

电流激励下两带单结超导环的电磁性质研究*

黄海 张佳丽[†] 张建江

华北电力大学 数理学院, 北京 102206

收稿日期: 2018-02-08; 接收日期: 2018-02-28

【摘要】 在两带 Ginzburg-Landau 理论上, 我们研究了在电流激励情形下两带单结超导环的电磁性质. 两带超导环中可引入的两个超导序参量的相位差满足 sine-Gordon 方程, 由该方程的孤立子解我们得到了单个超导结(微桥结构)两端相位差与总磁通之间的线性关系. 通过微桥中电流与超导结两端相位差满足的非线性 Josephson 方程, 建立了在电流激励下环内磁通与外加电流之间的依赖关系. 我们的分析表明两带超导环中可能产生的孤立子解及分数磁通量子化现象可以通过测量单结超导环中的电磁性质加以验证.

关键词: 两带单结超导环, sine-Gordon 方程, 微桥

PACS: 74.78.-w, 74.20.De

1 引言

单结超导环是由一个超导弱连接和大块超导体组成的闭合环路, 分析该结构的电磁性质对研究超导体内的磁通动力学具有重要意义. 在实验工作方面, Silver 等人从 1965 年即开始对单结超导环中的磁通和电流在外加磁场中的行为展开研究^[1,2]. 在此基础上, Mercereau 等人对单结超导环在电子仪器, 尤其是磁力计中的应用作了深入探讨^[3]. 到目前为止, 关于单结超导环的理论研究主要分为线性理论和非线性理论两种. 线性理论是将单结超导环作一个简单近似, 即认为结是线性的, 此时单结超导环的行为直到临界电流为止均表现为环的行为^[1]. 非线性理论则将弱连接近似为一个 Josephson 隧道结, 在引入结两端超导序参量的相位差后, 结中电流与相位差之间满足非线性的 Josephson 关系^[4]. 与线性理论相比, 非线性理论得到的计算结果与实验符合得较好.

2001 年日本科学家发现了二元金属化合物

MgB₂ 的超导电性, 临界温度高达 39 K^[5]. MgB₂ 并非简单的 BCS 超导体而是一种两带超导体, 对 MgB₂ 能带结构和声子谱的计算都表明了两个能隙的存在^[6-9], 有关该超导体两能隙的图像后来被电子隧道、比热和角分辨光电子谱等实验广泛证实^[10-15]. 近年来, 人们开始逐步展开对两带超导体中弱连接结构的研究. 一种典型的超导体弱耦合构型是超导微桥, 该结构具有良好的稳定性, 且几乎所有与 Josephson 效应有关的实验现象, 在微桥中都能够被观测到^[16]. 在 de Gennes 对单带超导体微桥的研究工作基础上^[17], Yerin 和 Omelyanchouk 对两带超导体微桥进行了系统分析, 得到了微桥中电流密度与微桥两端超导序参量之间满足的 Josephson 公式^[18].

本文将对放入单个两带超导体微桥的两带超导环进行研究. 我们在微桥两端加一个外接恒流源, 探究在电流激励情形下超导环中总磁通、结电流与外加电流之间的关系. 首先, 我们由 sine-Gordon 方程的孤立子解得出了超导结两端相位差与总磁通之间满足的线性关系. 其次, 基于两带超导体微桥上的 Josephson 公式, 建立了在电流激励情形下环内磁

* 国家自然科学基金(批准号: 11605055)和中央高校基本科研业务费专项资金资助的课题.

[†] zhangjiali@ncepu.edu.cn

通与外加电流之间的联系.定义 $\beta_e = (2\pi LI_C)/\Phi_0$, 其中 I_C 是临界超导电流, L 是超导环的自感, 而 $\Phi_0 = \pi\hbar/e$ 为磁通量子. 研究表明: 当 $\beta_e < 1$ 时, 结电流和超导环总磁通是外加电流的单值函数; 当 $\beta_e > 1$ 时, 微桥中的电流和超导环总磁通均为外加电流的多值函数, 从而会产生磁通跳跃, 且环中磁通随外加激励电流变化的跃变周期呈分数倍的磁通量子. 由此, 两带超导环中可能产生的孤立子激发及分数磁通量子化现象可以通过测量单结超导环中的电流和磁通性质加以验证.

本文结构如下: 在第二部分, 我们介绍了两带单结超导环的基本结构, sine-Gordon 方程及其孤立子解在两带超导环中的应用; 第三部分, 从两带超导体微桥的基本性质出发, 得出两带单结超导环在电流激励情况下总磁通、环电流与外加激励电流之间的依赖关系; 第四部分是本文的结果和讨论.

2 电流激励下的两带单结超导环

两带单结超导环的电流激励方法如图 1 所示. 在弱连结(微桥)两端 C 点和 D 点直接加一个外部电流源, 这样输入的电流 I 被分成两路. 一路是 I_M 直接从微桥中流过, 从 C 点到达 D 点; 另一路 I_R 则是从 C 点出发, 绕经整个超导环, 再由 D 点流出. 此时, 电流之间满足

$$I = I_M + I_R \quad (1)$$

以及环内磁通有

$$\Phi = LI_R. \quad (2)$$

由电磁学中的毕奥-萨伐尔定律可知, 电流在环内任意一点产生的磁感应强度应与 I_R 成正比, 由此得环内总磁通 Φ 与电流 I_R 成正比, 比例常数即为自感系数 L , 它与环中电流无关, 仅取决于环的大小以及几何形状.

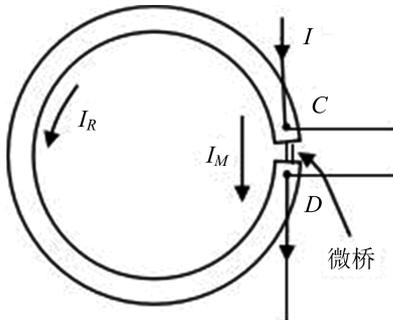


图 1 两带单结(微桥结构)超导环的电流激励示意图.

I 是外加电流, I_M 是流过桥的电流, I_R 是流过超导环的电流

在超导系统中大量的电子都凝聚在同一个量子态上, 从而超导态能够用一个统一的波函数即超导序参量来描述, 因此超导序参量是描述超导系统宏观整体状态的复参量. 在引入超导序参量的基础上建立的 Ginzburg-Landau(GL) 超导唯象理论能对超导体中大量的热力学和电磁学性质加以说明, 超导序参量的微观本质也在 BCS 理论提出后不久由 Gorkov 给出. 对于两带超导环, 我们可以基于两带 GL 理论对此加以研究. 在两带 GL 理论中, 超导环中的电子波函数通过引入两个超导序参量 $\psi_\mu = |\psi_\mu| e^{i\theta_\mu}$ ($\mu = 1, 2$) 来描述, 在此基础上建立了两带 GL 理论的自由能表达式^[19,20].

首先, 由两带 GL 自由能对序参量 ψ_1 和 ψ_2 变分为零, 可以得到相位差 $\varphi = \theta_2 - \theta_1$ 满足 sine-Gordon 方程^[21]

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{1}{\lambda^2} \sin\varphi = 0 \quad (3)$$

其中 $1/\lambda^2 = 2|\gamma|(m_1\sqrt{n_2/n_1} + m_2\sqrt{n_1/n_2})/\hbar^2$. 这里 γ 是两能带间的耦合常数, m_μ 是两个能带的有效质量以及 $n_\mu = |\psi_\mu|^2$, 并设准一维环沿 x 方向.

sine-Gordon 方程具有非平凡的孤立子解, 其相位可以从 $0 \rightarrow 2\pi$ 变换. 如果我们假设孤立子的线度远小于超导环的尺度, 则当超导环中存在若干个孤立子时, 超导环 C 端和 D 端的相位差应满足如下关系

$$\varphi_D = \varphi_C + 2\pi N,$$

即

$$\theta_{2D} - \theta_{1D} = (\theta_{2C} - \theta_{1C}) + 2\pi N. \quad (N \in Z) \quad (4)$$

其中 N 代表孤立子的数目.

其次, 由两带 GL 自由能对矢势 A 变分为零, 可得环中超导电流^[22]

$$j = - \sum_{\mu=1,2} \left[\frac{i\hbar e}{m_\mu} \left(\psi_\mu^* \frac{d\psi_\mu}{dx} - \psi_\mu \frac{d\psi_\mu^*}{dx} \right) + \frac{4e^2 n_\mu A}{m_\mu} \right] \quad (5)$$

将 $\psi_\mu = \sqrt{n_\mu} e^{i\theta_\mu}$ 代入电流方程可得

$$j = 2e\hbar \left(\frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2} \right) \left(\frac{n_1/m_1}{n_1/m_1 + n_2/m_2} \frac{d\theta_1}{dx} + \frac{n_2/m_2}{n_1/m_1 + n_2/m_2} \frac{d\theta_2}{dx} - \frac{2eA}{\hbar} \right). \quad (6)$$

对(6)式沿 C 点和 D 点之间的整个超导环作积分, 且积分路径远离表面, 由于超导电流一般都只存在于超导体表面, 故上式积分为零, 由此我们得到

$$(1 - \kappa)(\theta_{1D} - \theta_{1C}) + \kappa(\theta_{2D} - \theta_{2C}) - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_C^D A dx = 0 \quad (7)$$

其中 $\kappa = \frac{n_2/m_2}{n_1/m_1 + n_2/m_2}$. 由于微桥的长度与整个超导环相比很小, 所以对于矢势 A 在超导环中的积分可以近似为在整个闭合环路中的积分, 即总磁通 $\Phi \approx \int_C^D A dx$, 则(7)式可以化简为

$$(1 - \kappa)(\theta_{1D} - \theta_{1C}) + \kappa(\theta_{2D} - \theta_{2C}) = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (8)$$

上式即为两带超导环中微桥两端的相位差与环内磁通量之间的关系.

联立(4)和(8)式, 可得 C、D 端的相位差 $(\theta_{1D} - \theta_{1C})$ 与超导环内磁通 Φ 满足:

$$(\theta_{1D} - \theta_{1C}) + 2\pi\kappa N = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (9)$$

3 两带超导体微桥的电磁性质

下面我们将对两带超导体微桥展开研究. 因为微桥宽度远小于长度, 且微桥长度 l 远小于超导体的相干长度, 因此在微桥结构中我们可以省略除梯度以外的其他项, 此时结内一维的两带 GL 方程简化为^[18]

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2\psi_2}{dx^2} = 0. \quad (10)$$

同时, 有微桥两端(设为 0 和 l) 的边界条件

$$\psi_1(0) = |\psi_1| e^{i\theta_{1C}}, \quad \psi_1(l) = |\psi_1| e^{i\theta_{1D}}; \quad (11)$$

$$\psi_2(0) = |\psi_2| e^{i\theta_{2C}}, \quad \psi_2(l) = |\psi_2| e^{i\theta_{2D}}. \quad (12)$$

求解方程(10)-(12)式, 并结合超导电流表达式(5), 可得微桥中的超导电流^[18]

$$I_M = I_{M1} + I_{M2} \quad (13)$$

其中 I_{M1} 和 I_{M2} 分别表示两个能带产生的微桥电流

$$I_{M1} = \frac{2e\hbar\sigma}{m_1 l} |\psi_1|^2 \sin(\theta_{1D} - \theta_{1C}), \quad (14)$$

$$I_{M2} = \frac{2e\hbar\sigma}{m_2 l} |\psi_2|^2 \sin(\theta_{2D} - \theta_{2C}). \quad (15)$$

式中 σ 是微桥的横截面积.

代入超导环 C 端和 D 端的相位差满足的关系式(4), 由(13)式得到两带超导体微桥电流的 Josephson 公式

$$I_M = \left(\frac{2e\hbar\sigma}{m_1 l} |\psi_1|^2 + \frac{2e\hbar\sigma}{m_2 l} |\psi_2|^2 \right) \sin(\theta_{1D} - \theta_{1C}). \quad (16)$$

再由(9)式, 可得微桥电流 I_M 与环内磁通 Φ 满足

$$I_M = I_C \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - 2\pi\kappa N\right), \quad (17)$$

其中 $I_C = (2e\hbar\sigma/m_1 l) |\psi_1|^2 + (2e\hbar\sigma/m_2 l) |\psi_2|^2$, 是 Josephson 电流的最大值即微桥中超导电流的最大值. 并由此得外加激励电流 I 满足

$$I = I_M + I_R = I_C \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - 2\pi\kappa N\right) + \frac{\Phi}{L}. \quad (18)$$

通过无量纲变换, 我们可将(17)和(18)式改写成如下形式

$$\frac{I_M}{I_C} = \sin\left[\beta_e \left(\frac{I}{I_C} - \frac{I_M}{I_C}\right) - 2\pi\kappa N\right] \quad (19)$$

和

$$\frac{I}{I_C} = \frac{2\pi}{\beta_e} \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + \sin\left[2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - 2\pi\kappa N\right] \quad (20)$$

其中 $\beta_e = \frac{2\pi L I_C}{\Phi_0}$.

4 结果和讨论

对(19)和(20)式进行细致分析表明: 当 $\beta_e < 1$ 时, I_M-I 和 $\Phi-I$ 曲线连续可微, 均为总电流 I 的单值函数, 两带单节超导环工作在非回滞模式; 当 $\beta_e > 1$ 时, I_M-I 和 $\Phi-I$ 曲线是多值函数, 单节超导环工作在回滞模式.

下面我们以 $\kappa = 0.5$ 为例, 加以详细说明. 当 $\kappa = 0.5$ 时, (19)和(20)式可简化为

$$\frac{I_M}{I_C} = (-1)^N \sin\left[\beta_e \left(\frac{I}{I_C} - \frac{I_M}{I_C}\right)\right] \quad (21)$$

和

$$\frac{I}{I_C} = \frac{2\pi}{\beta_e} \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + (-1)^N \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (22)$$

因此在 $\kappa = 0.5$ 时, 我们只需考虑 $N = 0, 1$ 两支解.

当 $\beta_e = 0.5$ 时, 式(21)和(22)如图 2 所示. 曲线有双支解, 分别对应于 $N = 0$ 和 $N = 1$, 均为 I 的单值函数. 由式(21)可知, I_M/I_C 为周期函数, 其周期为 $2\pi/\beta_e = 4\pi$, 如图 2(a) 所示. 由式(22)和图 2(b)

可知,环内磁通 Φ 随外加电流增加而连续增加.在外加电流连续变化时,微桥两端的相位差及微桥电流

也应当连续变化,因而不会发生从一支到另一支的过渡.

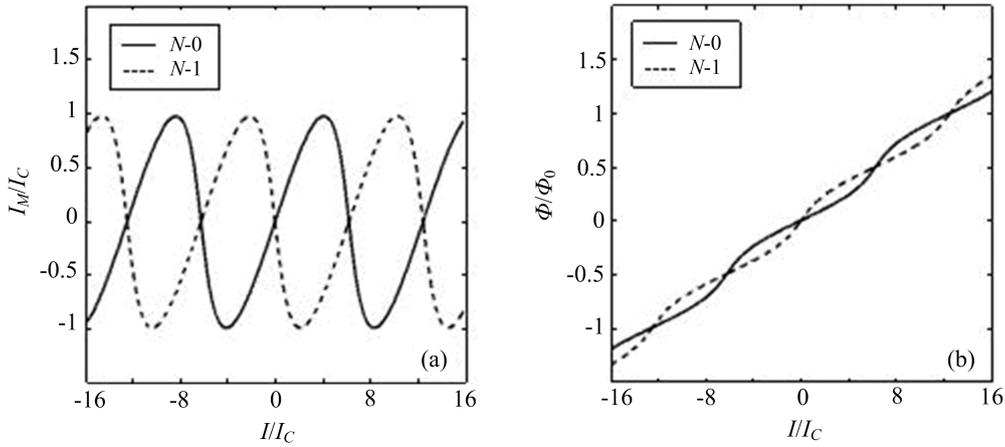


图 2 (a) $\kappa=0.5, \beta_K=0.5$ 时 I_M-I 曲线; (b) $\kappa=0.5, \beta_K=0.5$ 时 $\Phi-I$ 曲线

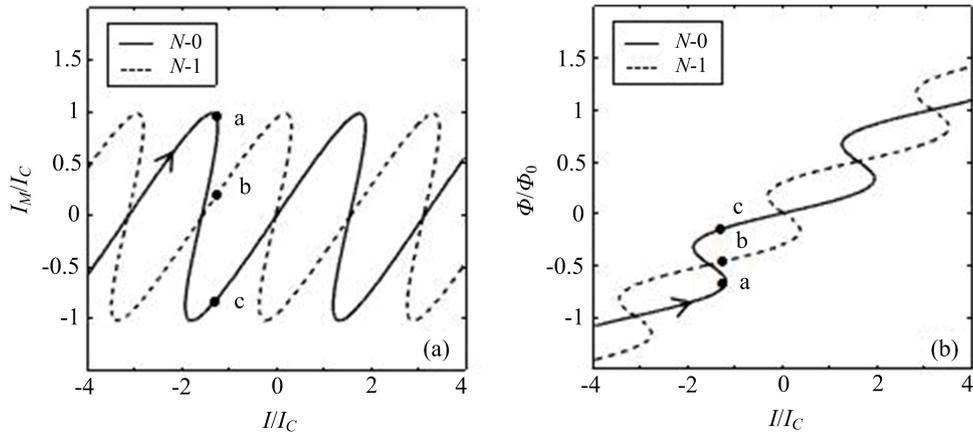


图 3 (a) $\kappa=0.5, \beta_K=2$ 时 I_M-I 曲线; (b) $\kappa=0.5, \beta_K=2$ 时 $\Phi-I$ 曲线

当 $\beta_e=2$ 时, I_M-I 和 $\Phi-I$ 曲线如图 3 所示.从图 3(a)可见, I_M 的周期仍为 $2\pi/\beta_e = \pi$.但微桥电流 I_M 和环内磁通 Φ 均出现了回滞现象,由此两带单节超导环将发生磁通跳跃.在磁通跳跃瞬间,微桥两端的相位差将发生跃变,此时超导环的状态很容易从一支解跳跃到另一支解.如图 3(b)所示,当外加电流增加到 a 点时会发生磁通跳跃,系统可能跳到 b 点 ($N=1$ 支解)或 c 点 ($N=0$ 支解),但从图 3(a)可知 b 点的微桥电流 I_M 以及微桥两端的量子相位差与 a 点的值更接近,因而跳跃的终态更可能是 b 点,而不是 c 点.由此得到的在外加电流逐渐增加时两带单节超导环中总磁通的变化曲线如图 4 所示.其中实线来源于 $N=0$ 支解,虚线来源于 $N=1$ 支解.由图 4 可见,由于发生两支解之间的跃变,磁通跳跃的周期应当是 $\Phi_0/2$,而不是 Φ_0 .

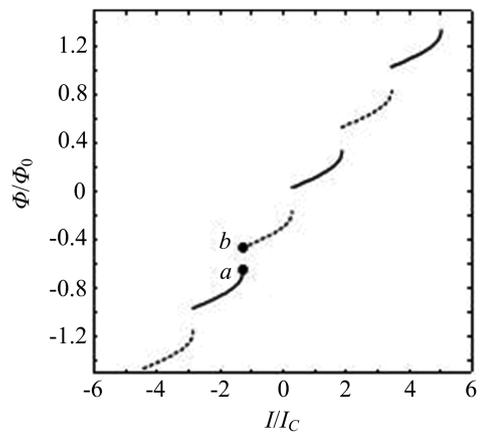


图 4 两带单节超导环中电磁通 Φ 随外加激励电流 I 逐渐增加时的变化曲线

由以上计算和分析表明:和单带单节超导环不同,由于两带单节超导环中存在孤立子激发态,在 $\beta_e > 1$ 时产生的磁通跳跃周期可呈分数倍的磁通量

子.因此,通过对两带单节超导环中总磁通随外加激励电流变化周期的测量,我们可以对两带超导环中

预言的孤立子解及分数磁通量子化现象加以验证.

参 考 文 献

- [1] A. H. Silver, J. E. Zimmerman, *Phys. Rev. Lett.*, **15** (1965), 888.
- [2] A. H. Silver, J. E. Zimmerman, *Phys. Rev.*, **157**(1967), 317.
- [3] J. E. Mercereau, *Rev. Phys. Appl.*(Paris), **5**(1970), 13.
- [4] B. D. Josephson, *Adv. Phys.*, **14**(1965), 419.
- [5] J. Nagamatsu, N. Nakagawa, T. Muranaka, Y. Zenitani, J. Akimitsu, *Nature*(London), **63**(2001), 410.
- [6] J. Korcus, I. I. Mazin, K. D. Belashchenko, V. P. Antropov, L. L. Boyer, *Phys. Rev. Lett.*, **86**(2001), 4656.
- [7] J. M. An, W. E. Pickett, *Phys. Rev. Lett.*, **86**(2001), 4366.
- [8] Y. Kong, O. V. Dolgov, O. Jepsen, O. K. Andersen, *Phys. Rev. B*, **64**(2001), 020501R.
- [9] K. P. Bohnen, R. Heid, B. Renker, *Phys. Rev. Lett.*, **86** (2001), 5771.
- [10] F. Giubileo, D. Roditchev, W. Sacks, R. Lamy, D. X. Thanh, J. Klein, S. Miraglia, D. Fruchart, J. Marcus, Ph. Monod, *Phys. Rev. Lett.*, **87**(2001), 177008.
- [11] P. Szabó, P. Samuely, J. Kačmarčík, T. Klein, J. Marcus, D. Fruchart, S. Miraglia, C. Marcenat, A. G. M. Jansen, *Phys. Rev. Lett.*, **87**(2001), 137005.
- [12] Y. Bugoslavsky, Y. Miyoshi, G. K. Perkins, A. V. Berenov, Z. Lockman, J. L. MacManus-Driscoll, L. F. Cohen, A. D. Caplin, H. Y. Zhai, M. P. Paranthaman, H. M. Christen, M. Blamire, *Supercond. Sci. Technol.*, **15**(2002), 526.
- [13] F. Bouquet, R. A. Fisher, N. E. Phillips, D. G. Hinks, J. D. Jorgensen, *Phys. Rev. Lett.*, **87**(2001), 047001.
- [14] H. Uchiyama, K. M. Shen, S. Lee, A. Damascelli, D. H. Lu, D. L. Feng, Z. X. Shen, S. Tajima, *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002), 157002.
- [15] I. I. Mazin, J. Kortus, *Phys. Rev. B*, **65**(2002), 180510.
- [16] K. K. Likharev, *Rev. Mod. Phys.*, **51**(1979), 101.
- [17] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (Benjamin, New York, 1966).
- [18] Y. S. Yerin, A. N. Omelyanchouk, *Low. Temp. Phys.*, **33** (2007), 401.
- [19] I. N. Askerzade, A. Gencer, N. Guclu, *Supercond. Sci. Technol.*, **15**(2002), L13.
- [20] I. N. Askerzade, *Mod. Phys. Lett. B*, **18**(2004), 1525.
- [21] Y. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002), 017002.
- [22] E. Babaev, *Phys. Rev. Lett.*, **89** (2002), 067001.

Electromagnetic Properties of Two-Band Single-Junction Superconducting Rings with External Current Source

HUANG Hai ZHANG Jiali[†] ZHANG Jianjiang

Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China

Received date: 2018-02-08; accepted date: 2018-02-28

【Abstract】 Based on two-band Ginzburg-Landau theory, we study the electromagnetic properties of two-band single-junction (microbridge structure) superconducting rings with directly connected current source. The phase difference of two superconducting order parameters in the ring satisfies sine-Gordon equation, and from its soliton solution we obtain the linear relation between this phase difference at both ends of the junction and the total magnetic flux in the ring. Then with the Josephson relation in the microbridge, we establish the dependence between the magnetic flux in the superconducting ring and the applied external current. Our analysis shows that the soliton solution and the fractional flux quantization in the two-band superconducting ring can be verified by measuring the electromagnetic properties of this single-junction structure.

Keywords: two-band single-junction superconducting ring, sine-Gordon equation, microbridge

PACS: 74.78.-w, 74.20.De

[†] Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11605055) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities.