Vol. 37 (2017)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类二阶抛物型方程初边值问题解的存在定理

冯艳青, 王忠英, 姚 俊, 文传军
(常州工学院数理与化工学院, 江苏 常州 213000)

摘 要: 本文研究了一类二阶非线性抛物型方程解的存在唯一性问题. 利用非线性分析中的吸引盆理论和同胚理论, 获得了相应的二阶非线性抛物型方程初边值问题解的大范围存在唯一性定理.

关 键 词: 二阶抛物型方程; 初边值问题; 吸引盆; 全局同胚
MR(2010) **主题分类号**: 35K05; 35K20 **中 图 分 类 号**: O175
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2017)05-1075-06

1 引言

二阶抛物型方程

$$\Delta u - u_t = h(x,t,u) \tag{1.1}$$

也被称为热传导方程, 其中 Δ 表示 n 维拉普拉斯算子. 由于在物理、几何中的广泛应用, 许多数学工作者都研究过方程 (1) 解的存在性问题, 也得到很多结果 (见文献 [1–5]).

在抛物型偏微分方程解的存在性问题的研究中, 一般是先建立一个可能的解的先验估计, 然后利用一些非线性分析的方法证明解的存在性. 如 Elcart 和 Sigillito 在文 [1] 中先推导出了抛物算子 $L_a u$

$$L_a u = a_{ij} u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i} - au - cu_t \tag{1.2}$$

的一个先验估计 $\|u\|_{2,1} \le C\|Lu\|_0$, 进而得到了解存在唯一性定理.

受到上述思想的启发, 我们将对二阶抛物型算子

$$L_0 u = \Delta u - au - u_t \tag{1.3}$$

建立一个优先估计

$$\|u\|_{2,1} \le C(\|u\|_0 + \|Lu\|_0), \tag{1.4}$$

然后利用非线性分析的方法讨论方程 (1.1) 解的存在性问题, 并推导出一类二阶抛物型方程初边值问题解的存在唯一性的一个充分条件. 我们的证明不同于 Elcart 和 sigillito 给出的证明. 一个有趣的工具, 吸引盆, 在我们的主要定理 2.1 的证明中起着重要的作用, 下面先给出有关吸引盆理论的相关知识.

引理 1.1 [6] 设 E, F 为 Banach 空间, H 为 E 中连通开集. $f: H \subset E \to F$ 在 H 上是局部同胚的 C^1 映射. 设 $x_0 \in H$, 对于任何 $x \in H$, 路径提升问题

$$\begin{cases} f(\gamma_x(t)) = f(x_0) + e^{-t}(f(x) - f(x_0)), \ \ t \in R, \\ \gamma_x(0) = x, \ \ \gamma_x(t) \in H \end{cases} \tag{1.5}$$

*收稿日期: 2016-12-01 接收日期: 2017-03-08
作者简介: 冯艳青 (1969–), 女, 浙江义乌, 教授, 主要研究方向: 微分方程及数值解.

有唯一一个定义在最大开区间 $I_x=(t_x^-,t_x^+),-\infty\le t_x^-,t_x^+\le+\infty$ 上的连续解 $t\to\gamma_x(t)$, 并且集合 $\{(x,t)\in H\times R: t\in I_x\}$ 是 $H\times R$ 上的开集, 映射 $(x,t)\to\gamma_x(t)$ 是连续的.

定义 1.1 [6] 在引理 1.1 的假设条件下, x_0 的吸引盆是指集合 $B=\{x\in H: t_x^+=+\infty\}$.

定理 1.1 [8] 设连续映射 $f: H\subset E\to F$ 是局部同胚的, 则 f 是全局同胚的充要条件是对所有的 $x\in B$, $\gamma_x(t)$ 都定义在实数 R 上, 即 $\gamma_x(t)$ 可以向 $-\infty$ 延伸.

2 一些不等式

在这一部分, 将推导一些重要的不等式, 它们在主要定理的证明中起着重要作用.

考虑二阶抛物算子

$$L_0u=\Delta u-au-u_t, \tag{2.1}$$

其中 $a(x)$ 是 $t,x_1,\cdots,x_n$ 的有界函数. 设 $W_0(D)$ 是以

$$(\|u\|_{2,1})^2=\int(u^2+|\nabla u|^2+\left|D^2u\right|^2+{u_t}^2)dxdt \tag{2.2}$$

为范数的 Hilbert 空间, 其中梯度是相对于空间变量, 并且 $u\in W_0(D)$ 意味着 u 是定义在 $D=\Omega\times[0,T]$ 中的; Ω 是紧的有界集, 其边界分段光滑且处处有非负平均曲率; $|D^2u|^2$ 表示关于空间变量的所有二阶导数的平方和.

记

$$Lu=\Delta u-u_t, \tag{2.3}$$

(2.1) 式可以写为

$$L_0u=Lu-au. \tag{2.4}$$

根据上述假设可得 L_0 是一个由 $W_0(D)$ 映入 $L_2(D)$ 的线性算子.

定义 $m=\inf\limits_D a$, $M=\sup\limits_D a$.

定理 2.1 假设 $m=\inf\limits_D a>-\lambda$, 则对于 $u\in W_0(D)$, 不等式

$$\int_D(\nabla u)^2dxdt\le\frac{1}{\lambda}\int_D(Lu)^2dxdt+(\frac{1+3\lambda}{2}+\frac{M}{\lambda})\int_D u^2dxdt+\frac{1}{2}\int_D{u_t}^2dxdt \tag{2.5}$$

成立, 其中 λ 是 $L_2(D)$ 上满足齐次边界条件的拉普拉斯算子 $-\Delta$ 的最小特征值.

证 由式 (2.3)–(2.5), 对于 $\varepsilon_1>0$ 和 $\varepsilon_2>0$, 使用算术几何平均不等式两次, 得到

$$\begin{aligned}&\int_D(\nabla u)^2dxdt+\int_D au^2dxdt=-\int_D uL_0udxdt+\int_D uu_tdxdt\\ \le&\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_D(L_0u)^2dxdt+\frac{\varepsilon_1}{2}\int_D u^2dxdt+\frac{1}{2\varepsilon_2}\int_D u_t^2dxdt+\frac{\varepsilon_2}{2}\int_D u^2dxdt,\\ &\int_D(\nabla u)^2dxdt\le\frac{1}{\varepsilon_1}\int_D(Lu)^2dxdt+(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{M}{\varepsilon_1}-m)\int_D u^2dxdt+\frac{1}{2\varepsilon_2}\int_D{u_t}^2dxdt.\end{aligned}$$

(1) $m=0<\lambda$ 并设 $\varepsilon_1=\lambda,1=\varepsilon_2$, 得

$$\int_D(\nabla u)^2dxdt\le\frac{1}{\lambda}\int_D(Lu)^2dxdt+(\frac{1+\lambda}{2}+\frac{M}{\lambda})\int_D u^2dxdt+\frac{1}{2}\int_D{u_t}^2dxdt.$$

(2) $m>0$, 则有 $m=\inf\limits_{D} a>-\lambda$, 设 $\varepsilon_1=\lambda, 1=\varepsilon_2$, 有

$$\int_D (\nabla u)^2 dxdt \le \frac{1}{\lambda}\int_D (Lu)^2 dxdt + (\frac{1+3\lambda}{2}+\frac{M}{\lambda})\int_D u^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_D {u_t}^2 dxdt,$$

所以

$$\int_D (\nabla u)^2 dxdt \le \frac{1}{\lambda}\int_D (Lu)^2 dxdt + (\frac{1+3\lambda}{2}+\frac{M}{\lambda})\int_D u^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_D {u_t}^2 dxdt.$$

下面两个定理的证明类似于文献 [9] (Chap.2, § 8) 和文献 [10] 中的相关证明.

定理 2.2 $\int_D (u_t)^2 dxdt \le 2\int_D (Lu)^2 dxdt + 2(1+M)\int_D u^2 dxdt.$

定理 2.3 $\int_D \left|D^2 u\right|^2 dxdt \le \int_D (\Delta u)^2 dxdt.$

定理 2.4 $\int_D (\Delta u)^2 dxdt \le 4\int_D (Lu)^2 dxdt + (7+M^2)\int_D u^2 dxdt.$

证

$$\int_D au\Delta u dxdt \le \frac{1}{2}\int_D (au)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_D (\Delta u)^2 dxdt,$$
$$\int_D [(\Delta u)^2 - u_t\Delta u - Lu\Delta u] dxdt \le \frac{1}{2}\int_D (au)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_D (\Delta u)^2 dxdt.$$

通过选择适当 ε, 利用算术几何平均值不等式, 得到不等式

$$\int_D (\Delta u)^2 dxdt \le 4\int_D (Lu)^2 dxdt + (7+M^2)\int_D u^2 dxdt.$$

定理 2.5 假设 $m=\inf\limits_{D} a>-\lambda$, 不等式 $\|u\|_{2,1} \le C(\|u\|_0 + \|Lu\|_0)$ 成立, 并且

$$\mathrm{C}=\max\{7+\frac{1}{\lambda}, M^2+3M+12+\frac{3\lambda}{2}+\frac{M}{\lambda}\}. \tag{2.6}$$

证 我们能够得到

$$(\|u\|_{2,1})^2 = \int (u^2 + |\nabla u|^2 + \left|D^2 u\right|^2 + {u_t}^2) dxdt$$
$$= \int u^2 dxdt + \int (|\nabla u|^2 + \left|D^2 u\right|^2 + {u_t}^2) dxdt.$$

根据定理 2.1–2.4, 有

$$\int (|\nabla u|^2 + \left|D^2 u\right|^2 + {u_t}^2) dxdt$$
$$\le (7+\frac{1}{\lambda})\int_D (Lu)^2 dxdt + (M^2+3M+11+\frac{3\lambda}{2}+\frac{M}{\lambda})\int_D u^2 dxdt,$$

所以

$$(\|u\|_{2,1})^2 \le (7+\frac{1}{\lambda})\int_D (Lu)^2 dxdt + (M^2+3M+12+\frac{3\lambda}{2}+\frac{M}{\lambda})\int_D u^2 dxdt.$$

设 C $= \max\{7+\frac{1}{\lambda}, M^2+3M+12+\frac{3\lambda}{2}+\frac{M}{\lambda}\}$, 则 $\|u\|_{2,1} \le C(\|u\|_0 + \|Lu\|_0)$.

3 主要定理

下面给出方程

$$Lu = \Delta u - u_t = h(x,t,u), \tag{3.1}$$

满足初始条件 $u(x,0)=0$,$(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$ 的解的存在性和唯一性的充分条件.

设 $\partial\Omega \in C^2$, 对于所有的 (x,t), h 关于 u 连续, 且对于所有的 u, h 关于 (x,t) 可测, 且有直到三阶连续偏导数.

将式 (3.1) 改写为算子形式

$$F(u) = Lu - h(x,t,u), \tag{3.2}$$

于是式 (3.1) 等价于

$$F(u) = 0, u \in W_0 \tag{3.3}$$

求 Frechet 导数, 于是对一切 $u, \phi \in W_0(D)$, 有

$$F'(u)(\phi) = L\phi - h'_u(x,u)\phi, u, \phi \in W_0. \tag{3.4}$$

定理 3.1 假设

(i) $\inf\limits_D h'_u > -\lambda$;

(ii) 对任意 $u \in W_0, \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{ds}{1+R(s)+T(s)R(s)} = \infty$,

这里 $T(s) = \sup\limits_D h'_u(x,u)$, $R(s) = \sup \left\| [L - h'_u(x,u)]^{-1} \right\|$, 则方程 F(u)=0 在 W_0 中有唯一的解.

证 条件 $\inf\limits_D h'_u > -\lambda$ 表明, 零不是 $L\phi - \dot{h}'_u(x,u)\phi = 0$ 的特征值, 所以对所有 $u \in W_0(D)$, 算子 $F'(u) = L - h'_u(x,u)I$ 是可逆的, 其中 I 是 $W_0(D)$ 上的恒同算子, 于是 F 是一个从 $W_0(D)$ 到 $L_2(D)$ 局部同胚.

任取 $u \in W_0(D)$, 记 $[L + h'_u(x,u)I]^{-1}\phi = \xi$. 由定理 2.5, 有

$$\begin{aligned}\|\xi\| &\le C(\|\xi\|_0 + \|L\xi\|_0) = C(\left\| [L - h'_u(x,u)I]^{-1}\phi \right\| + \left\| L[L - h'_u(x,u)I]^{-1}\phi \right\| \\ &\le C(R(\|u\|)\|\phi\| + \|\phi\| + \|h'_u(x,u)\| \left\| [L - h_u{}'(x,u)I]^{-1}\phi \right\|) \\ &\le C(R(\|u\|)\|\phi\| + \|\phi\| + \sup_{\Omega\times R}\|h'_u(x,u)\| R(\|u\|)\|\phi\|) \\ &\le C(R(\|u\|)\|\phi\| + \|\phi\| + T(\|u\|)R(\|u\|)\|\phi\|),\end{aligned}$$

所以得到

$$\left\| F'(u)^{-1} \right\| = \left\| [L - h'_u(x,u)I]^{-1} \right\| \le C(1 + R(\|u\|) + T(\|u\|)R(\|u\|)).$$

考虑映射 F 的路径提升问题

$$\begin{cases} F(p_u(t)) - F(p_u(0)) = e^{-t}(F(u) - F(u_0)), \\ p_u(0) = u_0, \end{cases}$$

则

$$p_u'(t) = -[F'(p_u(t))]^{-1}e^{-t}(F(u) - F(u_0)),$$

于是

$$\begin{aligned}
\|p_u(t) - p_u(0)\| &= \left\|\int_0^t p'_u(t)dt\right\| \le \int_0^t \|p'_u(t)\|dt \\
&= \int_0^t \left\|[F'(p_u(t))]^{-1}e^{-t}(F(u) - F(u_0))\right\|dt \\
&\le C\int_0^t |1 + R(p_u(t)) + T(p_u(t))R(p_u(t))|e^{-t}\,\|F(u) - F(u_0)\|\,dt,
\end{aligned}$$

$$\|p_u(t)\| \le \|p_u(0)\| + C\int_0^t |1 + R(p_u(t)) + T(p_u(t))R(p_u(t))|e^{-t}\,\|F(u) - F(u_0)\|\,dt.$$

利用 Gronwall 不等式, 有

$$\int_{\|p_u(0)\|}^{\|p_u(t)\|} \frac{ds}{1 + R(s) + T(s)R(s)} \le C\int_0^t e^{-t}\,\|F(u) - F(u_0)\|dt \le C\,\|F(u) - F(u_0)\|.$$

结合式条件 (ii), 得 $\exists M > 0$, $\|p_u(t)\| \le M, t > 0$. 由定理 1.1, 现在只需要证明 $p_u(t)$ 可以向 $-\infty$ 延伸即可.

令 $g(-t) = p_u(t), t \in (b, 0], b < 0$. 那么对于 $t_1, t_2 \in (b, 0]$,

$$\begin{aligned}
\|p_u(t_1) - p_u(t_2)\| = \|g(-t_1) - g(-t_2)\| &= \int_{-t_2}^{-t_1} \|g'(s)\|ds \\
&= \int_{-t_2}^{-t_1} \left\|F'(p_u(t)^{-1}\right\|e^s\,\|F(u) - F(u_0)\|\,ds \\
&\le C\int_{-t_2}^{-t_1} |1 + R(M) + T(M)R(M)|e^s\,\|F(u) - F(u_0)\|\,ds \\
&\le C(1 + R(M) + T(M)R(M))e^b\,\|F(u) - F(u_0)\|\,|t_1 - t_2|,
\end{aligned}$$

所以 $p_u(t)$ 在 $(-b, 0]$ 上 Lipschitz 连续, $p_u(t)$ 可以向 $-\infty$ 延伸, 也就是说, F 是 $W_0(D)$ 到 $L_2(D)$ 上的全局同胚, 并且在 W_0 中方程 $F(u) = 0$ 有唯一的解, 命题得证.

备注 在定理 3.1 中的条件 (ii) 可以替换为 $\|h'_u\| \le \omega(\|u\|)$, 其中 ω 连续的满足 $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dt}{\omega(t)} = \infty$. 证明与定理 3.1 相类似.

参 考 文 献

[1] Elcrat A R, Sigillito V G. An explicit a priori estimate for parabolic equations with applications to semilinear equations[J]. J. Math. Anal., 1976, 7(3): 746–753.

[2] Chen P J, Gurtin M E. On a theory of heat conduction involving two temperatures[J]. Z. Angew. Math. Phys., 1968, 19(4): 614–627.

[3] Sigillito V G. Pointwise bounds for solutions of semilinear parabolic equations[J]. SIAM J. Appl. Math., 1967, 9(3): 581–585.

[4] Sigillito V G. On a continuous method of approximating solutions of the heat equation[J]. J. Assoc. Comp. Mach., 1967, 14(4):732–741.

[5] Feng Y Q, Wang Z Y. The application of the basin of attraction to the existence and uniqueness of solutions for the second order parabolic boundary value problem[J]. J. Math., 2016, 36(5): 949–954.

[6] Gorni G. Acriterion of invertibility in the large for local diffeomorphisms between Banach spaces[J]. Nonl. Anal., 1993, 21(1): 43–47.

[7] Plastock R. Homeomorphism between Banach space[J]. Trans. Am. Math. Soc., 1974,200:169–183.

[8] Wang W X, Shen Z H. The basin of attraction in Banach spaces and its applications[J]. Acta Math. Sinica Chin. Ser., 2006, 49(5): 1013–1020.

[9] Ladyzhenskaya O A, Uraltseva N N. Linear and quasiliear elliptic equation[M]. New York: Academic Press, 1968.

[10] Elcrat A R. Constructive existence for semilinear eliptic equations with discontinuous coefficients[J]. SIAM J. Math. Anal., 1974, 5(4): 663–672.

[11] Feng Y Q, Wang Z Y, Wen C J. Global homeomorphism and applications tothe existence and uniqueness of solutions ofsome differential equations[J]. Adv. Diff. Equ., 2014: 52, DOI: 10.1186/1687-1847-2014-52.

A EXISTENCE THEOREM FOR SOME SECOND ORDER PARABOLIC INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS

FENG Yan-qing, WANG Zong-ying, YAO Jun, WEN Chuan-jun

(*School of Mathematics and Chemical Engineering, Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213000, China*)

Abstract: In this paper, an a priori estimate for a second order linear parabolic operators is established. By using the basin of attraction and homeomorphism, a new sufficient condition of the existence and uniqueness of an initial boundary value problem for a second order parabolic equations is proved. This idea can be applied some semi-linear partial differential equations.

Keywords: second order parabolic equation; initial-boundary value problem; the basin of attraction; homeomorphism

2010 MR Subject Classification: 35K05; 35K20