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{r_h}{\sqrt{2E\tau_-}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta k_F e^{-i\theta} \\ \tau_- \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中  $e^{i\varphi_{\pm}} = \Delta_{\pm} / |\Delta_{\pm}|$ ,  $k_F = \sqrt{E^2 - (lE_z - \eta\sigma\lambda_{SO})^2}$ ,  $\tau_{\pm} = E \pm (\eta\sigma\lambda_{SO} - lE_z)$ ,  $(u_{\pm})^2 = 1 - (v_{\pm})^2 = (1 + \sqrt{1 - \Delta_{\pm}^2 / E^2}) / 2$ ,  $t_e, t_h, r_e$  和  $r_h$  分别表示电子和空穴的透射系数和反射系数。为了使沿  $y$  轴方向传播粒子的动量守恒,  $\theta$  和  $\theta_S$  满足  $k_F \sin \theta = \mu \sin \theta_S$ 。

方程(3)和(4)中的所有系数可以通过边界条件  $\psi_S|_{x=0} = \psi_N|_{x=0}$  求出:

$$r_h = \frac{4 \sqrt{\tau_+ \tau_-} v_+ u_- k_F e^{-i\varphi_+} \cos \theta}{X} \quad (5)$$

$$X = v_+ v_- e^{-i\varphi_+ + i\varphi_-} (k_F e^{-i\theta} - \tau_-) (\tau_+ + k_F e^{i\theta}) + u_+ u_- (k_F e^{-i\theta} + \tau_-) (\tau_+ + k_F e^{i\theta}) \quad (6)$$

## 3 计算结果分析

为了研究外加电场对隧穿性质的影响,定义差值  $m = lE_z - \lambda_{SO}$ 。图1~4给出了  $m = 0, 3\Delta_0$  时两种混合波超导序参量幅值的比  $\Delta_1/\Delta_0$  以及方向角  $\alpha$  对正常反射、Andreev反射和归一化电导的影响。由各

图可以看出,与硅烯/s-波超导和硅烯/ $d_{x^2-y^2}$ -波超导隧道结相同,对于硅烯/ $d_{x^2+y^2} + id_{xy}$ -混合波超导隧道结,在外加偏压  $E < m$  即  $iE_z > E + \lambda_{SO}$  时,正常反射、Andreev 反射和归一化电导的值均为零。这表明,对于该系统通过改变外加电场的强度可以控制隧穿的发生与否。当  $\Delta_1/\Delta_0 = 0$ , 即只含有  $d_{x^2-y^2}$ -波超导体时,得到的结果与文献[11]完全相同。当  $\alpha=0$  时,无论  $\Delta_1/\Delta_0$  的值如何变化,正常反射和 Andreev 反射曲线的形状不发生改变,表明此种情况下,两种波成分的多少对两种反射没有影响。但当  $\alpha \neq 0$  时,  $\Delta_1/\Delta_0$  的值越大,对两种反射的影响也越大。这可以解释为:当  $\alpha=0$  时,由表达式(2)可得,  $\Delta_\pm = \Delta_0$ , 代入  $(u_\pm)^2 = 1 - (v_\pm)^2 = (1 + \sqrt{1 - \Delta_\pm^2/E^2})/2$  和方程(5)和(6),容易得到  $u_+ = u_-$ ,  $v_+ = v_-$  且  $r_e, r_h$  的值均与  $\Delta_\pm$  无关。当  $\alpha \neq$

0 时,  $u_\pm, v_\pm, r_e, r_h$  的值与  $\Delta_1/\Delta_0$  即两种混合波的成分有关。

图 1~3 分别给出  $\theta_s = 0$  时,正常反射和 Andreev 反射随外加偏压的变化关系曲线。由图 1 可以看出,正常反射的幅值随着外加偏压的增加而减小,减小较快的地方有两处,一处在  $E=m$  处,与  $\alpha$  和  $\Delta_1/\Delta_0$  的取值无关。另一处的位置,对比图(b)和(c)可以发现,随  $\alpha$  和  $\Delta_1/\Delta_0$  的取值移动:当  $\alpha=0$  时,在  $E=\Delta_0$  处;当  $\alpha=\pi/4$  时,在  $E=\Delta_1$  处。为了更清楚地展现这一结论,图 2 给出了当  $\alpha=\pi/4$  时正常反射幅随比值  $\Delta_1/\Delta_0$  的变化。与前面的分析类似,当  $\alpha=0$  时,由表达式(2)可得,  $\Delta_\pm = \Delta_0$ ;当  $\alpha=\pi/4$  时,  $\Delta_\pm = \pm i\Delta_1$ 。可知,此时在硅烯和超导体界面处出现电子束缚态,因此两种情况下,分别在偏压等于两种波的序参量幅值处形成小的反射峰。

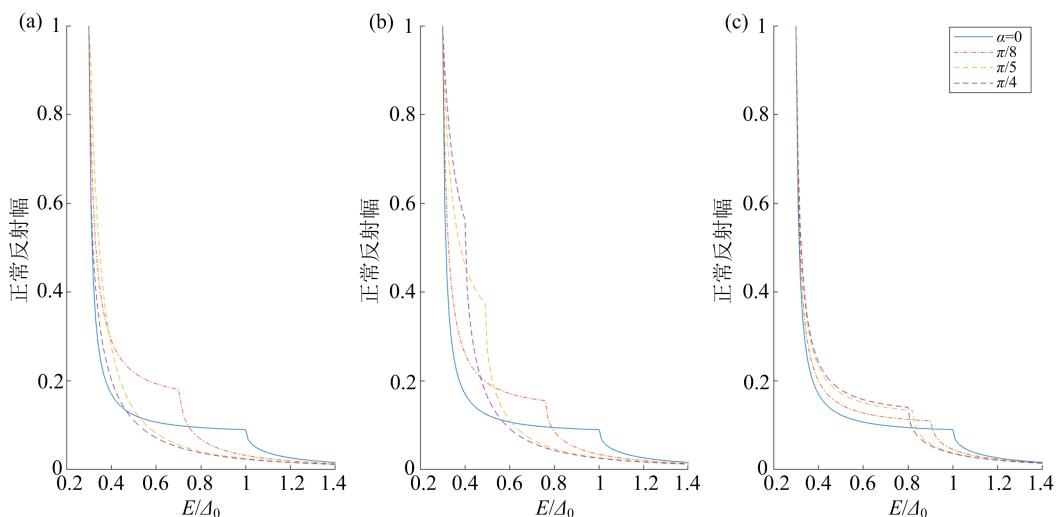


图 1  $m=0.2$  时正常反射幅随外加偏压的变化。其中(a) $\Delta/\Delta_0=0$ ; (b) $\Delta/\Delta_0=0.4$ ; (c) $\Delta/\Delta_0=0.8$

Fig. 1. Normal reflection as a function of bias voltage with  $m=0.2$ . Here (a) $\Delta/\Delta_0=0$ ; (b) $\Delta/\Delta_0=0.4$ ; (c) $\Delta/\Delta_0=0.8$

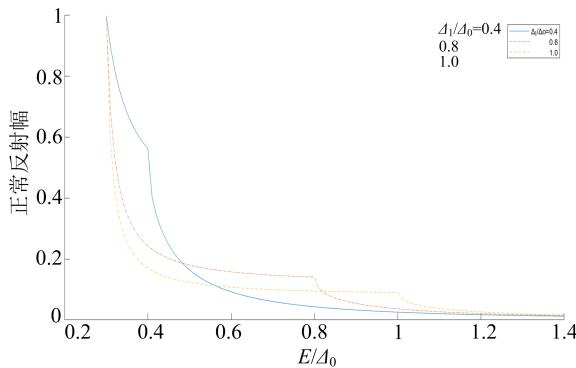
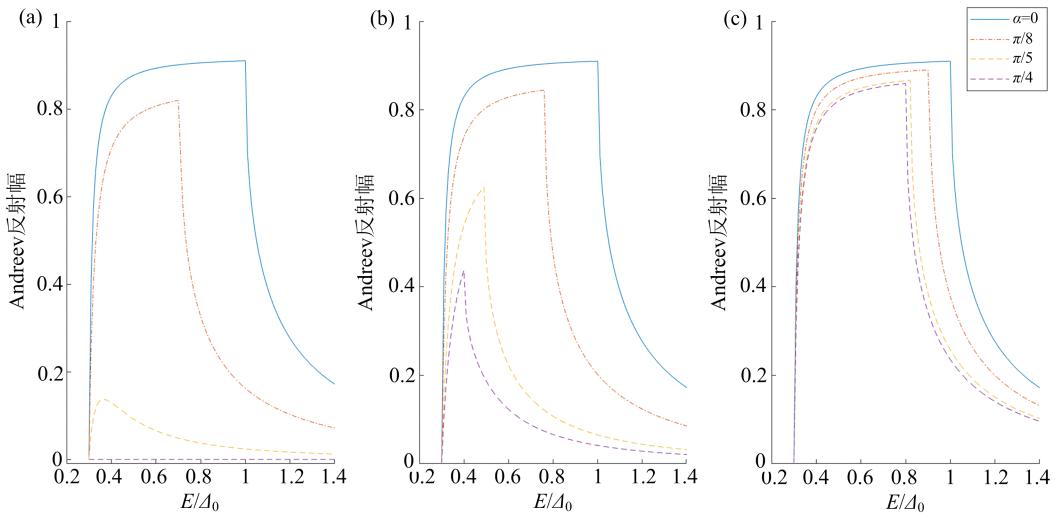


图 2  $m=0.2, \alpha=\pi/4$  时正常反射幅随外加偏压的变化

Fig. 2 Normal reflection as a function of bias voltage with  $m=0.2$  and  $\alpha=\pi/4$

由图 3 可以看出,Andreev 反射的幅值随着外加偏压的增加先升高后降低,极值点位置的变化也是由  $\alpha$  和  $\Delta_1/\Delta_0$  的取值共同决定的。当  $\alpha=0$  时,峰值出现在  $E=\Delta_0$  处;当  $\alpha=\pi/4$  时,峰值出现在  $E=\Delta_1$  处。对比三幅图可以发现, $\alpha$  和  $\Delta_1/\Delta_0$  的取值对 Andreev 反射的作用是相反的:随着  $\alpha$  的增加,Andreev 反射被削弱;但随着  $\Delta_1/\Delta_0$  取值的增加,Andreev 反射被增强。当  $\Delta_1/\Delta_0=0.8$  时,曲线的形状不再受  $\alpha$  的影响,表明随着  $d_{xy}$ -波成分的增加, $\alpha$  对 Andreev 反射的作用被削弱。

图 4 给出了隧穿电导随偏压的变化关系曲线。

图 3  $m=0.2$  时 Andreev 反射幅随外加偏压的变化. 其中(a) $\Delta_1/\Delta_0=0$ ; (b) $\Delta_1/\Delta_0=0.4$ ; (c) $\Delta_1/\Delta_0=0.8$ Fig. 3 Andreev reflection as a function of bias voltage with  $m=0.2$ . Here (a) $\Delta_1/\Delta_0=0$ ; (b) $\Delta_1/\Delta_0=0.4$ ; (c) $\Delta_1/\Delta_0=0.8$ 

由图可以看出, 电导随偏压的变化趋势与 Andreev 反射相同. 可以推断与硅烯/ $d_{x^2-y^2}$ -波超导体隧道结不同, 在该系统中 Andreev 反射对隧穿电导的贡献占有显著的地位. 当  $\alpha=\pi/4$  时, 曲线的形状随  $\Delta_1/\Delta_0$  的值变化不大, 表明此种情况下, 电导对两种波的成分不敏感. 但是, 当  $\alpha$  较小时, 归一化电导随

两种波成分的变化而明显变化: 当  $\Delta_1/\Delta_0$  的值增加时, 电导的最大值增加; 尤其是当  $\alpha=0$  时, 电导在  $E=\Delta_1$  处出现尖锐的峰值结构. 这种尖锐的电导峰值结构在硅烯/ $d_{x^2-y^2}$ -波超导体隧道结中并没有得到, 因此可用来区分  $d_{x^2-y^2}$ -波和  $d_{x^2+y^2}+id_{xy}$ -混合波超导体.

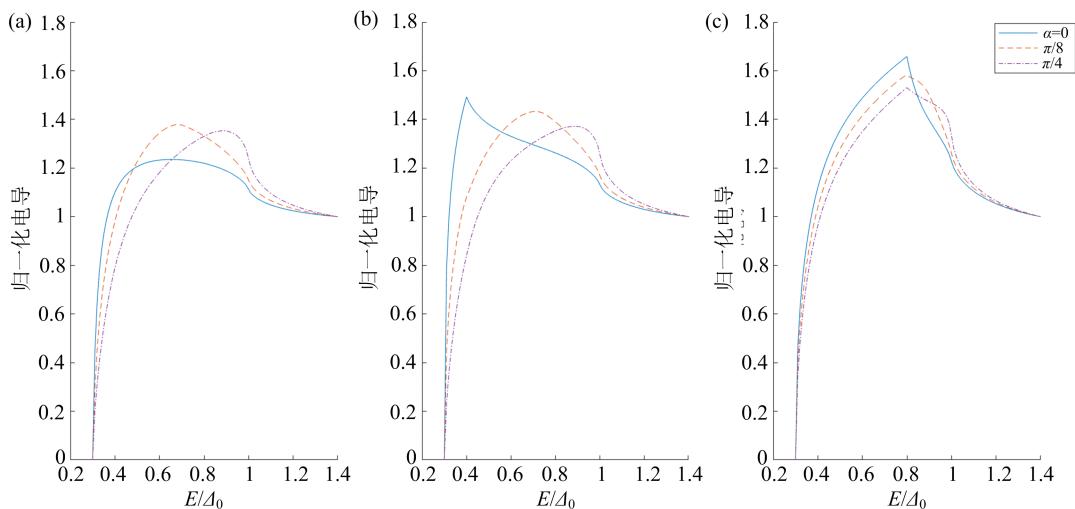
图 4 归一化电导在不同方向角下随外加偏压的变化. 其中(a) $\Delta_1/\Delta_0=0$ ; (b) $\Delta_1/\Delta_0=0.4$ ; (c) $\Delta_1/\Delta_0=0.8$ 

Fig. 4. Normalized conductance as a function of bias voltage for different values of angle

Here (a) $\Delta_1/\Delta_0=0$ ; (b) $\Delta_1/\Delta_0=0.4$ ; (c) $\Delta_1/\Delta_0=0.8$

为了进一步讨论  $\alpha$  对隧穿性质的影响, 图 5 给出三种不同偏压下归一化电导随  $\alpha$  的变化关系曲线. 可以看出, 电导随  $\alpha$  呈周期变化, 变化周期为  $\pi/2$ , 且该周期与偏压和  $\Delta_1/\Delta_0$  的值无关. 电导的这种

周期性变化与硅烯/ $d_{x^2-y^2}$ -波超导体隧道结相同. 值得注意的是, 隧穿电导值随偏压的增加而增加, 尤其当  $\alpha=\pi/4$  时, 增加的幅度最大. 当  $E=\Delta_1$  时, 电导值达到极值点, 这与图 3(c)完全吻合.

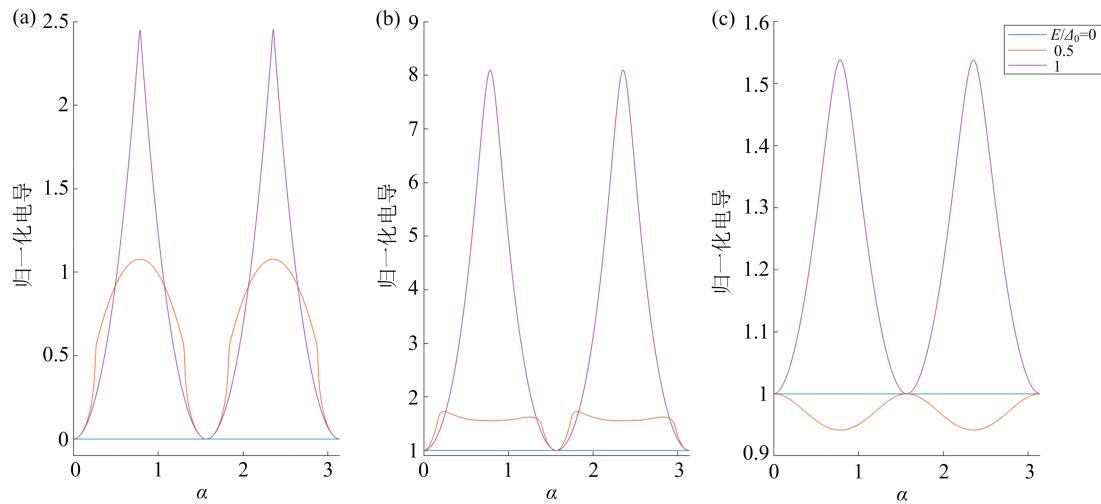
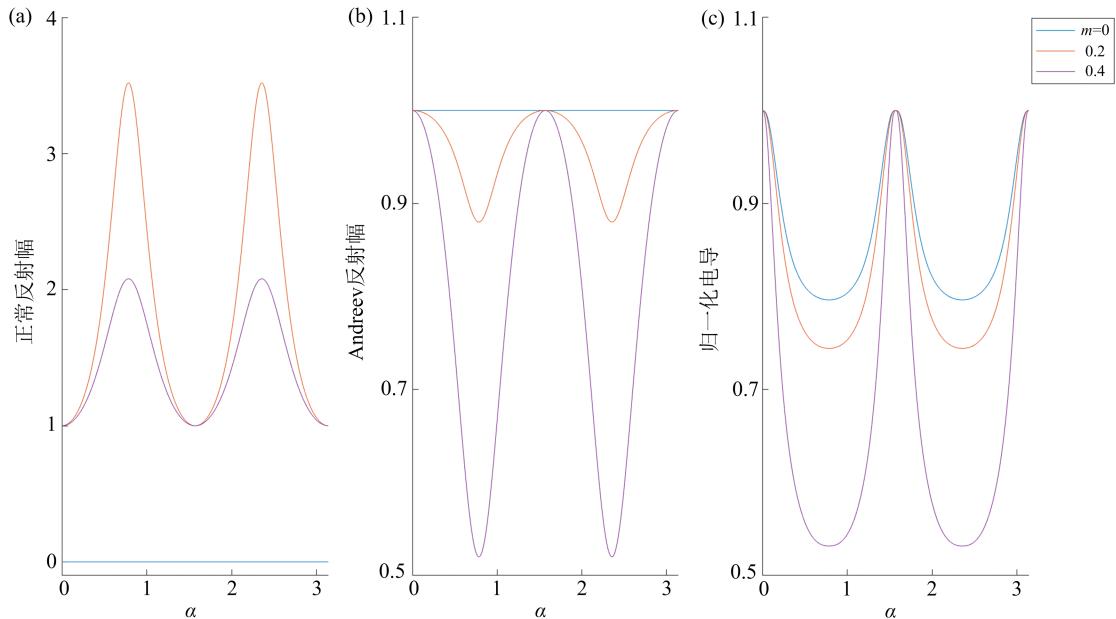
图 5 归一化电导在不同外加偏压下随方向角的变化. 其中(a) $\Delta_1/\Delta_0=0$ ; (b) $\Delta_1/\Delta_0=0.4$ ; (c) $\Delta_1/\Delta_0=0.8$ Fig. 5 Normalized conductance for different values of the bias voltage with  $m=0.3$ Here (a) $\Delta_1/\Delta_0=0$ ; (b) $\Delta_1/\Delta_0=0.4$ ; (c) $\Delta_1/\Delta_0=0.8$ 

图 6 正常反射幅、Andreev 反射幅和归一化电导在不同外加电场下随方向角的变化

Fig. 6 NR, AR and normalized conductance for different values of insulating gap

最后我们研究了外加电场对系统输运性质的影响, 图 6 中的三幅图分别给出了正常反射、Andreev 反射和归一化电导在不同外加电场强度下随  $\alpha$  的变化. 由图可知, 当  $m=0$  时正常反射幅值为零; 随着  $m$  即  $E_z$  的增加, 正常反射幅值先增加后减小, 对于相同角度处的 Andreev 反射幅和电导值均减小. 由图 b 和 c 可以看出, 归一化电导的变化规律与 Andreev 反射类似, 这说明在该系统中 Andreev 反射

对电导起着重要作用, 而这种作用在硅烯/ $d_{x^2-y^2}$ -波超导隧道结中被大大削弱了. 据此可以推断, 由于  $id_{xy}$ -波的存在, 通过改变外加电场可以调控 Andreev 反射, 进而对隧穿电流加以调控.

#### 4 结 论

(1) 在硅烯/ $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$  混合波超导隧道结中粒子隧穿时的正常反射幅、Andreev 反射幅和隧穿

电导的值受到垂直施加的电场、超导配对势的方向角和两种混合波序参量的比值的调控；

(2)当两种混合波的序参量的比值较大时,隧道谱线在  $E=\Delta_1$  处出现谐振峰;当  $\alpha=0$  和  $\alpha=\pi/4$  时,正常反射幅分别在  $E=\Delta_0$  和  $E=\Delta_1$  显著降低,该现象可以用以区分  $d_{x^2-y^2}$ -波和  $d_{x^2+y^2}+id_{xy}$ -混

合波超导体;

(3)归一化电导、正常反射幅和 Andreev 反射幅随超导方向角成周期性变化,变化周期为  $\pi/2$ ;

(4)由于  $id_{xy}$ -波的存在,通过改变外加电场可以调控 Andreev 反射,进而对隧穿电流加以调控.

## 参 考 文 献

- [1] A. Yamakage, M. Ezawa, Y. Tanaka, *Phys. Rev. B*, **88** (2013), 085322.
- [2] M. Ezawa, *Phys. Rev. B*, **87**(2013), 155415.
- [3] F. Liu, C. C. Liu, K. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **111** (2013), 066804.
- [4] L. D. Zhang, F. Yang, Y. Yao, *Sci. Rep.*, **10** (2015), 8203.
- [5] Y. Yao, F. Ye, X. L. Qi, *Phys. Rev. B*, **75** (2007), 041401.
- [6] C. C. Liu, W. Feng, Y. Yao, *Phys. Rev. Lett.*, **107** (2011), 076802.
- [7] R. Saxena, A. Saha, S. Rao, *Phys. Rev. B*, **92** (2015), 245412.
- [8] G. C. Paul, S. Sarkar, A. Saha, *Phys. Rev. B*, **949** (2016), 155453.
- [9] C. W. J. Beenakker, *Rev. Mod. Phys.*, **80**(2008), 1337. ,
- [10] J. Linder, T. Yokoyama, *Phys. Rev. B*, **89**(2014), 020504.
- [11] Y. Hajatia, S. Vosoughi niab, G. Rashedi, *Super. and Micr.*, **102**(2017), 202.
- [12] A. F. Andreev, *Eksp., Teor. Fiz.*, **46**(1964), 1823.
- [13] G. E. Blonder, M. Tinkham, T. M. Klapwijk, *Phys. Rev. B*, **25**(1982), 4515.
- [14] Y. Tanaka, S. Kashiwaya, *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995), 3451.