Vol. 36 (2016)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

混合分数布朗运动环境下短期利率服从 vasicek 模型的欧式期权定价

李志广, 康淑瑰

(山西大同大学数学与计算机科学学院, 山西 大同 037009)

摘 要: 本文研究了混合分数布朗运动环境下欧式期权定价问题. 运用混合分数布朗运动的 Ito 公式, 得到了 Black-Scholes 偏微分方程. 同时, 通过求解 Black-Scholes 方程, 得到了欧式看涨、看跌期权的定价公式。推广了 Black-Scholes 模型有关欧式期权定价的结论.

关键词: 期权定价; vasicek 模型; Black-Scholes 模型; 混合分数布朗运动

MR(2010) **主题分类号**: 90A06; 60H10 **中图分类号**: O211.63

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)03-0641-08

1 引言

期权定价理论的重要进展开始于 Black 和 Scholes 的两篇文献, 在该文中 Black 和 Scholes 首次引入一种由几何布朗运动驱动的连续时间模型, 通过自融资策略和风险资产、无风险资产的复制方法, Black 和 Scholes 认为在无套利情形下期权的价格等于投资组合的价格.

近些年来, 用分数布朗运动代替标准布朗运动研究金融模型已经成为了一个重要的发展方向, 分数布朗运动的"尖峰厚尾"特性和长程记忆性此外它仍然是高斯分布能够更好的描述金融资产模型. 有关分数布朗运动的随机分析理论见文献 [2, 3]. 有关分数布朗运动在金融经济中应用的文献也已经出现, 具体可见文献 [4–6].

遗憾的是, 上述文献在研究期权定价理论都假设无风险资产的利率或者说短期利率在期权的整个存续期内都是常数, 这显然是不符合实际的, Kung 和 Lee 就在这方面做了改进, 他们假定短期利率服从 Merton 模型, 股票价格模型仍然是由标准的几何布朗运动驱动的模型, 在该模型下 Kung 和 Lee 研究了欧式期权, 具体见文献 [7] .

基于此, 本文也研究短期利率非常数情形下的期权定价理论, 相比文献 [7], 我们用更一般的 Vasicek 利率模型代替 Merton 模型, 除此之外我们还假定利率模型和股票价格模型均由更符合实际情况的混合分数布朗运动取代通常的白噪声.

本文的结构安排如下: 在第二节, 给出了所研究的模型; 第三节给出了短期利率为 vasicek 模型下零息票的价格公式; 第四节研究欧式看涨、看跌期权; 第五节为本文的结论.

2 金融市场模型

*收稿日期: 2013-03-11 接收日期: 2013-09-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11271235).

作者简介: 李志广 (1979–), 男, 河北阳原, 硕士, 讲师, 主要研究方向: 金融数学, 期权定价.

首先假设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为给定的完备概率空间, 设 $0<H<1$, 具有 Hurst 参数为 H 的分数布朗运动是一连续高斯过程 $\{W_H(t),\ t\geq 0\}$ 使得 $W_H(0)=0$, $E_\mu\left[W_H(t)\right]=0$, 并且

$$E_\mu\left[W_H(t)W_H(s)\right]=\frac{1}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}\right),s,t\in R_+,$$

当 $H=1/2$ 时, $W_H(t)$ 即为标准布朗运动.

笔者将考虑由混合分数布朗运动 (mixed fractional Brownian motion) 驱动的金融市场, 主要研究随机利率下欧式看涨期权定价问题, 所谓混合分数布朗运动就是两个独立分数布朗运动的线性组合.

$$X(t)=\sigma W_{H_1}(t)+\varepsilon W_{H_2}(t),t\geq 0,$$

$W_{H_1}(t)$, $W_{H_2}(t)$ 分别是参数为 H_1 和 H_2 的两个独立的分数布朗运动. 在叙述模型之前, 先说明用混合分数布朗运动取代分数布朗运动是有意义的: Bender 等人 [10] 已经证明随机源的个数不少于风险资产个数时, 自融资策略中是无套利的, 并说明欧式期权均存在这样一个自融资策略将其进行套期保值 [11,12]. 而接下来要给出的模型股票价格和零息票都是随机的, 因此如果市场模型仅仅由单个分数布朗运动驱动会有套利产生, 显然市场也就不再是完备的.

首先, 假定金融市场的短期利率服从如下的 Vasicek 模型

$$dr_t=\theta(\mu_r-r_t)\mathrm{d}t+\sigma_{r1}\Diamond dW_{H_1}(t)+\sigma_{r2}\Diamond dW_{H_2}(t), \tag{2.1}$$

其中最后的积分 $\int\cdot\Diamond \mathrm{d}W_{H_i}(t)$, $i=1,2$ 为分数 Wick-Ito 积分, 具体见文献 [4, 5, 6], r_t 为短期利率,θ 是均值恢复率, μ_r 为长期利率, σ_{r1} 和 σ_{r2} 决定了 Vasicek 利率的波动强度, $W_{H_1}(t)$ 和 $W_{H_2}(t)$ 为两个参数分别为 H_1 和 H_2 的分数布朗运动. 其次, 假定金融市场上只有一个股票和一个零息票. 令 $B(t,r_t)$ 表示零息票的价格, 并假定它满足如下的随机微分方程

$$\begin{aligned}&dB(t,r_t)=r_tB_tdt+\sigma_{b1}B(t,r_t)\Diamond dW_{H_1}+\sigma_{b2}B(t,r_t)\Diamond dW_{H_2},\\&B(T,r_T)=1,\quad t_0\leq t\leq T.\end{aligned} \tag{2.2}$$

再次, 股票价格模型满足如下混合分数布朗运动驱动的模型

$$dS_t=\mu S_tdt+\sigma_1S_t\Diamond dW_{H_1}(t)+\sigma_2S_t\Diamond dW_{H_2}(t),$$

其中 μ 为股票的期望收益率, 它是时间的函数, 常数 σ_1 和 σ_2 为股票价格的波动率. 最后给出混合分数布朗运动的 Ito 公式, 它在以后的推导中经常用到.

引理 2.1 [12] 假定 $X(t)=\sigma W_{H_1}(t)+\varepsilon W_{H_2}(t)$, $f(t,x)\in C^{1,2}(_+\times\to)$, 且满足

$$\int_0^t\frac{\partial f}{\partial s}(s,X(t))ds,\ \int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,x)ds,\ \int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,x)s^{2H_1-1}ds,\ \int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,x)s^{2H_2-1}ds$$

都属于 $L^2(P)$, 则

$$\begin{aligned}f(t,X(t))=&f(0,0)+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial s}(s,X(t))ds+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(s,X(t))dY_s\\&+H_1\sigma^2\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X(t))s^{2H_1-1}ds+H_2\varepsilon^2\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X(t))s^{2H_2-1}ds.\end{aligned}$$

3 Vasicek 模型下零息票的解析表达式

本节主要求解零息票 $B(t,r_t)$ 的价值, 由公式 (2.1) 和分数布朗运动的 Ito 公式 [3−5], 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}B(t,r_t)=&\frac{\partial B(t,r_t)}{\partial t}dt+\frac{\partial B(t,r_t)}{\partial r_t}dr_t+H_1\sigma_{r1}^2t^{2H_1-1}\frac{\partial^2 B(t,r_t)}{\partial {r_t}^2}dt+H_2\sigma_{r2}^2t^{2H_2-1}\frac{\partial^2 B(t,r_t)}{\partial {r_t}^2}dt\\=&\frac{\partial B(t,r_t)}{\partial t}dt+\theta(\mu_r-r_t)\frac{\partial B(t,r_t)}{\partial r_t}dt+\sigma_{r1}\frac{\partial B(t,r_t)}{\partial r_t}\diamondsuit dW_{H_1}(t)\\&+\sigma_{r2}\frac{\partial B(t,r_t)}{\partial r_t}\diamondsuit dW_{H_2}(t)+H_1\sigma_{r1}^2t^{2H_1-1}\frac{\partial^2 B(t,r_t)}{\partial {r_t}^2}dt+H_2\sigma_{r2}^2t^{2H_2-1}\frac{\partial^2 B(t,r_t)}{\partial {r_t}^2}dt,\end{aligned}$$

对比公式 (2.2), 可得

$$\frac{\partial B(t,r_t)}{\partial t}+\theta(\mu_r-r_t)\frac{\partial B(t,r_t)}{\partial r_t}+H_1\sigma_{r1}^2t^{2H_1-1}\frac{\partial^2 B(t,r_t)}{\partial {r_t}^2}+H_2\sigma_{r2}^2t^{2H_2-1}\frac{\partial^2 B(t,r_t)}{\partial {r_t}^2}=r_tB(t,r_t),$$

因此零息票在时刻的价格满足如下的抛物型方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial B(t,x)}{\partial t}+\theta(\mu_r-x)\dfrac{\partial B(t,x)}{\partial x}+H_1\sigma_{r1}^2t^{2H_1-1}\dfrac{\partial^2 B(t,x)}{\partial x^2}\\+H_2\sigma_{r2}^2t^{2H_2-1}\dfrac{\partial^2 B(t,x)}{\partial x^2}=xB(t,x),\\B(T,x)=1,\end{cases}\tag{3.1}$$

为了保证 $B(T,x)=1$, 假定上述方程满足如下形式的解

$$B(t,x)=\exp\{A_1(t)+xA_2(t)\},A_1(T)=0,A_2(T)=0,$$

将上式代入公式 (3.1), 有

$$\frac{\partial B(t,r_t)}{\partial t}=A_1'(t)B(t,x)+xA_2'(t)B(t,x),\frac{\partial B(t,x)}{\partial x}=A_2(t)B(t,x),\frac{\partial^2 B(t,x)}{\partial x^2}=A_2(t)^2B(t,x).\tag{3.2}$$

对比公式 (3.1) 和公式 (3.2), 可得

$$\begin{cases}\theta A_2(t)-A'_2(t)+1=0,\\A'_1(t)+\theta\mu_rA_2(t)+(H_1\sigma_{r1}^2t^{2H_1-1}+H_2\sigma_{r2}^2t^{2H_2-1})A_2(t)^2=0,\\A_1(T)=0,A_2(T)=0,\end{cases}$$

解上述方程, 有

$$A_1(t)=-\mu_r(T-t)-\mu_r(1-e^{\theta(T-t)})-\int_t^T(H_1\sigma_{r1}^2s^{2H_1-1}+H_2\sigma_{r2}^2s^{2H_2-1})A_2(s)^2ds,$$

$$A_2(t)=\frac{1-\theta\exp\{-\theta(T-t)\}}{\theta},$$

这样一来, 有如下的定理成立.

定理 3.1 零息票的在 t 时刻的价格为

$$B(t,r_t)=\exp\{A_1(t)+r_tA_2(t)\},B(T,r_T)=1. \tag{3.3}$$

当 $\theta=0,\sigma_{r1}=0,\sigma_{r2}=0$ 时, 可得 $dr_t=0$, 因此 $r_t=r$. 此时公式 (3.3) 简化为

$$B(t,r_t)=\exp\{r(T-t)\}.$$

4 欧式期权的解析表达式

为了方便描述, 定义如下的符号

$$\begin{aligned}&D_1(t)=H_1\sigma_{b1}^2B(t,r_t)^2+H_2\sigma_{b2}^2B(t,r_t)^2,D_2(t)=H_1\sigma_1^2t^{2H_1-1}+H_2\sigma_2^2t^{2H_2-1},\\&D_3(t)=H_1\sigma_{b1}\sigma_2t^{2H_1-1}+H_2\sigma_{b2}\sigma_2t^{2H_2-1},D(t)=D_1(t)+D_2(t)-2D_3(t).\end{aligned}$$

本文主要研究在除息日 T 损益为 $(S_T-B(T,r_T)K)^+$ 的欧式看涨期权和损益为 $(B(T,r_T)K$ $-S_T)^+$ 的欧式看跌期权, 考虑到 $B(T,r_T)=1$, 因此 $(S_T-B(T,r_T)K)^+$ 和 $(B(T,r_T)K-S_T)^+$ 也满足如下的等式

$$(S_T-B(T,r_T)K)^+=(S_T-K)^+,(B(T,r_T)K-S_T)^+=(K-S_T)^+, \tag{4.1}$$

其中 K 为交割价格.

令 $C=C(S_t,B(t,r_t),t,K)$ 和 $P=P(S_t,B(t,r_t),t,K)$ 分别表示看涨期权和看跌期权的价格, 显然他们都是股票价格 S_t、零息票价格 $B(t,r_t)$、以及时间 t 的函数. 由混合分数布朗运动的 Itǒ 公式, 可得

$$\begin{aligned}dC&=\frac{\partial C}{\partial t}dt+\frac{\partial C}{\partial B(t,r_t)}dB(t,r_t)+D_1(t)\frac{\partial^2C}{\partial B(t,r_t)^2}dt+\frac{\partial C}{\partial S_t}dS_t\\&\quad+D_2(t){S_t}^2\frac{\partial^2C}{\partial {S_t}^2}dt+2D_3(t)\frac{\partial^2C}{\partial S_t\partial B(t,r_t)}dt\\&=[\frac{\partial C}{\partial t}+D_1(t)\frac{\partial^2C}{\partial B(t,r_t)^2}+D_2(t){S_t}^2\frac{\partial^2C}{\partial {S_t}^2}+2D_3(t)\frac{\partial^2C}{\partial S_t\partial B(t,r_t)}]dt\\&\quad+\frac{\partial C}{\partial B(t,r_t)}dB(t,r_t)+\frac{\partial C}{\partial S_t}dS_t.\end{aligned} \tag{4.2}$$

接下来构造一个包含股票价格、零息票以及看涨期权的投资组合, 令 θ_t^0 表示零息票的份数, θ_t^1 表示股票价格的份数, 同样 θ_t^3 表示看涨期权的份数, 因为没有套利发生, 如果用 H 表示该投资组合的价值, 则应当满足 $H=\theta_t^0B(t,r_t)+\theta_t^1S_t+\theta_t^2C=0$, 因此有

$$dH=\theta_t^0dB(t,r_t)+\theta_t^1dS_t+\theta_t^2dC=0, \tag{4.3}$$

将公式 (4.2) 代入公式 (4.3) 可得

$$\begin{aligned}dH&=\theta_t^2[\frac{\partial C}{\partial t}+D_1(t)\frac{\partial^2C}{\partial B(t,r_t)^2}+D_2(t){S_t}^2\frac{\partial^2C}{\partial {S_t}^2}+2D_3(t)\frac{\partial^2C}{\partial S_t\partial B(t,r_t)}]dt\\&\quad+[\theta_t^2\frac{\partial C}{\partial S_t}+\theta_t^1]dS_t+[\frac{\partial C}{\partial B(t,r_t)}+\theta_t^0]dB(t,r_t),\end{aligned} \tag{4.4}$$

公式 (4.4) 意味着 $\theta_t^2\frac{\partial C}{\partial S_t}+\theta_t^1=0$, $\frac{\partial C}{\partial B(t,r_t)}+\theta_t^0=0$, 以及

$$\frac{\partial C}{\partial t}+D_1(t)B(t,r_t)^2\frac{\partial^2 C}{\partial B(t,r_t)^2}+D_2(t){S_t}^2\frac{\partial^2 C}{\partial {S_t}^2}+2D_3(t)S_tB(t,r_t)\frac{\partial^2 C}{\partial S_t\partial B(t,r_t)}=0. \tag{4.5}$$

因此根据上面的公式可得如下的结论.

定理 4.1 损益为 $(S_T-B(T,r_T)K)^+$ 的看涨期权的价格满足如下方程

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t}+D_1(t)y^2\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+D_2(t)x^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+2D_3(t)xy\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial y}=0,\\ C(T,x,y)=(x-Ky)^+, \end{cases} \tag{4.6}$$

损益为 $(B(T,r_T)K-S_T)^+$ 的看跌期权的价格满足如下方程

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t}+D_1(t)y^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+D_2(t)x^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+2D_3(t)xy\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}=0,\\ P(T,x,y)=(Ky-x)^+, \end{cases}$$

其中 x 表示股票价格, y 表示零息票的价格.

证 前面公式 (4.1) 到公式 (4.4) 的推导, 已经得出了欧式看涨期权价值所满足的偏微分方程 (4.5), 又因为欧式看涨期权和欧式看跌期权仅仅是到期日的损益不同, 而前面公式 (4.1) 到公式 (4.4) 的推导又没有用到这些条件, 因此欧式看跌期权价值也满足方程 (4.5). 接下来只需要找出欧式看涨期权价值和欧式看跌期权价值所满足的倒向初值条件, 因为欧式看涨期权在除息日的损益为 $(S_T-B(T,r_T)K)^+$, 易得 $C(T,x,y)=(x-Ky)^+$. 同理有 $P(T,x,y)=(Ky-x)^+$.

幸运的是上述两个抛物方程是可求解的, 通过变换将他们化为较为简单的热方程, 有如下的结论成立.

定理 4.2 欧式看涨、看跌期权的价格分别为

$$C(S_t,B(t,r_t),t,K)=S_t\Phi(d_1)-KB(t,r_t)\Phi(d_2), \tag{4.7}$$

$$P(S_t,B(t,r_t),t,K)=KB(t,r_t)\Phi(-d_2)-S_t\Phi(-d_1), \tag{4.8}$$

其中

$$d_1=\frac{\ln S_t-\ln B(t,r_t)-\ln K+\int_t^T D(\tau)\mathrm{d}\tau}{\sqrt{2\int_t^T D(\tau)\mathrm{d}\tau}},d_2=\frac{\ln S_t-\ln B(t,r_t)-\ln K-\int_t^T D(\tau)\mathrm{d}\tau}{\sqrt{2\int_t^T D(\tau)\mathrm{d}\tau}}.$$

证 令

$$\xi=\frac{x}{y},F(t,\xi)=\frac{C}{y}, \tag{4.9}$$

可得

$$\begin{aligned} &C_x=\frac{\partial F}{\partial\xi},C_y=F-\xi\frac{\partial F}{\partial\xi},C_{xx}=\frac{1}{y}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2},\\ &C_{xy}=-\frac{\xi}{y}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2},C_{yy}=\frac{\xi^2}{y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

将公式 (4.10) 代入公式 (4.6), 可得

$$\frac{\partial F}{\partial t}+D(t)\xi^2\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}=0,\quad F(T,\xi)=(\xi-K)^+. \tag{4.11}$$

令

$$z=\ln\frac{\xi}{K}-\int_t^T D(\tau)d\tau, s=\int_t^T D(\tau)d\tau, F(t,\xi)=KU(s,z), \tag{4.12}$$

有

$$\frac{\partial F}{\partial t}=K[-D(t)\frac{\partial U}{\partial s}+D(t)\frac{\partial U}{\partial z}], \frac{\partial F}{\partial \xi}=\frac{K}{\xi}\frac{\partial U}{\partial z},\ \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}=\frac{K}{\xi^2}[\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{\partial U}{\partial z}], \tag{4.13}$$

将公式 (4.13) 代入到公式 (4.11), 则公式 (4.11) 可化为

$$\frac{\partial U}{\partial s}=\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},\ \ U(0,z)=(e^z-1)^+, \tag{4.14}$$

公式 (4.14) 为标准的一维热方程, 它有如下形式的强解

$$U(s,z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi s}}\int_{-\infty}^{\infty} U(0,\tau)e^{\frac{(\tau-z)^2}{4s}}\mathrm{d}\tau, \tag{4.15}$$

将 $U(0,z)=(e^z-1)^+$ 代入到公式 (4.15), 可得 $C(s,z)=e^{z+s}\Phi(\frac{z+2s}{\sqrt{2s}})-\Phi(\frac{z}{\sqrt{2s}})$, 对变换 (4.9) 和变换 (4.12) 进行逆变换, 可得欧式看涨期权的价格. 从公式 (4.9) 到公式 (4.15) 的分析, 得到了欧式看涨期权的定价公式, 欧式看跌期权的定价公式分析方法大致相同仅仅需要将初值条件做一些变化, 这里不再赘述.

最后, 将模型进行一些简化, 以便说明模型所得结论和他人的成果是吻合的. 当短期利率是常数时 (即公式 (1) 中的 θ ,σ_{r1} 和 σ_{r2} 都为零), 则公式 (3.3) 所描述的零息票价格为

$$B(t,r_t)=\exp\{r(T-t)\}, \tag{4.16}$$

此外, 可得

$$\sigma_{r1}=\sigma_{r2}=0, D_1(t)=0, D_3(t)=0, D(t)=H_1\sigma_1^2t^{2H_1-1}+H_2\sigma_2^2t^{2H_2-1}.$$

将上述事实代入公式 (4.7) 和公式 (4.8), 也可以得到分数 B-S 模型下看涨、看跌期权定价公式

$$\begin{aligned}
&C(S_t,B(t,r_t),t,K)=S_t\Phi(\bar{d}_1)-K\exp\{r(T-t)\}\Phi(\bar{d}_2),\\
&P(S_t,B(t,r_t),t,K)=K\exp\{r(T-t)\}\Phi(-\bar{d}_2)-S_t\Phi(-\bar{d}_1),\\
&d_1=\frac{\ln S_t-\ln K+r(T-t)+0.5\sigma_1^2t^{2H_1}+0.5\sigma_2^2t^{2H_2}}{\sqrt{\sigma_1^2t^{2H_1}+\sigma_2^2t^{2H_2}}}, d_2=d_1-\sqrt{\sigma_1^2t^{2H_1}+\sigma_2^2t^{2H_2}}.
\end{aligned}$$

这与文献 [3–5] 所描述的结论相同, 最后令 $H_1=H_2=0.5$, 也可得经典 B-S 模型下结论 (具体见文献 [1]).

5 数值算例

基于以上结论, 以欧式期权为例, 以经典的 B-S 定价公式和定理 4.2 所获得的欧式期权定价公式进行比对. CBOT 网站上公布了一组长周期欧式看涨期权, 并已经给出了个参数

表 1: 欧式看涨期权 ($r = 0.04$)

股票价格	77.8800	86.0708	95.1229	105.127	116.183	128.402	141.907	156.831
经典 B-S	15.7747	20.1680	25.5005	31.9029	39.5115	48.4681	58.9196	71.0157
$H_1 = 0.55$	17.7819	22.3462	27.8236	34.3379	42.0201	51.0082	61.4476	73.4887
$H_1 = 0.56$	18.2019	22.8005	28.3075	34.8454	42.5440	51.5407	61.9805	74.0138
$H_1 = 0.57$	18.6280	23.2611	28.7979	35.3597	43.0753	52.0814	62.5226	74.5491
$H_1 = 0.58$	19.0603	23.7280	29.2947	35.8809	43.6141	52.6303	63.0738	75.0946
$H_1 = 0.59$	19.4988	24.2011	29.7981	36.4089	44.1603	53.1874	63.6341	75.6504
$H_1 = 0.60$	19.9435	24.6805	30.3079	36.9438	44.7139	53.7527	64.2035	76.2163
$H_1 = 0.65$	22.2584	27.1704	32.9535	39.7205	47.5926	56.7010	67.1864	79.1975
$H_1 = 0.70$	24.7227	29.8125	35.7568	42.6643	50.6523	59.8484	70.3908	82.4266
真实值	19.3672	24.0002	39.5361	36.3547	44.1348	53.1209	63.6269	75.0071

的具体数值, 如下 $T = 6$,$K = 100$,$\sigma_{11} = 0.3$, 为了讨论分数布朗运动在期权中的重要性, 令 $\sigma_{12} = 0$, 将定理 4.2 的结论按照 CBOT 上所述交割日期、无风险收益率、交割价格、波动率的数值进行计算, 来考虑不同 H_1 对期权实际价值的影响 (如表 1). 结果发现当取值在 0.58 到 0.59 之间时, 推论 2 所得结论比经典的 B-S 模型所给的计算公式更能接近期权的实际成交价格.

遗憾的是, Hurst 参数 H_1 ,H_2 甚至波动率的具体数值都很难获得, 只能根据以往股票价格以及各种期权的成交记录进行估算. 实际上大多数情况下股票的 Hurst 参数都维持在 0.55 到 0.7 之间 (见文献 [3–7]), 只有少数行业的股票低于 0.5 (比如电力行业 Hurst 参数为 0.4), 而经典的 B-S 模型总是假定 Hurst 参数为 0.5, 因此本文所给出的欧式期权的结论相比 B-S 更有实际应用价值.

表 2: 欧式看涨期权 ($r = 0.02$)

股票价格	81.0584	89.5834	99.005	109.417	120.925	133.643	147.698	163.232
经典 B-S	16.1053	20.5827	26.0175	32.5428	40.2990	49.4301	60.0856	72.4212
$H_1 = 0.55$	18.1583	22.8080	28.3882	35.0251	42.8536	52.0139	62.6539	74.9302
$H_1 = 0.56$	18.5879	23.2723	28.8821	35.5424	43.3870	52.5553	63.1950	75.4626
$H_1 = 0.57$	19.0240	23.7430	29.3826	36.0666	43.9278	53.1050	63.7453	76.0052
$H_1 = 0.58$	19.4664	24.2201	29.8897	36.5978	44.4763	53.6630	64.3048	76.5580
$H_1 = 0.59$	19.9151	24.7036	30.4034	37.1360	45.0322	54.2292	64.8734	77.1210
$H_1 = 0.60$	20.3703	25.1936	30.9238	37.6812	45.5956	54.8036	65.4511	77.6942
$H_1 = 0.65$	22.7409	27.7392	33.6241	40.5107	48.5244	57.7981	68.4752	80.7108
$H_1 = 0.70$	25.2665	30.4415	36.4858	43.5099	51.6354	60.9917	71.7197	83.9728
真实值	19.2341	23.9867	29.5361	35.8312	44.0031	50.9564	53.2637	76.3570

参 考 文 献

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. J. Polit. Econ., 1973, 81(3): 637–654.

[2] Elliott R J, Hoek J. A general fractional White noise theory and applications to finance [J]. Math. Finan., 2003, 13 (2): 301–330.

[3] Hu Y, Oksendal B. Fractional White noise calculus and applications to finance, infinite dimensional analysis [J]. Quant. Prob. Rel. Top., 2003, 6 (1): 1–32 .

[4] 孙玉东, 师义民, 谭伟. 带跳混合分数布朗运动下利差期权定价 [J]. 系统科学与数学, 2012, 32(11): 1377–1385.

[5] 孙玉东, 师义民. 修正的 Black-Scholes 模型下的欧式期权定价 [J]. 高校应用数学学报, 2012, 27(1): 23–32.

[6] 李志广. 参数依赖股票价格情形下的回望期权定价 [J]. 数学杂志, 2012, 32(6): 1091–1099.

[7] Kung J J, Lee L S. Option pricing under the Merton model of the short rate [J]. Math. Comput. Simul., 2009, 80(1):378–386.

[8] Biagini F, Hu Y, OKsendal B. Stochastic calculus for fractional brownian motions and applications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[9] Cheridito P. Regularizing fractional Brownian motion with a Miew towards stock price modeling [M]. Zurich: Zurich Univ., 2002.

[10] Bender C, Sottine T, Valkeila E. Arbitrage with fractional Brownian motion [J]. The. Stoch. Proc., 2006, 12(3): 1–12.

[12] Bender C, Sottine T, Valkeila E. Pricing by hedging and absence of regular arbitrage beyond semimartingales [J]. Finan. Stoch., 2008, 12(4): 441–468.

[12] Cheridito P. Mixed fractional Brownian motion [J]. Bernoulli, 2001, 7: 913–934.

EUROPEAN OPTION PRICING UNDER THE VASICEK MODEL OF THE SHORT RATE IN MIXED FRACTIONAL BROWNIAN MOTION ENVIRONMENT

LI Zhi-guang, KANG Shu-gui

(*School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Datong University, Datong 037009, China*)

Abstract: In this paper, the option pricing problem of European option is studied in the mixed fractional Brownian motion environment. By using fractional Itǒ formula, the Black-Scholes partial differential equation is obtained. And the pricing formulae of the European call and put option are obtained by partial differential equation theory. The results of Black-Scholes model are generalized .

Keywords: option pricing; vasicek model; Black-Scholes model; mixed fractional Brownian motion.

2010 MR Subject Classification: 90A06; 60H10