

费米气体在调制缺陷晶格中的超流特性^{*}

简 粤^{1†}, 郑小平^{1,2}, 张培增¹, 祁鹏堂¹, 李 伟¹

1. 兰州工业学院 基础学科部, 甘肃 兰州 730050;

2. 兰州城市学院, 甘肃 兰州 730000

收稿日期: 2018-05-29; 接收日期: 2018-10-08

【摘要】 本文研究了费米气体在调制缺陷的一维环形光晶格中的超流特性. 在流体动力学模型和两模近似下, 整个系统的动力学性质可以等效为单摆模型的哈密顿量, 从而得到系统发生超流相变的临界条件 ρ_c . 系统在 BEC-BCS 整个渡越区中, 临界原子数密度将使得系统存在缺陷导致阻尼的正常态之外的另一种状态, 即平面波连续穿过缺陷的超流态. 系统的超流特性依赖于缺陷的强度、类型以及原子间的相互作用, 并且由于缺陷与原子间相互作用的耦合, 系统在 BCS 端更容易维持超流态.

关键词: 超冷费米气体, 超流特性, 缺陷晶格, 临界原子数密度

PACS: 7460, 7490, 0290

Superfluidity of Fermi Gas in Modulation Defect Lattice^{*}

JIAN Yue^{1†}, ZHEN Xiaopin^{1,2}, ZHANG Peizeng¹, QI Pengtang¹, LI Wei¹

1. Department of Basic Courses, Lanzhou Institute of Technology, Lanzhou 730050, China;

2. Lanzhou City University, Lanzhou, 730000, China;

3. College of physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou, 73007, China

Received date: 2018-05-29; accepted date: 2018-10-08

【Abstract】 We study the superfluidity of Fermi gas in a modulated one-dimensional annular optical lattice. Under the hydrodynamic scheme and two-mode ansatz, the dynamics of the system map on a nonrigid pendulum Hamiltonian, and the critical condition ρ_c for the superfluous phase transition in the system can be obtained. There exists a critical atomic density along the entire BEC-BCS crossover and cause the system to have another state in addition to the normal state of defects induced damping, that is, the superfluid regime with the plane wave continuously passes through defects. The superfluidity of the system depends on the strength and type of the defects and the atomic interaction. Due to the coupling of the defects and the atomic interaction, the system can easily maintain the superfluid state on the BCS side.

Keywords: superfluid Fermi gas; superfluidity; defect lattice; critical atomic density

PACS: 7460, 7490, 0290

^{*} 甘肃省自然科学基金(批准号:18JR3RA230)甘肃省高等学校科研项目(批准号:2018D-19)、兰州市人才创新创业项目(批准号:114)、兰州工业学院“开物”科研创新团队支持计划资助(编号:2018KW-06)、兰州工业学院青年科技创新项目(编号:17K-018)

[†] jianyuehappy@126.com

1 引言

由激光驻波场形成的作用在原子上的周期势被称为光晶格. 光晶格中玻色爱因斯坦凝聚(简称 BEC)的实现, 使光晶格成为研究各种奇妙量子现象的理想场所^[1-6]. 特别是超冷费米气体在光晶格中的实现, 为强关联凝聚体物理学的基础问题的研究开辟了新的领域^[7-8]. 光晶格为研究超冷原子的研究提供了一种可能, 但客观情况是光晶格不可避免的存在微小的随机缺陷, 这些缺陷实验室可以通过激光散射^[9]、原子混合^[10]和非均匀磁场^[11]来产生. 光晶格的缺陷可以在空间上局域或者延展, 因此展开缺陷光晶格中的 BEC 气体的动力学性质的研究具有现实意义和实用价值^[12-14]. 晶格缺陷与原子间相互作用的耦合在系统的输运特性中起着至关重要的作用, 并引发诸多现象, 例如, 光晶格中的缺陷可以抑制晶格中平面波的传播, 从而使平面波的传播经历从正常态到超流态的转换^[15-18].

对于费米气体在非调制缺陷晶格中的超流特性已做了详细的讨论^[19], 现在将重点讨论环形光晶格中格点缺陷做周期性振荡情况即调制缺陷光晶格中的费米气体的超流特性. 本文主要讨论系统在玻色爱因斯坦凝聚态(BEC)到原子库珀对凝聚态(BCS)整个渡越区中光晶格缺陷强度、分布与原子间相互作用的耦合所产生的现象. 在流体动力学模型和两模近似下, 整个系统的动力学性质可以等效为单摆模型的哈密顿量, 从而推导出系统沿 BEC-BCS 整个渡越区的原子数密度的临界值. 当系统的原子数密度小于临界值时, 平面波被晶格中的缺陷完全反射, 缺陷抑制波的传播, 从而使得系统处于正常态; 当系统的原子数密度大于临界值, 平面波连续穿过缺陷, 系统处于超流态. 系统的超流特性依赖于缺陷的强度、类型以及原子间的相互作用, 并且由于缺陷与原子间相互作用的耦合, 系统在 BCS 端更容易维持超流态.

本文建立了费米气体在调制缺陷的一维环形光晶格中的物理模型, 推导出系统沿 BEC-BCS 整个渡越区的临界原子数密度, 在此基础上研究含单格点和双格点调制缺陷的情况, 最后给出结论.

2 模型

玻色爱因斯坦凝聚是指当温度低于某一临界值时玻色子体系中大量粒子凝聚到一个或几个量子态的现象, 其是超导和超流现象的物理根源. 费米子通过库珀配对等机制形成费米子对, 其如同准复合玻

色子, 从而形成 BEC, 导致费米体系的超流和超导. 把 N 个传播方向相同的费米气体 (K^{40}) 囚禁在一维光晶格中, 对于原子数 N 足够大的费米气体, 假设晶格空间足够大, 并且库珀对的尺度小于晶格空间尺度, 粒子间的相互作用从排斥变为吸引, 那么系统就会从 BEC 端到 BCS 端表征流体动力学行为. 当 $T=0$ 时, 费米气体的动力学性质可以用非线性薛定谔方程来描述^[20-22]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi + [V + C |\Psi|^{2\gamma}] \Psi \quad (1)$$

其中 $\Psi(r, t)$ 为费米气体的波函数, $M=2m$, m 为原子质量. V 为光晶格产生的势能 $V_{opt} = V_0 \cos^2(2\pi x/\lambda)$ (V_0 与产生光晶格的激光强度成正比, λ 为激光的波长) 和叠加在光晶格上的外势 V_{ext} 之和. 方程 (1) 中的非线性项 $u(\rho) = C\rho^\gamma$ ($\rho = |\psi|^2$) 由原子间的相互作用产生^[23-24], C 为一个与原子间相互作用有关的常量, ρ 为原子数密度, γ 为相互作用参数 $\zeta=1/K_F a_s$ 的函数. 在弱耦合的 BCS 端相对应常量 $C_{bc} \cong (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2/(2M)$, 么正极限 ($\gamma=2/3$) 下可以写为 $C_{mi}=0.44C_{bc}$. 对于 BEC 端 ($\gamma=1$), $C_{bec}=4\pi\hbar^2 a_m/M$, 其中 $a_m=0.6a_s$ 为每对分子的有效散射长度, a_s 为 s 波散射长度, 本文中 $a_m=10 \text{ nm}$.

当凝聚体的化学势比周期性晶格势的深度小的多时, 方程(1)可改写为一维离散的非线性方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}(\psi_{n-1} + \psi_{n+1}) + (\epsilon_n + \tilde{C} |\psi_n|^{2\gamma}) \psi_n \quad (2)$$

其中, ψ_n 表示凝聚体在第 n 个晶格上的波函数, τ 表示时间, ϵ_n 为局域在第 n ($n=1, \dots, N$) 个晶格上的缺陷, $\tilde{C}$ 为非线性参数.

$$\tilde{C} = f(\gamma) \rho^\gamma = \frac{C\pi^{<1-\gamma>/2} s^{<\gamma-3>/4} e^{2\sqrt{s}}}{8(1+\gamma)^{3/2} E_R} \quad (3)$$

$E_R = \hbar^2 \pi^2 / 2Md$ 为晶格的衰退能量, $d = \lambda/2$ ($\lambda = 783 \text{ nm}$) 表示晶格宽度, s 表示晶格深度. 我们研究此气体以平面波 $\psi_n(\tau=0) = e^{ikn}$ 的形式在调制缺陷的环形光晶格中的传播特性. 其中 k 为平面波的准动量, $k = 2\pi l/N$, l 为从 0 取到的 $N-1$ 整数.

系统的角动量为

$$L = i \sum_n (\psi_n \psi_{n+1}^* - \psi_n^* \psi_{n+1}) \quad (4)$$

方程(2)的哈密顿量为

$$H = \sum_n \left[-\frac{1}{2}(\psi_n \psi_{n+1}^* + \psi_n^* \psi_{n-1}) + \epsilon_n |\psi_n|^2 + \frac{\gamma+1}{2} |\psi_n|^{2<\gamma+1>} \right] \quad (5)$$

相对于波矢为 $\pm k$ 的平面波, 角动量 $L(t)$ 在

初始值 L_0 和 $-L_0$ 之间振荡. 在不含缺陷的纯晶格中, 相反波矢的波旋转状态是简并, 然而由于两列 $\pm k$ 波的耦合, 缺陷分离了这种简并状态, 这与含“左”“右”局域化态的双势阱中的遂穿十分相似, 在这种情况下, 两列波的振荡可以等效为约瑟夫森振荡. 因此, 当缺陷 ϵ 很小, 并且缺陷所引入的能量分裂比不同的转动状态间的能量差要小, 在这样的近似下, 可以用两模近似来分析该系统的动力学性质:

$$\psi_n(\tau) = A(\tau)e^{ikn} + B(\tau)e^{-ikn} \quad (6)$$

其中 $A(\tau), B(\tau) = \sqrt{n_{A,B}(\tau)} e^{i\varphi_{A,B}(\tau)}$, $z = n_A(\tau) - n_B(\tau)$, $\varphi = \varphi_A(\tau) - \varphi_B(\tau)$.

将(6)代入拉格朗日方程:

$$l = \sum_n \frac{i}{2} (\dot{\psi}_n \psi_n^* - \psi_n \dot{\psi}_n^*) - H \quad (7)$$

利用归一化条件 $\sum_n |\psi_n|^2 = N$ 得到:

$$\xi = \frac{L}{N} = -\varphi_A \dot{n}_A - \varphi_B \dot{n}_B - \gamma C n_A n_B - \frac{2 \sum_n \epsilon_n \sqrt{n_A n_B} \cos(\varphi_A - \varphi_B + 2kn)}{N} \quad (8)$$

再利用欧拉-拉格朗日方程进行变换:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \xi}{\partial q_i} \quad (9)$$

其中变化参数 $q_i(\tau) = n_{A,B}, \varphi_{A,B}$, 得到:

$$\dot{z} = -\frac{2 \sum_n \epsilon_n}{N} \sqrt{1-z^2} \sin(\varphi + 2kn) \quad (10)$$

$$\dot{\varphi} = \gamma \tilde{C} z + \frac{2 \sum_n \epsilon_n}{N} \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cos(\varphi + 2kn) \quad (11)$$

因为系统总能量守恒, 则 $\dot{z} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}$, $\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial z}$ 可得到系统的等效哈密顿量:

$$H = \frac{1}{2} \gamma \tilde{C} z^2 - \frac{2 \sum_n \epsilon_n}{N} \sqrt{1-z^2} \cos(\varphi + 2kn) \quad (12)$$

由此可知系统的动力学性质转化成了单摆的哈密顿量模型.

利用傅里叶变换将缺陷进行等效 $\bar{\epsilon} e^{ia} = \sum_n \epsilon_n e^{2ikn}$, 方程(12)可以等效为一个含单格点缺陷的等效哈密顿量:

$$H = \frac{1}{2} \gamma \tilde{C} z^2 - \frac{2\bar{\epsilon}}{N} \sqrt{1-z^2} \cos(\varphi + \alpha) \quad (13)$$

利用角动量来讨论整个系统的动力学性质, 将(6)式代入(4)式, 得到系统在两模近似下的角动量:

$$L = 2Nz \sin k \quad (14)$$

$\langle L \rangle = 0$, 表示光晶格中传播的平面波被光晶格内的缺陷完全反射, $\langle L \rangle \neq 0$, 表示传播的平面波仅部分的被缺陷所反射, 符号 $\langle \dots \rangle$ 表示参量对时间的平均. 对于 $\langle L \rangle \neq 0$ 的情况, 缺陷维持了平面波传播的连贯性, 因此可以观察到系统与超流态相关的一个持续电流.

现在来推导角动量从 $\langle L \rangle = 0$ 到 $\langle L \rangle \neq 0$ 的临界条件: 令 $z(0) = 1$, $\varphi(0) = 0$ 为初值, 则所对应的初始的哈密顿量为 $H(0) = \frac{1}{2} \gamma \tilde{C}$, 当 $z=0$ 时, 可得所对应的哈密顿量为 $H(z=0) = -\frac{2\bar{\epsilon}}{N} \cos(\varphi + \alpha) \leq \frac{2\bar{\epsilon}}{N}$, 由于系统的角动量方程(14)与 z 成正比, 所以平均角动量变化的临界条件可以转化为 z 是否能达到 0 的条件, 即 $\frac{1}{2} \gamma \tilde{C} \geq \frac{2\bar{\epsilon}}{N}$, 由方程(3)可得:

$$\rho_c = \left[\frac{4\bar{\epsilon}}{N\gamma} \frac{1}{f(r)} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (15)$$

当 $\rho = \rho_c$, $\langle L \rangle = 0$; 当 $\rho > \rho_c$, $\langle L \rangle \neq 0$. 通过(15)式可以看出, 整个临界条件依赖于 γ 的选择, 所以临界原子数密度在系统穿越整个渡越 BEC 端到么正区有很大的不同. 由于缺陷与原子间相互作用的耦合, 系统的超流特性强烈的依赖于缺陷的性质以及原子间的相互作用.

3 单格点振荡缺陷

若费米气体所在的环形光晶格中仅有一个格点含有周期性振荡缺陷, 其缺陷的表示形式为:

$$\epsilon_n = \epsilon \cos^2(\omega t) \delta_{n,\bar{n}} \quad (16)$$

由此可得系统的有效哈密顿量 ($\varphi = \varphi + 2k\bar{n}$):

$$H = -\frac{2\epsilon \cos^2(\omega t)}{N} \sqrt{1-z^2} \cos(\varphi + \alpha) + \frac{1}{2} \gamma \tilde{C} z^2 \quad (17)$$

以及

$$\dot{z} = -\frac{2\epsilon \cos^2(\omega t)}{N} \sqrt{1-z^2} \sin(\varphi) \quad (18)$$

$$\dot{\varphi} = \gamma \tilde{C} z + \frac{2\epsilon \cos^2(\omega t)}{N} \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cos(\varphi + 2kn) \quad (19)$$

可以推导出提供系统超流态的临界原子数密度:

$$\rho_c = \left[\frac{4\epsilon \cos^2(\omega t)}{N\gamma f(r)} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (20)$$

如图 1 可知, 系统在初始时刻 ($t=0$) BEC 端的

临界原子数密度比么正区的大的多,所以系统在BCS端更容易支持超流态.从图2和图3可以看出,当 $\alpha < 1$ 时, $\rho < \rho_c$,两端的角动量随时间在最大值和最小值之间振荡,系统的平均角动量为 $\langle L \rangle / L_0 = 0$,这表明平面波被光晶格内的缺陷完全反射,系统处于由缺陷导致阻尼的一个正常态.当 $\alpha > 1$ 时, $\rho > \rho_c$,两端的平均角动量 $\langle L \rangle / L_0 \neq 0$,平面波仅部分的被缺陷所反射,系统形成超流态.

4 双格点振荡缺陷

若环形光晶格中的两个格点含调制缺陷:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_1 \cos^2(\omega_1 t) \delta_{n, \bar{n}_1} + \varepsilon_2 \cos^2(\omega_2 t) \delta_{n, \bar{n}_2} \quad (21)$$

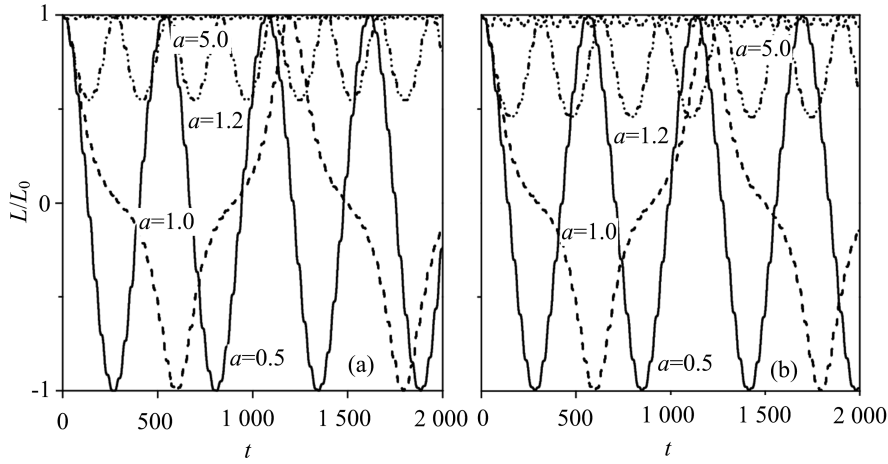


图2 不同原子数密度下归一化的角动量 L/L_0 随时间变化的关系,(a)表示BEC端($\gamma = 1$) (b)表示么正区($\gamma = 2/3$), $\alpha = \rho/\rho_c = 0.5, 1.0, 1.2, 5.0$. $\varepsilon = 0.5$, $\omega = 0.1$, $N = 40$, $z(0) = 0$, $\varphi(0) = 1$

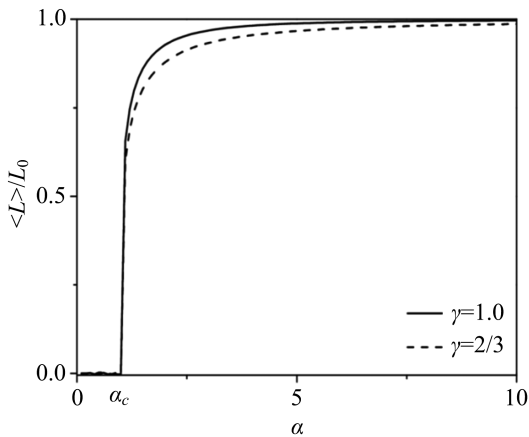


图3 BEC端 $\gamma = 1$ (实线)和么正区 $\gamma = 2/3$ (虚线)两端的平均角动量与 $\alpha = \rho/\rho_c$ 的变化关系,其中 $\alpha_c = 1$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega = 0.1$, $N = 40$, $z(0) = 0$, $\varphi(0) = 1$

由此可得系统的有效哈密顿量以及临界原子数密度($\Delta\varphi_{12} = 2k(\bar{n}_2 - \bar{n}_1)$):

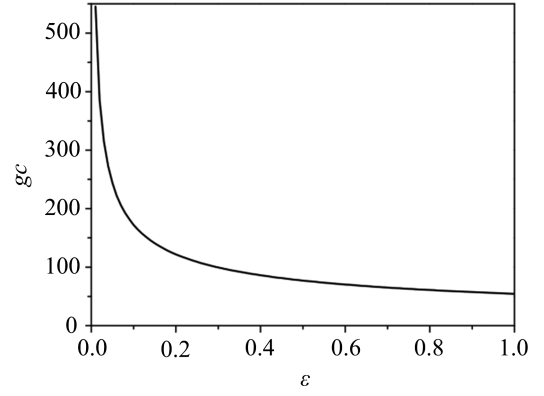


图1 初始时刻($t = 0$)时BEC端 $\gamma = 1$ 和么正区 $\gamma = 2/3$ 临界原子数目的比值 g_c 与晶格缺陷大小的关系

$$H = \frac{1}{2} \gamma \tilde{C} z^2 - \frac{2\varepsilon_1 \cos^2(\omega_1 t)}{N} \sqrt{1 - z^2} \cos(\varphi) - \frac{2\varepsilon_2 \cos^2(\omega_2 t)}{N} \sqrt{1 - z^2} \cos(\varphi + \Delta\varphi_{12}) \quad (22)$$

$$\rho_c = \left[\frac{4\varepsilon_1 \cos^2(\omega_1 t)}{N\gamma f(r)} + \frac{4\varepsilon_2 \cos^2(\omega_2 t)}{N\gamma f(r)} \cos\Delta\varphi_{12} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (23)$$

在这里有个重要的现象,两个缺陷的间隔以及平面波的角动量仅依赖于相位差 $\Delta\varphi_{12}$.当两个缺陷的距离固定,系统的动力学性质与含单格点缺陷的情况相符(如图3所示).当系统两格点的缺陷强度 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ 相同时,系统的超流特性不仅与原子数密度有关还与准动量 k 和两格点缺陷的距离差 $\Delta n = \bar{n}_2 - \bar{n}_1$ 有关.图4分别绘制了系统在BEC端 $\gamma = 1$ 和么正区 $\gamma = 2/3$ 归一化的角动量与两缺陷格点差之间的关系,发现平面波的传输特性存在周期性的特征:当相位差为 π 的奇数倍时 $\Delta\varphi_{12} = (2j - 1)\pi$, (j

$=1, 2, 3, \dots$) 系统的归一化角动量几乎为 1, 系统形成超流态, 而与原子数密度无关. 若两格点的缺陷强度不同, $\Delta\varphi_{12}$ 的取值与系统的超流性无关(图 5). 综上所述, 在原子数密度低于临界值, 系统仅在两缺陷强度相同情况下形成超流态.

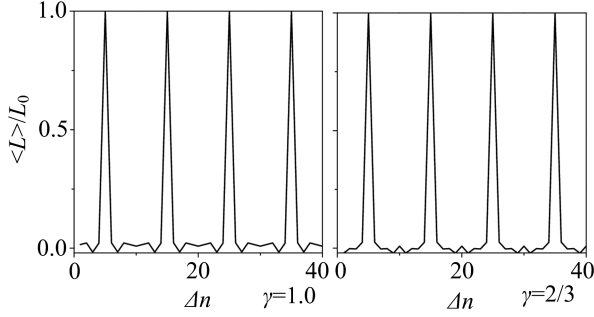


图 4 BEC 端 $\gamma = 1$ 和么正区 $\gamma = 2/3$ 归一化的角动量与两缺陷格点差 ($\Delta n = \bar{n}_2 - \bar{n}_1$) 之间的关系. $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.01$, $\omega_1 = \omega_2 = 0.1$, $N = 40$, $2k = 5/\pi$, $z(0) = 0$, $\varphi(0) = 1$

5 结 论

本文研究了一维调制缺陷环形光晶格中费米气体在 BEC—BCS 整个渡越区的动力学性质. 在流体动力学模型和两模近似情况下, 整个系统可以等效成单摆模型的哈密顿量, 由此推导出将系统分为正常态和超流态的原子数密度的临界值, 在此基础上研究了单格点和双格点调制缺陷的情况. 通过研究

发现系统的超流特性依赖于缺陷的强度、类型以及原子间的相互作用, 并且由于缺陷与原子间相互作用的耦合, 系统在 BCS 端容易用比较小的原子数密度来维持超流态. 本文的研究结论相比于之前的工作更具一般性, 对无序光晶格中费米气体的研究具有一定的理论指导意义和现实价值.

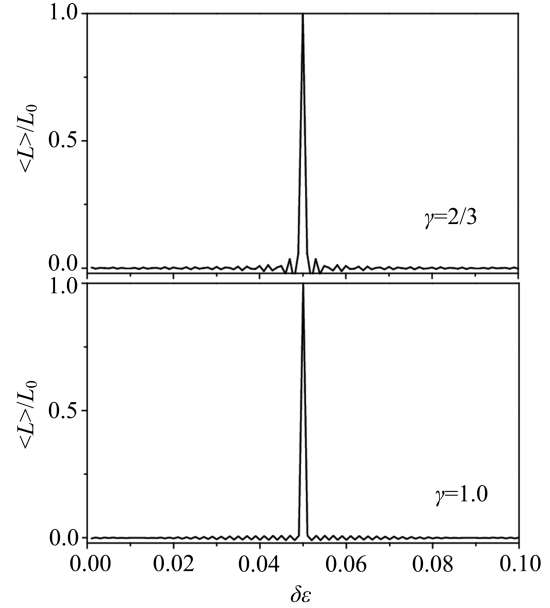


图 5 BEC 端 $\gamma = 1$ 和么正区 $\gamma = 2/3$ 归一化的角动量与两格点缺陷差 ($\Delta\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$) 之间的关系.

$\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0.1$, $\omega_1 = \omega_2 = 0.1$, $N = 40$, $2k = 5/\pi$, $\Delta n = \bar{n}_2 - \bar{n}_1 = 5$, $\alpha = \rho/\rho_c = 0.5$, $z(0) = 0$, $\varphi(0) = 1$

参 考 文 献

- [1] 王义道, 原子的激光冷却与陷阱[M]. 北京大学出版社, 2007.
- [2] V.O. Nesterenko, A.N. Novikov, A.Yu Cherny, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42**(2009) 235303.
- [3] Y. Hu, Z.X. Liang, B.B. Hu, *Phys. Rev. A* **81** (2010) 053621.
- [4] S.J. Yang, S. Nie, *Phys. Rev. A* **82** (2010) 061607.
- [5] Ce Shang, Yuanlin Zheng, and Boris A. Malomed, *Phys. Rev. A* **97**, (2018)043602.
- [6] Gavril Shchedrin, Daniel Jaschke, and Lincoln D. Carr, *Phys. Rev. A* **97**, (2018) 043601.
- [7] I. Bloch, J. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **80**, (2008) 1215.
- [8] Shlomo E. Sklarz, Inbal Friedler, David J. Tannor, Yehuda B. Band, and Carl J. Williams, *Phys. Rev. A* **66**, (2002)053620.
- [9] M. White, M. Pasienski, D. McKay, S. Q. Zhou, D. Ceperley, and B. DeMarco, *Phys. Rev. Lett.* **102**, (2009)055301.
- [10] Uri Gavish and Yvan Castin, *Phys. Rev. Lett.* **95**, (2005) 020401.
- [11] H. Gimperlein, S. Wessel, J. Schmiedmayer, and L. Santos, *Phys. Rev. Lett.* **95**, (2005)170401.
- [12] Xiao-Dong Bai and Ju-Kui Xue, *Phys. Rev. E* **86**, (2012)066605.
- [13] Yongping Zhang, Yong Xu, and Thomas Busch, *Phys. Rev. A* **91**, (2015)043629.
- [14] Y. Zhang, M.E. Mossman, T. Busch, P. Engels, C. Zhang, HYPERLINK "http://link.springer.com/article/10.1007/s11467-016-0560-y" Properties of spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates, *Front Phys.* **11**, 118103 (2016).
- [15] A. V. Yulin, Yu. V. Bludov, V. V. Konotop, V. Kuzmiak, and M. Salerno, *Phys. Rev. A* **84**, (2011)063638.
- [16] Cyril Stark, Lode Pollet, Ataç Imamoğlu, and Renato Renner, *Phys. Rev. Lett.* **107**, (2011)030504.
- [17] Yue Jian, Ai-Xia Zhang, Cai-Xia He, Xiu-Ying Qi, and Ju-Kui Xue, *Phys. Rev. E* **87**, (2013) 053201.
- [18] Kun-Qiang Zhu, Zi-Fa Yu, and Ju-Kui Xue, HYPERLINK "https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960117304784" Transport of spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates in lattice with defects, *Physics Letters A*, **381** (2017) 2272-2277.
- [19] Yue Jian and Ju-Kui Xue, *Eur. Phys. J. D* **66**, (2012)191.
- [20] 曾谨言, 量子力学导论[M]. 北京大学出版社, 1998.
- [21] 苏汝谦, 陈苏卿, 高等量子力学[M]. 复旦大学出版社, 2000.
- [22] Ai-Xia Zhang and Ju-Kui Xue, *Phys. Rev. A* **80**, (2009) 043617.
- [23] Wen Wen, Yu Zhou, and Guoxiang Huang, *Phys. Rev. A* **77**, (2008) 033623.
- [24] S. K. Adhikari, *Phys. Rev. A* **77**, (2008) 045602.