

永磁体 N-N 相对式排列提升旋转式高温超导 磁通泵开路电压的仿真研究^{*}

宋世恒, 李文皓, 肖书良, 李敏娟[†], 周迪帆, 蔡传兵

上海大学理学院物理系, 上海市高温超导重点实验室, 上海 200444

收稿日期: 2023-04-06; 接收日期: 2023-05-15

【摘要】 旋转式高温超导磁通泵可以无接触地向超导线圈中注入直流电, 在超导磁体充电方面具有独特的优势. 在本文中, 我们基于 $H-A$ 方程耦合建立了一个磁通泵二维有限元模型, 分别模拟了三块永磁体、五块永磁体在不同的排列方式下对磁通泵开路电压的影响. 与正常的 N 极向下的排列方式相比, N-N 相对式排列改进后能够提升磁通泵的开路电压; 改进式 Halbach 排列对开路电压几乎没有影响. 在 50 Hz 的旋转频率下, 永磁体 N-N 相对式排列使开路电压提升 13%. 这是由于永磁体 N-N 相对式排列后, 磁通将会被挤压, 从而产生有多个峰值的磁感应强度分布, 使等效电压波形从不对称的四重峰变为多重峰. 最后, 对永磁体宽度进行了参数化扫描来分析永磁体尺寸对开路电压的影响. 通过优化磁体结构设计, 可以控制磁感应强度分布, 提升磁通泵的开路电压, 为提升实验装置的输出性能提供一种新颖的设计方向.

关键词: 高温超导磁通泵, $H-A$ 耦合, N-N 相对式排列, 开路电压

PACS: 84.71.Mn, 85.25.Am, 75.40.Mg

DOI: 10.13380/j.ltpl.2023.03.001

Simulation of N-N Relative Arrangement of Permanent Magnets to Raise Open-circuit Voltage of Dynamo-type High-Tc Superconducting Flux Pump

SONG Shiheng, LI Wenhao, XIAO Shuliang, LI minjuan[†], ZHOU Difan, CAI Chuanbing
Shanghai Key Laboratory of High Temperature Superconductors, Department of Physics, Shanghai University, Shanghai 200444, China

Received date: 2023-04-06; accepted date: 2023-05-15

【Abstract】 The dynamo-type high-Tc superconducting (HTS) flux pump can inject direct current into the superconducting coil without contact, which has a unique advantage in superconducting magnet charging. In this paper, a two-dimensional finite element model of flux pump is established based on $H-A$ equation coupling, and the influences of three permanent magnets (PMs) and five PMs on the open-circuit voltage (V_{oc}) of flux pump under different arrangement modes are simulated respectively. Compared with the normal N-pole downward arrangement, the improved N-N relative arrangement can increase the V_{oc} . The improved Halbach arrangement has little effect on the V_{oc} . At a rotation frequency of 50 Hz, the N-N relative arrangement of PMs increases the V_{oc} by 13%. This is

^{*} 中科院先导专项(XDB25000000); 国家自然科学基金(52172271); 上海市科技创新计划(22511100200); 国家重点研发计划(2022YFE03150200)资助的课题.

[†] minjuanli@shu.edu.cn

because after the N-N relative arrangement of PMs, the magnetic flux will be squeezed, resulting in a magnetic induction intensity distribution with multiple peaks, so that the equivalent voltage waveform (V_{eq}) changes from an asymmetric quadruple peak to a multiple peak. Finally, the influence of PM size on V_{oc} is analyzed by parametric scanning of PM width. By optimizing the design of the magnet structure, the magnetic induction intensity distribution can be controlled and the V_{oc} of the flux pump can be increased, which provides a novel design direction for improving the output performance of the experimental device.

Keywords: HTS flux pump, H - A coupling, N-N relative arrangement, open-circuit voltage

PACS: 84.71.Mn, 85.25.Am, 75.40.Mg

DOI: 10.13380/j.ltpl.2023.03.001

Reference method: SONG Shiheng, LI Wenhao, XIAO Shuliang, LI minjuan[†], ZHOU Difan, CAI Chuanbing,
Low. Temp. Phys. Lett. **45**, 0123 (2023)

1 引言

近年来,第二代高温超导材料在载流性能和成本效益方面有了显著和持续提升^[1-3].与低温超导材料相比,第二代高温超导材料具有更高的临界电流密度和更好的力学性能.这极大地促进了高温超导磁体技术的发展^[4,5],如磁共振成像^[6]、高温超导磁悬浮^[7]等.然而,如果使用传统的铜线引流来为超导磁体充电,由于接口处位于液氮温区与室温之间,将会导致严重的热泄漏,增加了制冷负担、操作和维护成本.这些问题严重阻碍了高温超导磁体的应用和发展.

高温超导磁通泵是一种可以在没有任何物理接触的情况下向超导线圈注入直流电的设备,这极大地减少了热损失和制冷成本,为高温超导磁体供电问题提供了一种潜在的解决方案.磁通泵主要有两种类型:旋转式磁通泵和变压整流式磁通泵,这两种类型的磁通泵都得到了很好的发展.旋转式高温超导磁通泵是一种无源设备,它利用永磁体在高温超导带材上产生的周期性磁场^[8-13]来诱导电流.产生直流电压背后的物理机制已被许多课题组广泛研究:Campbell^[14]从电路的角度说明,当临界电流密度受到外磁场的抑制时,交流过程中发生整流效应.Jiang 和 Bumby 发现动态电阻在直流电的产生过程中可能发挥关键作用^[8,13],而 Wang 等人基于磁通动力学绘制了磁通泵的微观图像^[15],Ainslie 等人建立了描述动态过程的完整数值模型,可以再现实验结果^[16-22].

已有研究表明,频率、超导带宽度、空气间隙、永磁体磁感应强度都会对开路电压产生一定影响.为了研究永磁体按照其他方式排列对开路电压的影响,同时也为了提升磁通泵的输出性能,我们基于 $H-A$ 方程耦合^[16, 23]建立了一个旋转式高温超导磁通泵二维模型.与通过插值函数将高温超导带材的实验数据代入模型的方法相比,我们通过公式拟合的方法计算得到的仿真结果与实验结果吻合更好.我们分别模拟了三块永磁体 N-N 相对式排列、五块永磁体 Halbach 排列^[24]对磁通泵等效电压波形和开路电压的影响.

2 建模框架

2.1 模型概述

旋转式高温超导磁通泵模型主要由空气域、旋

转域、永磁体和超导带组成,如图 1 所示.除了超导带处的网格为四边形网格外,其他区域都设置为自由三角形网格.在旋转域与定子域的衔接处,设置了特定的单元数为 30 的边网格来确保计算过程中磁场传递的连续性.

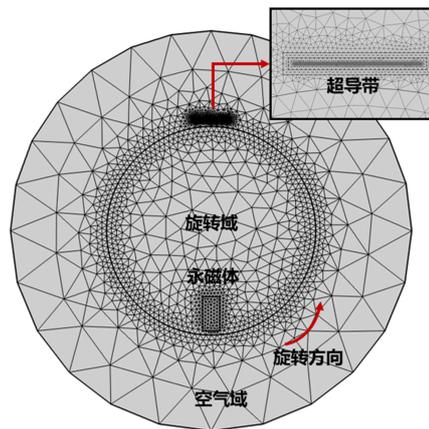


图 1 旋转式高温超导磁通泵二维仿真模型示意图.

模型中各个区域的建模参数如表 1 所示^[16].由于我们改变了永磁体的数量与排列方式,因此与永磁体尺寸相关的参数并没有在表中给出,而是在后文中进行讨论.

表 1 旋转式高温超导磁通泵二维模型建模参数.

永磁体	有效长度, L	12.7 mm
	剩余磁通密度	1.25 T
超导带	宽度, c	12 mm
	厚度, d	1 μ m
	临界电流, I_{c0}	283 A
	n 值	20
转盘半径		35 mm
空气间隙		3.7 mm
计算周期		10

2.2 基于 $H-A$ 方程耦合建立的二维模型

本文中我们使用 $H-A$ 耦合方程^[16, 23]进行计算.如图 1 所示, H 方程在小区域内对高温超导带进行局部的求解:

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1)$$

$$J = \nabla \times H \quad (2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (3)$$

磁矢量势 A 方程求解其余地方:

$$B = \nabla \times A \quad (4)$$

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad (5)$$

在建立模型的过程中,通过对直接求解麦克斯韦方程组相关矢量场的区域进行限制(即高温超导带区域)来简化计算.这使得其他区域可以使用磁标量势 V_m 来计算电磁场,其磁通守恒方程如下:

$$-\nabla \cdot (\mu \nabla V_m - B_r) = 0 \quad (6)$$

式中 B_r 为剩余磁通密度.

在这种混合公式模型中,必须注意 H 方程和 A 方程子域的共同边界耦合变量,以保持连续性.这里通过弱耦合的形式将电场从 A 方程耦合到 H 方程,并将磁场的切向分量从 H 方程耦合到 A 方程来实现,相当于一个 Neumann 边界条件^[23].除了上述 H - A 耦合外,还需要考虑磁标量与磁矢量之间的连续性,通过在 A 方程中嵌入如下公式来施加 V_m 与 A 之间的连续性:

$$n_1 \times H_A = n_1 \times H_{V_m} = n_1 \times (-\nabla V_m) \quad (7)$$

$$n_2 \cdot B_{V_m} = n_2 \cdot B_A = n_2 \cdot \nabla \times A \quad (8)$$

式中 n_1, n_2 为反向平行的两个表面法线.

2.3 引入 $J_c(B, \theta)$ 的修正模型

在计算的过程中,我们使用 E - J 关系^[25-27]对高温超导带进行定义:

$$E = \frac{E_0}{J_c} \left| \frac{J}{J_c} \right|^{n-1} J \quad (9)$$

在二维模型中, $J = [0, 0, J_z]$, $E = [0, 0, E_z]$ 分别为电流密度和电场强度,在这里假设二者平行, $E = \rho J$. $E_0 = 1 \mu\text{V}/\text{cm}$, 为特征电场. n 定义了超导态向正态转变的陡度^[28, 29].

对 J_c 的选取,首先,我们选取 J_c 为常数: $J_c = I_{c0}/(c \cdot d) = 2.358 \times 10^{10} \text{ A}/\text{m}^2$, 其中 c 和 d 分别为高温超导带的宽度和厚度.然后我们考虑了外磁场强度 B 对高温超导带性能的影响,将实验数据代入 Kim-Anderson 模型^[30, 31]:

$$J_c(B) = \frac{J_{c0}}{1 + B/B_0} \quad (10)$$

对 J_{c0}, B_0 进行拟合,拟合结果为: $J_{c0} = 2.419 \times 10^{10} \text{ A}/\text{m}^2$, $B_0 = 0.09 \text{ T}$.为更符合实际情况,对 J_c 的选取,我们考虑了外磁场的强度 B 和角度 θ 的影响,将 J_{c0}, B_0 的拟合结果使用 Blatter 经验公式^[32]:

$$J_c(B, \theta) = \frac{J_{c0}}{(1 + (k^2 B_x^2 + B_y^2)^{1/2}/B_0)^\alpha} \quad (11)$$

代入模型. 式中 $k = 0.295, \alpha = 0.7, B_x = B \sin \theta, B_y = B \cos \theta, \theta$ 为外磁场方向与高温超导带法向方向的夹角.

瞬时等效电压 $V_{eq}^{[9]}$ 与开路电压 V_{oc} 的定义如下:

$$V_{eq}(t) = -L \cdot \frac{1}{T} \int_0^e E_z(x, t) dl \quad (12)$$

$$V_{oc}(t) = \frac{1}{T} \int_T^{2T} V_{eq}(t) dt \quad (13)$$

其中 L 是永磁体的有效长度,我们选择第二个周期的结果来进行计算,避免了第一个周期可能出现的任何初始瞬态效应.

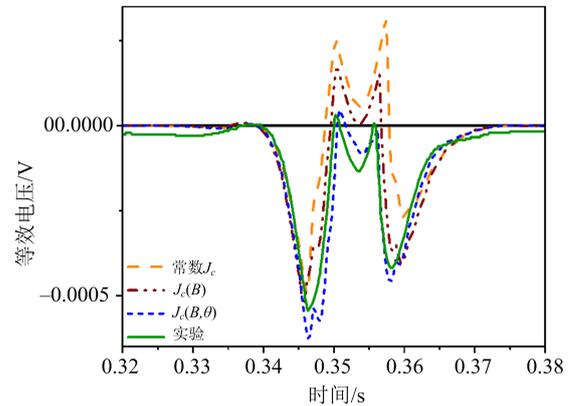


图2 修正模型得到的仿真结果与实验结果的对比图.

为了确保仿真结果的准确性,我们将仿真结果与 Maitra 等人^[8]的实验结果进行对比,如图2所示.我们发现,当 J_c 为一个常数时,结果与实验结果偏差较大;当 J_c 的选取考虑外磁场强度 B 后,计算结果接近实验结果;当 J_c 的选取同时考虑外磁场强度 B 与角度 θ 后,即引入 $J_c(B, \theta)$ 的模型的仿真结果与实验结果基本吻合.

因此,我们将采用此修正模型研究三块永磁体、五块永磁体在不同的排列方式下对磁通泵开路电压的影响.

3 不同排列方式对开路电压的影响

3.1 三块永磁体

首先使用三块长 12 mm、宽 2 mm 的永磁体代替一整块长 12 mm、宽 6 mm 的永磁体,如图3(a)、(b)所示.从图中可以看出,相同体积的整块永磁体和三块永磁体所产生的磁感应强度峰值均约为 0.9 T,分布范围相同.

然后,改变三块永磁体的排列方式,将两侧的永磁体的 N-N 相对式排列,中间磁体 N 极方向不变,对磁通进行挤压. 挤压后的磁感应强度的峰值大小增强约为 1.2 T,但分布范围变小,如图 3 (c) 所示. 这将导致在超导带表面处产生的磁感应强度较小,因此需要对永磁体的尺寸进行进一步改进,在总体积不变的原则下,将中间主磁体的宽度增大至 4 mm,挤压磁通的两侧 N-N 相对式排列的永磁体宽度减小为 1 mm,以此来增大挤压后磁感应强度的分布范围,如图 3 (d) 所示. 改进后的 N-N 相对式排列的永磁体产生的磁感应强度峰值约为 1.0 T,大小与改进前相比虽然有所下降,但分布范围明显变大. 总的来说,虽然对永磁体的排列方式进行改变能够提升其磁感应强度的大小,但也会限制其分布范围,因此需要对永磁体尺寸进行改进,来得到能够提升磁通泵输出性能的磁感应强度大小和分布.

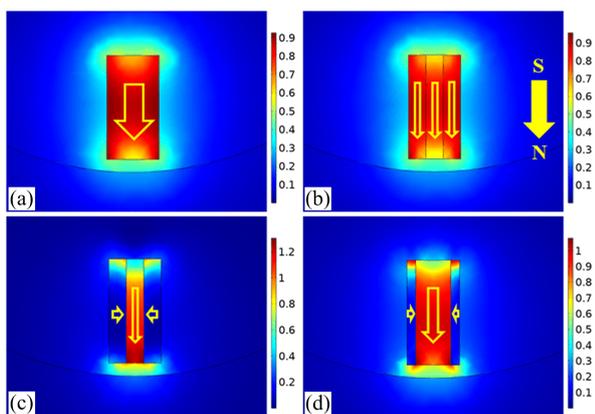


图 3 永磁体(a) 整块、(b) 三块正常排列、(c) 三块 N-N 相对式排列、(d) 三块相对式排列改进分别产生的磁感应强度仿真结果.

我们采用修正模型计算了三块永磁体按不同方式排列后对磁通泵输出性能的影响,得到了对应的等效电压波形图和开路电压值,其中等效电压波形图是在旋转频率为 4.25 Hz 时计算得到的,如图 4 (a) 和图 4 (b) 所示. 从计算结果可以看出,一整块永磁体和三块小的永磁体正常排列的结果基本相同,说明分成三块永磁体排列后并不会对开路电压产生影响,这一结果与磁感应强度分布的结果相对应. N-N 相对式排列后等效电压波形发生变化,由不对称的四重峰变为多重峰,这是由于磁感应强度分布由单峰变为双峰造成的. N-N 相对式排列后产生的开路电压不但没有提升,在旋转频率为 50 Hz 时还

降低了约 8%,主要原因是由于磁感应强度的分布范围较小. 增大主磁体尺寸后,磁感应强度的分布范围变大,在 50 Hz 时产生的开路电压提升了约 13%. 开路电压随频率的增长呈线性增长,改进后的 N-N 相对式排列的斜率比正常排列高出约 0.77,这种排列方式产生的开路电压随频率的增长速率更快,可以在一定程度上提升磁通泵的输出性能.

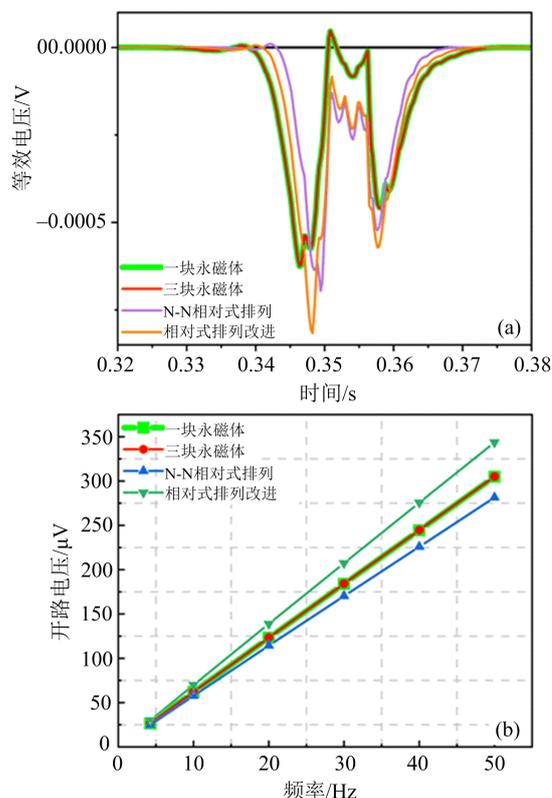


图 4 三块永磁体在不同排列方式下得到的 (a) 旋转频率为 4.25 Hz 时的等效电压波形图 (b) 不同旋转频率下的开路电压值.

虽然 N-N 相对式排列后永磁体下表面处磁感应强度变大,如图 3 所示,但我们要考虑的是超导带表面的磁感应强度大小,因此我们计算了超导带表面的磁感应强度来进一步研究开路电压提升的原因,结果如图 5 所示. 从图中可以看出,N-N 相对式排列后磁感应强度分布出现多个峰,而正常排列的主峰与小峰之间差距很小,基本上相当于一个峰. 并且 N-N 相对式排列使磁感应强度的大小有所降低,主磁体变宽后的 N-N 相对式排列的磁感应强度分布无论是峰宽还是大小都有明显的提高. 要想产生较大的开路电压,不仅需要较大的磁感应强度,还需要较广的磁感应强度分布,从磁感应强度的角度可

以对计算结果进行合理的解释。

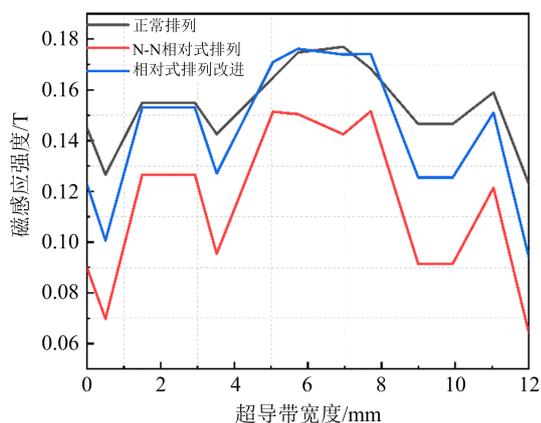


图5 三块永磁体不同方式排列超导带表面磁感应强度对比。

3.2 五块永磁体

从三块永磁体的计算结果可知,整块永磁体与小块永磁体正常排列没有区别,因此在计算五块永磁体时,不再对整块永磁体进行计算.我们使用了五块长 12 mm、宽 1.5 mm 的永磁体进行计算,如图 6 所示.在 N-N 相对式排列的基础上,我们在两侧增加了两块 N 极向上排列的永磁体构成 Halbach 排列,如图 6 (b) 所示.虽然磁感应强度的峰值由 0.9 T 增大至 1.4 T,但其分布范围很小.同样为了增强磁感应强度的分布范围,对 Halbach 排列进行了磁体尺寸的改进,其中主磁体的宽度增大为 4.5 mm,挤压磁体的宽度为 1 mm,两侧磁体的宽度为 0.5 mm,如图 6 (c) 所示.改进式 Halbach 排列产生的磁感应强度峰值没有发生变化,但分布范围明显变大.

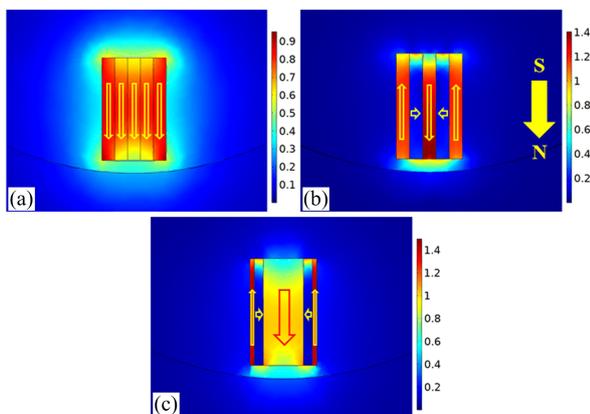


图6 永磁体(a)五块正常排列、(b)五块 Halbach 排列、(c)改进式 Halbach 排列分别产生的磁感应强度仿真结果。

Halbach 排列同样使等效电压波形变为多重峰,由于未改进的 Halbach 排列磁感应强度分布范围较小,使得等效电压波形较为杂乱,并且产生的开路电压值较低,如图 7 所示.图 6 (c) 描述了改进式 Halbach 排列产生的开路电压与正常排列的结果相差不大,并没有太大提升,主要原因是磁感应强度的分布范围还不够大.由于继续增大主磁体尺寸会使两侧磁体尺寸过小,不贴合实际,因此我们没有对磁体尺寸进行进一步改变.不过五块永磁体的计算结果可以让我们对开路电压的提升原因有进一步的理解:仅仅提升磁感应强度的大小是不够的,其分布范围也要足够广,这样才能在超导带表面处感应到较大的磁感应强度,诱导出更高的开路电压。

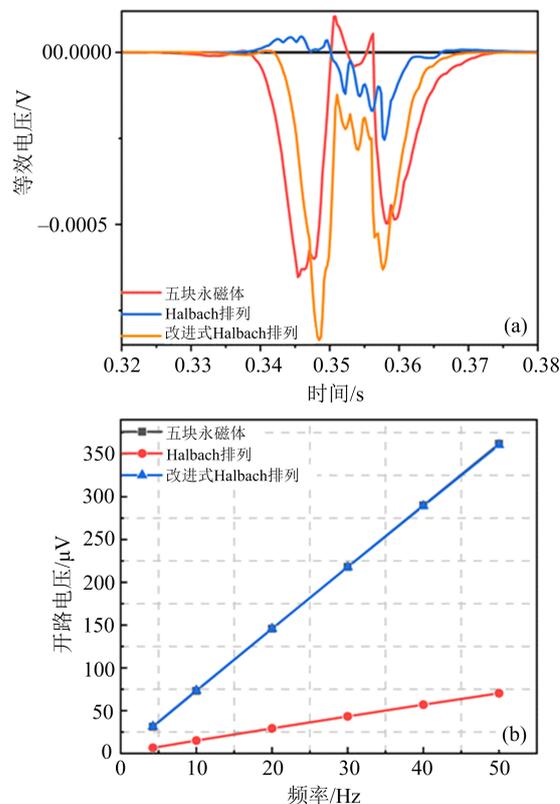


图7 五块永磁体在不同排列方式下得到的(a)旋转频率为 4.25 Hz 时的等效电压波形图 (b) 不同旋转频率下的开路电压值。

最后,对永磁体宽度进行了参数化扫描来研究永磁体尺寸对开路电压的影响,永磁体旋转频率为 4.25 Hz,扫描范围从 2 mm 到 10 mm,间隔为 2 mm,扫描后得到的等线电压波形与开路电压值如图 8 (a)、(b) 所示.从图中可以看出,随着永磁体宽

度的增加,开路电压不断升高.当永磁体宽度大于6 mm时,等效电压波形开始上移,导致开路电压的提升速率大大降低.我们认为这是由于永磁体尺寸过大会使超导带内的磁通达到饱和,从而抑制开路电压的产生,降低开路电压的提升速率.由于一整块永磁体与多块永磁体正常排列产生的效果相同,因此这里不再对永磁体块数的影响进行讨论.

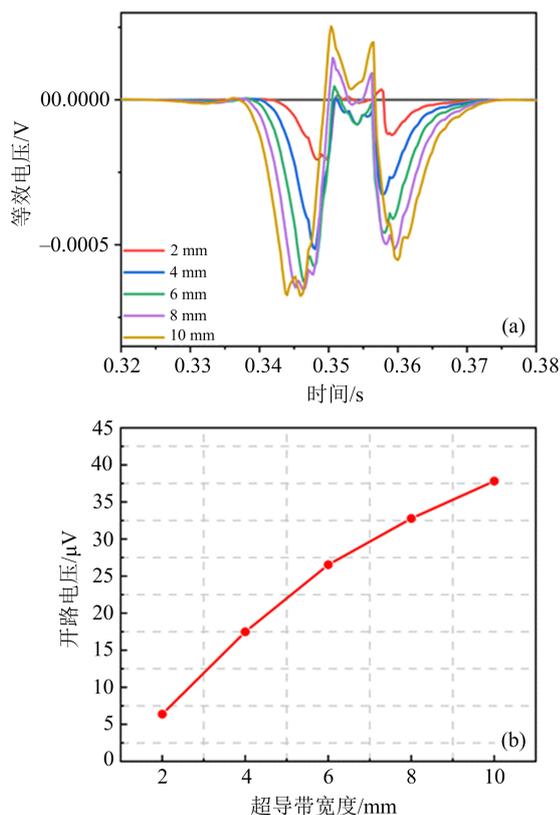


图8 旋转频率为4.25 Hz时对永磁体宽度进行参数化扫描得到的(a)等效电压波形图(b)开路电压值.

4 结论

在本文中,我们基于 H - A 方程耦合建立了一个磁通泵二维有限元模型,并通过模型中的临界电流表达式进行修正,引入 $J_c(B, \theta)$,得到了与实验结果吻合更好的仿真结果.利用修正模型计算了永磁体在不同的排列方式下对旋转式高温超导磁通泵开路电压的影响.计算结果表明,三块永磁体两侧磁体 N-N 相对式排列通过挤压磁通使磁感应强度分布发生变化,造成了等效电压波形的改变.但由于其产生的磁感应强度分布范围较小,反而会产生较低的开路电压.在保持磁体体积不变的前提下,通过增大主磁体尺寸,缩小两侧永磁体尺寸来对 N-N 相对式排列进行改进,改进后磁感应强度分布范围变大,在较高频率下可以将开路电压提升 13% 左右.

而对于五块永磁体,虽然 Halbach 排列会增强磁感应强度的大小,但由于其分布范围过小,导致产生较低的开路电压.改进式 Halbach 排列的磁感应强度分布范围仍不够大,并不会对开路电压产生太大影响.因此,按不同方式排列的永磁体不仅要产生较大的磁感应强度,还要有足够广的磁场分布,才能诱导出更大的开路电压.为了分析永磁体尺寸对开路电压的影响,对永磁体宽度进行了参数化扫描,发现尺寸过大的永磁体会降低开路电压的提升速率.由于磁通被挤压后在永磁体下表面处的磁感应强度增强,因此后续的研究可以考虑适当减小空气间隙来突出磁感应强度的影响.本研究通过改变永磁体的排列方式,提升了旋转式高温超导磁通泵的输出性能,为实验装置的结构设计提供了一种新的优化方案.

参 考 文 献

- [1] D. Uglietti, *Supercond. Sci. Tech.*, **32** (2019), 053001
- [2] M. W. Rupich, W. Zhang, X. Li, T. Kodenkandath, D. T. Verebelyi, U. Schoop, C. Thieme, M. Teplitsky, J. Lynch, N. Nguyen, E. Siegal, J. Scudiere, V. Maroni, K. Venkataraman, D. Miller, and T. G. Holesinger, *Phys. C. Supercond. Appl.*, **412** (2004), 877
- [3] 罗志永, 曲兰雪, 鲁玉明, 蔡传兵, 白传易, 刘志勇, 范峰, 郭艳群, 曾志刚, 杨召, *低温物理学报*, **5** (2018), 28
- [4] M. Chen, L. Donzel, M. Lakner, and W. Paul, *J. Eur. Ceram. Soc.*, **24** (2004), 1815
- [5] 赵文文, 周迪帆, 鲁玉明, 白传易, 李奇展, 蔡传兵, *低温物理学报*, **2** (2022), 137
- [6] C. Niu, L. Wang, Y. Wang, Y. Zhai, H. Qu, Y. Liu, and Q. Wang, *IEEE. T. Appl. Supercond.*, **30** (2020), 4400606
- [7] Y. Guo, J. Jin, J. Zhu, and H. Lu, *IEEE. T. Appl. Supercond.*, **17** (2007), 2087
- [8] Z. Jiang, C. W. Bumby, R. A. Badcock, H. Sung, N. J. Long, and N. Amemiya, *Supercond. Sci. Tech.*, **28** (2015), 115008
- [9] R. C. Mataira, M. D. Ainslie, R. A. Badcock, and C. W. Bumby, *Appl. Phys. Lett.*, **114** (2019), 162601

- [10] J. Li, C. Sun, P. Zhou, S. Li, R. Wang, G. Ren, Y. Zhou, and G. Ma, *Supercond. Sci. Tech.*, **35** (2022), 075008
- [11] J. Geng, B. Shen, C. Li, H. Zhang, K. Matsuda, J. Li, X. Zhang, and T. A. Coombs, *Appl. Phys. Lett.*, **108** (2016), 815
- [12] C. W. Bumby, Z. Jiang, J. G. Storey, A. E. Pantoja, and R. A. Badcock, *Appl. Phys. Lett.*, **108** (2016), 122601
- [13] Z. Jiang, K. Hamilton, N. Amemiya, R. A. Badcock, and C. W. Bumby, *Appl. Phys. Lett.*, **105** (2014), 112601
- [14] A. Campbell, *Supercond. Sci. Tech.*, **11** (2019), 32
- [15] W. Wang, F. Spaven, M. Zhang, M. Baghdadi, and T. Coombs, *Appl. Phys. Lett.*, **104** (2014), 31
- [16] M. D. Ainslie, F. Grilli, L. Queval, E. Pardo, F. Perez-Mendez, R. C. Mataira, A. Morandi, A. Ghabeli, C. W. Bumby, and R. Brambilla, *Supercond. Sci. Tech.*, **33** (2020), 105009
- [17] M. D. Ainslie, *Superconductivity*, **5** (2022), 100033
- [18] M. D. Ainslie, L. Queval, R. C. Mataira, and C. W. Bumby, *IEEE. T. Appl. Supercond.*, **31** (2021), 4900407
- [19] R. C. Mataira, M. D. Ainslie, R. Badcock, and C. W. Bumby, *IEEE. T. Appl. Supercond.*, **30** (2020), 5204406
- [20] R. C. Mataira, M. D. Ainslie, A. E. Pantoja, R. Badcock, and C. W. Bumby, *Phys. Rev. Appl.*, **14** (2020), 024012
- [21] A. Ghabeli, M. D. Ainslie, E. Pardo, L. Queval, and R. C. Mataira, *Supercond. Sci. Tech.*, **34** (2021), 084002
- [22] A. Ghabeli, E. Pardo, and M. Kapolka, *Sci. Rep.*, **11** (2021), 10296
- [23] R. Brambilla, F. Grilli, L. Martini, M. Bocchi, and G. Angeli, *IEEE. T. Appl. Supercond.*, **28** (2017), 5207511
- [24] C. Huang, B. Xu, and Y. Zhou, *Supercond. Sci. Tech.*, **32** (2019), 045002
- [25] C. Plummer, and J. Evetts, *IEEE. T. Appl. Supercond.*, **23** (1987), 1179
- [26] J. Rhyner, *Phys. C. Supercond.*, **212** (1993), 292
- [27] E. H. Brandt, *Phys. Rev. B*, **55** (1997), 14513
- [28] F. Grilli, E. Pardo, A. Stenvall, D. N. Nguyen, W. Yuan, and F. Gomory, *IEEE. T. Appl. Supercond.*, **24** (2013), 8200433
- [29] M. D. Ainslie, and H. Fujishiro, *Supercond. Sci. Tech.*, **30** (2017), 039501
- [30] Y. B. Kim, C. F. Hempstead, and A. R. Strnad, *Phys. Rev. Lett.*, **9** (1962), 306
- [31] Y. B. Kim, C. F. Hempstead, and A. R. Strnad, *Phys. Rev.*, **129** (1963), 528
- [32] G. B. Blatter, M. V. Feigelman, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.*, **66** (1994), 1125