

# 凝聚玻色子对粒子流密度的影响

李玉山

菏泽学院物理与电子工程学院, 菏泽 274015

收稿日期: 2021-08-19; 接收日期: 2021-11-01

**【摘要】** 基于解析和数值方法计算了两维简谐势阱中旋转玻色子的粒子流密度函数, 重点讨论了凝聚玻色子的影响. 结果表明: 凝聚在基态的玻色子在粒子流密度的空间分布中起着决定性作用.

**关键词:** 凝聚玻色子, 粒子流密度, 简谐势阱

**PACS:** 05.30.Jp; 74.25.Bt

**DOI:** 10.13380/j.ltpl.2021.03.005

## Influence of Condensed Bosons on the Particle Flow Distribution

LI Yushan

*School of Physics and Electronic Engineering, Heze University, Heze 274015, China*

Received date: 2021-08-19; accepted date: 2021-11-01

**【Abstract】** The particle flow distribution for rotating bosons confined in a two dimensional harmonic trap is derived by the analytical and numerical methods. The influence of condensed bosons is mainly discussed. It indicates that the bosons condensed in the ground state play an important role in the spatial distribution of the particle flow.

**Keywords:** Condensed bosons, particle flow, harmonic trap

**PACS:** 05.30.Jp; 74.25.Bt

**DOI:** 10.13380/j.ltpl.2021.03.005

**Reference method:** LI Yushan, Low. Temp. Phys. Lett. **43**, 0172 (2021)

---

\* 国家自然科学基金(11504095)资助的课题.

† lysh507@163.com

## 1 引言

超冷原子气体提供了一个研究量子多体物理的良好平台. 由于冷原子系统中实验参数的可操控性和物理量的易观测性, 人们可以借助旋转玻色子来研究带电粒子在磁场中的行为, 使得通过旋转玻色子来观测带电粒子的磁振荡、粒子流空间分布成为可能, 这不仅具有理论上的意义而且对实验也有一定的借鉴<sup>[1-5]</sup>. 同时, 研究旋转引起的量子振荡和粒子流的分布有助于人们正确理解超流、超导电性等新奇量子现象. 已有研究表明, 旋转玻色系统能够展现与超导体相等价的性质<sup>[6-8]</sup>. 人们期待着由旋转引起的各种量子多体效应都能够借助于旋转玻色和费米系统进行观测. 因此, 利用势阱中旋转玻色子研究磁场中粒子的量子振荡是十分有意义的课题.

维度的差别可能会导致奇特的物理现象出现, 二维系统最初只是被当作一种理想模型, 随着玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)实验技术的发展, 人们已经能够制备出二维的新材料和器件, 这对于人们进一步认识 BEC 特性具有重要的物理意义<sup>[9-12]</sup>. 本文将重新建立两维简谐势阱中的旋转理想玻色子模型, 对热力学量平均值和量子涨落的探索有助于人们更好地认识量子统计效应.

## 2 解析结果及讨论

两维各向同性简谐势阱  $\omega_0$  沿  $z$  轴以频率  $\Omega$  旋转, 质量为  $M$  的理想玻色子哈密顿具有以下形式<sup>[11]</sup>

$$\hat{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2) - \Omega\hat{L}_z = \frac{(P-A)^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_0^2 - \Omega^2)(x^2 + y^2), \quad (1)$$

式中,  $A = M(\Omega \times r)$ . 该方程和磁场中的带电粒子具有相类似的结构. 它等同于玻色子被放置于磁场  $B = 2M\Omega$  和两维各向同性势阱  $\sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}$  中.

为表述方便, 对能量本征值  $\epsilon_{km}$  做无量纲化处理, 并引入无量纲能谱  $\bar{\epsilon} = \epsilon_{km}/\hbar\omega_0$  和无量纲旋转频率  $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_0$ , 则能谱  $\bar{\epsilon}$  可以被写为

$$\bar{\epsilon} = 2k + |m| + 1 - m\bar{\Omega}, \quad (2)$$

单粒子基态能  $\bar{\epsilon}_0 = \bar{\epsilon}_{00} = 1$ .

本征波函数  $\psi(r)$  为

$$\psi_{km}(\rho, \varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} R_{km}(\rho), \quad (3)$$

式中径向波函数  $R_{km}(\rho)$  表达式为

$$R_{km}(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\xi} \left[ \frac{k!}{(k+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho}{\xi} \right)^{|m|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\xi^2}\right) L_k^{|m|} \left( \frac{\rho^2}{\xi^2} \right). \quad (4)$$

$L_k^{|m|}$  是拉盖尔多项式,  $L_k^{|m|}(z) = \frac{1}{m!} z^{-|m|} e^z \frac{d^k}{dz^k} (z^{k+|m|} e^{-z})$ . 系统特征长度定义为  $\xi =$

$$\sqrt{\hbar/M\omega_0}, \text{ 基态波函数 } \psi_{00} = \frac{1}{\xi\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\xi^2}\right).$$

粒子流  $J(r)$  由下式定义<sup>[10]</sup>,

$$J(\rho, \varphi) = \text{Re} \langle \psi_{km}^\dagger \frac{1}{M} (P-A) \psi_{km} \rangle = -N_0 \frac{A}{M} |\psi_{00}|^2 + \text{Re} \sum_{km} \left[ \psi_{km}^* \frac{1}{M} (P-A) \psi_{km} \right] f(\bar{\epsilon}) = J_\varphi(\rho) e_\varphi. \quad (5)$$

式中,  $\text{Re}$  代表取实部的运算,  $\langle \dots \rangle$  代表求热力学平均值,  $e_\varphi = e_z \times e_\rho$  代表极角方向的单位矢量.  $N_0$  是占据基态的玻色子数目.  $J(r)$  只在方位角方向有分量, 这就意味着相应的粒子沿  $z$  轴方向顺着简谐势阱的等势线做圆周运动.  $f(\bar{\epsilon}) = \{\exp[(\bar{\epsilon} - \bar{\mu})/T] - 1\}^{-1}$  是玻色-爱因斯坦分布函数,  $T = k_B T / (\hbar\omega_0)$  和  $\bar{\mu} = \mu / (\hbar\omega_0)$  分别代表无量纲温度和化学势. 需要特别指出的是, 式中的第一项来源于占据基态的玻色子的贡献, 因此第二项中的求和量子数将不再包含基态.

利用方程(3)中的本征态做基矢, 则归一化粒子流  $\bar{J}$  可以写为

$$\bar{J} = -2N_0 \xi^2 \frac{\Omega}{\omega_0} \left( \frac{\rho}{\xi} \right) R_{00}^2(\rho) + \sum_{km} 2\xi^2 \left[ m \left( \frac{\xi}{\rho} \right) - \frac{\Omega}{\omega_0} \left( \frac{\rho}{\xi} \right) \right] R_{km}^2(\rho) f(\bar{\epsilon}). \quad (6)$$

归一化参数  $J_0 = \omega_0 / (4\pi\xi)$ .

相应地, 粒子数密度  $n(r)$  表述为

$$n(r) = N_0 |\psi_{00}|^2 + \sum_{km} |\psi_{km}|^2 f(\bar{\epsilon}) = N_0 \frac{1}{2\pi} R_{00}^2(\rho) + \sum_{km} \frac{1}{2\pi} R_{km}^2(\rho) f(\bar{\epsilon}). \quad (7)$$

### 3 数值结果及讨论

数值计算中,玻色子数目设定为 1000. 通过粒子数方程  $N = N_0 + \sum_{km} f(\bar{\epsilon})$  计算化学势  $\bar{\mu}$  和 BEC 相变温度  $\bar{T}_C$ . 通过方程(6)和(7)分别计算归一化粒子流密度  $\bar{J}$  和粒子数密度  $n(r)$ . 对于 1000 个玻色子组成的系统,需要分别计算低于和高于  $\bar{T}_C$  的情况,  $\bar{\Omega}=0.1$  时的 BEC 相变温度为  $\bar{T}_C=23.556$ .

图 1 给出了不同旋转频率对粒子流  $\bar{J}$  空间分布的影响. 可以看出,不论是  $\bar{T}_C$  以下,还是  $\bar{T}_C$  以上,  $\bar{J}$  均只出现了一个尖锐的振荡峰.  $\bar{T}_C$  以下,该振荡峰振幅很大,且迅速消失.  $\bar{T}_C$  之上,振荡峰振幅很小,但分布范围较广. 这说明,温度较低时,该振荡峰被局限在简谐势阱中心附近. 随着温度的升高,振荡峰的位置向外界移动且振幅逐步变小.  $\bar{J}$  只出现了一个振荡峰,这是因为玻色系统对旋转只有抗磁性响应. 这明显不同于旋转费米子出现的德哈斯—范阿尔芬型振荡,顺磁—抗磁振荡及德哈斯—范阿尔芬型振荡的出现被认为是受约束费米系统的典型特征<sup>[8]</sup>. 对于旋转玻色子而言,振荡行为受基态附近的能级强烈影响,振荡主要起源于较低能级的贡献,尤其是凝聚在基态的玻色子的贡献将起到主导性的作用. 尽管旋转频率逐步增大,但凝聚的玻色子被牢牢“冻结”在基态,并未离开势阱中心. 处于激发态的玻色子由于自身能量较高,随着旋转频率增大,它所受到的约束逐渐变弱,能够迅速向外界移动.

为进一步说明占据基态的粒子的贡献,我们在粒子流密度方程(6)中忽略第一项的贡献,只计算了表征激发态贡献的第二项,所得结果见图 2. 由图 2 (a)可以看出,不论是  $\bar{T}_C$  以下,还是  $\bar{T}_C$  以上(插图),  $\bar{J}$  都能够出现两个尖锐的振荡峰. 但和图 1 相比较的话,激发态贡献的数值所占的比例很小,这说明占据基态的粒子能级起的是主导性作用.  $\bar{T}_C$  以下,同样的温度下,旋转频率越高,粒子流距离势阱

中心越密集. 这似乎与人们所熟悉的“旋转频率越高,粒子流越远离势阱中心”相悖,其原因在于,旋转频率越高,则 BEC 相变温度越低,因此同样的温度下,高旋转频率对应更多的凝聚粒子. 虽然旋转频率增大增加了离心力,但凝聚粒子更容易集结在势阱中心,所以即使旋转频率增大后仍然有很多的粒子聚集在势阱中心. 从理论上分析,  $\bar{T}_C$  之上,所有的粒子都处于激发态,因此图 1(b)和图 2(c)的曲线应该大致相同. 但由于图 2(c)的计算中并没有包含量子数为(0,0,0)的态,因此二者的曲线还是存在较大差别,这恰恰再次说明基态在粒子流分布中起着决定性作用. 为进一步阐明这种差别,图 3 给出了同等条件下粒子数密度的空间分布. 由图 3 可以看出,随着旋转频率的增大,离心力将会抵消一部分势阱的约束力,因此系统整体对粒子的约束能力下降,一部分粒子将会脱离势阱束缚,分散到离势阱中心更远的区域,处于激发态的玻色子分布范围将变得更加广阔. 如果我们考虑局域流速的影响,图 2(c)的粒子流空间分布和粒子数密度分布是相吻合的.

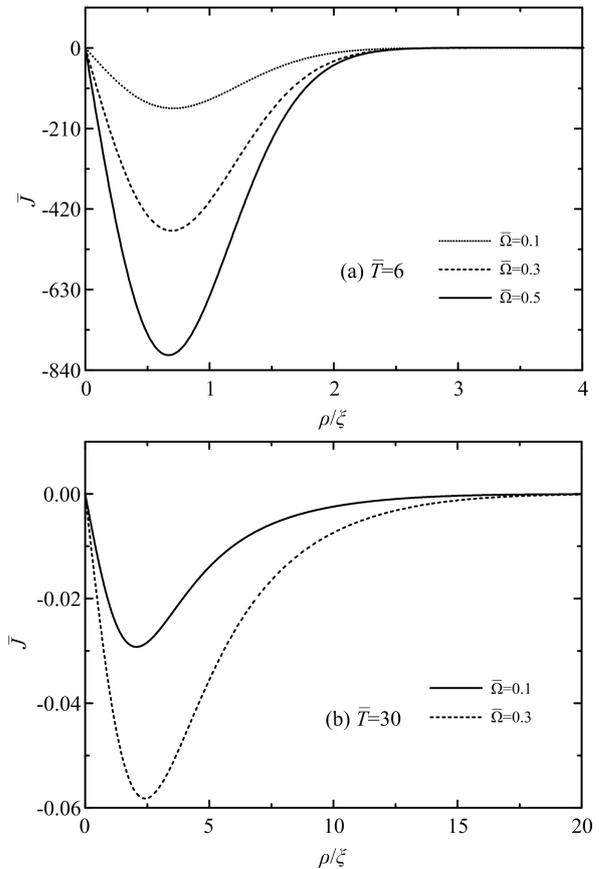


图 1 不同旋转频率下,  $\bar{J}$  在  $\bar{T}_C$  以下(a)和  $\bar{T}_C$  以上(b)的分布.

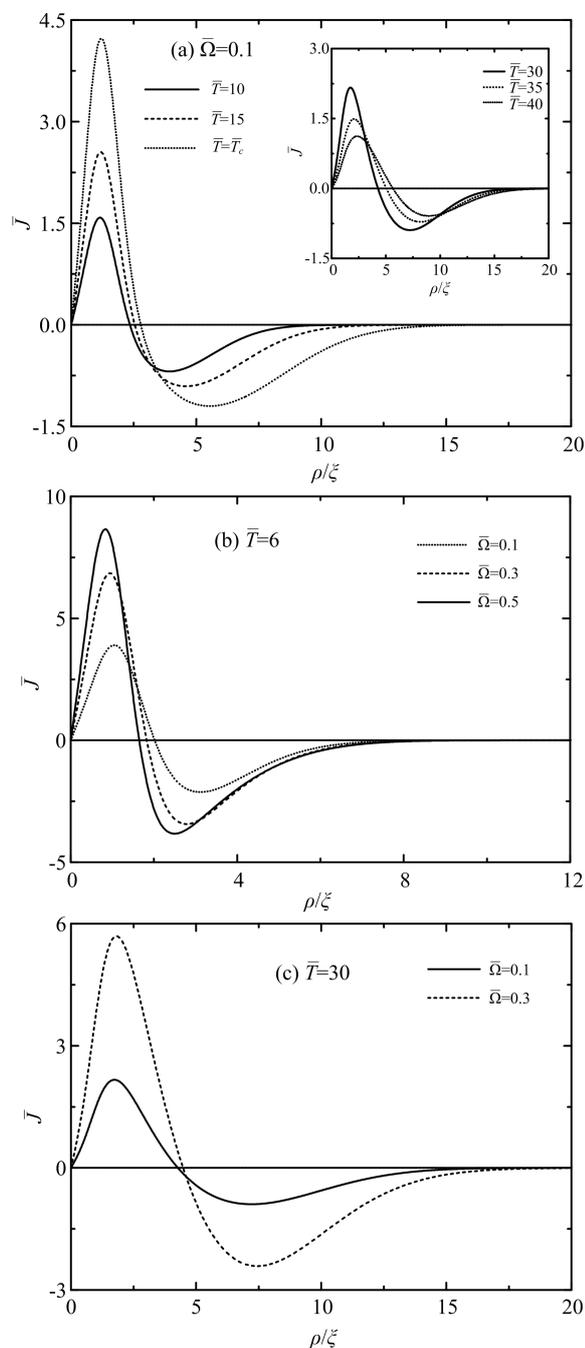


图2 激发态粒子对归一化粒子流  $\bar{J}$  的贡献。(a) 特定旋转频率下,  $\bar{J}$  在  $\bar{T}_C$  以下和  $\bar{T}_C$  以上(插图)的分布。(b)和(c)分别代表不同旋转频率下,  $\bar{J}$  在  $\bar{T}_C$  以下和  $\bar{T}_C$  以上的分布。

#### 4 结 论

本文对有限温度下两维简谐势阱中的旋转玻色子的粒子流振荡进行了研究. 研究发现, 磁化强度随温度的依赖特征也反映在粒子流分布中. 旋转玻色子的粒子流分布中仅出现一个振荡峰, 这是系统对

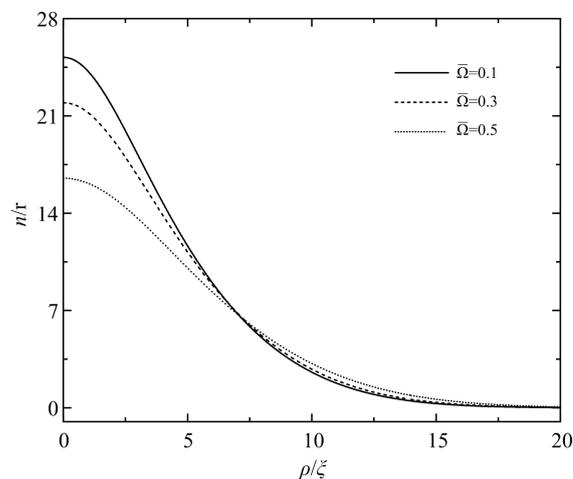


图3 玻色子粒子数密度  $n(r)$  随极坐标  $\rho$  的分布。

旋转引起的抗磁性所做出的响应. 将包含凝聚玻色子的结果和仅计算激发态玻色子的结果进行对比后发现, 虽然二者具有相类似的行为, 但凝聚在基态的玻色子在粒子流密度的空间分布中起着决定性作用。

#### 参 考 文 献

[1] W. C. Tan, J. C. Inkson, *Phys. Rev. B*, **60** (1999), 5626  
 [2] K. Richter, D. Ullmo, R. A. Jalabert, *Phys. Rep.*, **276** (1996), 1  
 [3] F. Chevy, K. W. Madison, J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000), 2223  
 [4] C. Grenier, C. Kollath, A. Georges, *Phys. Rev. A*, **87** (2013), 033603  
 [5] M. Ligare, *Am. J. Phys.*, **66** (1998), 185  
 [6] S. Kling, A. Pelster, *Phys. Rev. A*, **76** (2007), 023609  
 [7] Y. Li, Q. Gu, *Phys. Lett. A*, **378** (2014), 1233  
 [8] Y. Li, *Physica B*, **481** (2016), 38  
 [9] D. Yoshioka, H. Fukuyama, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **61** (1992), 2368  
 [10] Y. Ishikawa, H. Fukuyama, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **68** (1999), 2405  
 [11] Y. Li, Q. Gu, *Phys. Lett. A*, **380** (2016), 353  
 [12] A. M. Mohammedin, A. A. Ghoneim, R. S. Altawash, *Physica B*, **615** (2021), 413081