Vol. 36 (2016)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

奈特不确定下带通胀的跨国直接投资问题

费为银, 高贵云, 梁 勇
(安徽工程大学数理学院, 安徽 芜湖 241000)

摘 要: 本文研究了一家公司在含糊下带通胀的跨国直接投资 (FDI) 问题. 利用 Itô公式推导出含糊下考虑通胀因素的消费篮子价格动力学方程. 结合公司进行跨国投资决策时需要缴纳的法人税, 给定了跨国直接投资的价值, 并在通胀折现的跨国直接投资价值最大化标准下, 分析了公司进行（不可逆）跨国直接投资的最优时间, 通过解 HJB 方程推导出了公司由出口转向跨国直接投资时的最优 GDP 水平. 通过进行数值模拟, 定量分析了通胀因素对公司跨国直接投资策略的影响.

关键词: 跨国直接投资 (FDI); 含糊; 通胀; 法人税; HJB 方程
MR(2010) **主题分类号**: 60H30; 91G80 **中图分类号**: O211.63
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)03-0598-11

1 引言

假设一家公司面临选择出口产品, 还是进入外国市场直接投资生产销售的问题. 由于预测外国经济、政治的稳定性比本国难, 所以公司若要进行跨国直接投资, 将会面临更多的不确定, 这样就会直接导致预测在东道国赚得的利润时产生不确定. Aizenman 和 Marion[1] 指出当分析跨国直接投资时, 专注于不确定是重要的. 因为一般来说, 跨国直接投资的东道国是发展中国家, 发展中国家的商业经营被认为比发达国家更不确定. 因此, 如果更多的不确定对发达国家进行跨国直接投资有负面影响, 那么就可能会阻碍发展中国家的经济发展, 这就意味着发展中国家应该采取政策鼓励跨国直接投资.

Aizenman 和 Marion[1] 基于美国跨国公司的数据发现风险对跨国直接投资有负面影响. 而 Pennings[2] 分析了风险增加对东道国法人税税率的影响, 并表明风险的增加会使得法人税税率增加. 近些年来, 许多学者将不确定性的概念推广到含糊 (ambiguity) 的概念. Ellsberg[3] 提出了风险和含糊之间的区别, 为人们趋向于喜欢对已知, 而不是未知做出行动的事实提供了证据. Gilboa 和 Schmeidler[4] 为了克服 Ellsberg 的悖论, 公理化了最大最小期望效用 (MMEU), 而 MMEU 会加深对决策者含糊下行为的理解. Nishimura 和 Ozaki[5] 表明奈特不确定对不可逆投资机会价值的影响与风险形式的传统不确定性是截然不同的. Asano[6] 采用了由 Chen 和 Epstein[7] 提出的连续时间模型. 他研究了一家公司在含糊条件下进行一个不可逆跨国直接投资的最优时间和东道国的最优税收政策, 并分析了含糊性的增加对最优税收政策的影响. 赵果庆 [8] 研究了我国 FDI 与 GDP 增长之间的关系问题. 赵燕和赵增耀 [9]

*收稿日期: 2013-06-26 接收日期: 2013-11-07
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (71171003; 71271003); 教育部人文社会科学规划基金资助项目 (12YJA790041); 安徽省自然科学基金资助项目 (090416225; 1208085MG116); 安徽省高校自然科学基金资助项目 (KJ2012B019; KJ2013B023).
作者简介: 费为银 (1963–), 男, 安徽芜湖, 博士, 教授, 主要研究方向: 金融数学与金融工程、随机分析与随机控制.

从理论上分析了金融市场因素对于 FDI 促进经济增长的影响, 并对中美两国数据进行了实证检验. 廖利兵和曹标 [10] 在跨国投资理论基础上融入了国际贸易, 用以研究多国 (地区) 制造业企业进入中国市场的方式. 通过梳理一般产业均衡模型分析企业选择出口还是水平型 FDI 的内在机制, 在此基础上进行了实证检验. 费宇和王江 [11] 运用面板平滑转换 (PSTR) 模型研究国外直接投资 (FDI) 对我国各地区经济增长的非线性效应. 杨林 [12] 着重分析了 FDI 流入中国的产业经济学基础, 同时对 FDI 对中国经济的影响做了分析. 另一方面, 通货膨胀风险及其规避问题是学术界和业界普遍关心的问题. 根据已有的研究成果, 可以看出通货膨胀对决策也存在一定的影响. Fama 和 Schwert[13] 估计了 1953–1971 年期间不同的资产对冲预期和非预期通胀的程度. 戴国强和张建华 [14] 检验了我国资产价格与通货膨胀的关系. Fei[15] 在带有马尔科夫机制和通胀的金融市场下给出通胀环境下的预期消费贴现效用最大化问题, 并给出了最优消费和投资组合策略. 费为银和李淑娟 [16] 研究了奈特不确定下带通胀的最优消费和投资模型, 并分析了含糊和通胀等因素对最优消费和投资决策的影响. 费为银等 [17] 分析了奈特不确定及机制转换环境下带通胀的最优投资问题. 而通过对已有经济数据的分析, 不难发现, 在现实经济环境中通货膨胀或通货紧缩对投资决策存在一定程度的影响.

通过上述文献综述分析, 发现通胀和含糊很大程度上会影响投资者的最优资产配置策略. 本文研究了含糊下带通胀的跨国直接投资问题. 对现有模型进行了推广, 在理论上推导出了在含糊条件下考虑通胀因素时, 公司进行跨国直接投资的最优时间, 以及由出口转向跨国直接投资时的最优 GDP 水平. 分析含糊和随机通胀波动率等参数对公司决策的影响, 得出一些有重要经济意义的结论.

2 含糊条件下带通胀折现的利润流

在本文中, 现有一家公司, 假设从第三国出口的费用极端昂贵, 那么仅考虑存在两个国家的情形, 这就意味着它仅仅有益于公司从本国出口商品或进行跨国直接投资在东道国生产. 也就是说, 这家公司必须决定是将产品出口到东道国, 还是进入奈特不确定环境下采取跨国直接投资的市场. 在这里跨国直接投资是不可逆的, 其意义在于一旦公司决定停止在东道国的投入转向出口时, 投入的费用不能被收回. 假设公司的决策依赖于直接影响其利润的东道国 GDP 水平的变化. 其 GDP 水平的演变过程服从几何布朗运动, 公司对于 GDP 水平的变化并不是完全信任的. 换句话说这个公司面临着含糊. 本文中跨国直接投资的含糊是由东道国 GDP 水平的增长来表示的.

假设在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上定义两个标量 Wiener 过程 $w_I(t)$ 和 $w(t)$, $w_I(t)$ 构建通胀的随机状态, $(w(t))_{0\leq t\leq T}$ 是关于 P 的标准布朗运动, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ 是由 $(w_I(t))_{0\leq t\leq T}$ 和 $(w(t))_{0\leq t\leq T}$ 生成的基本信息流. 由于通货膨胀与金融市场有关, 因此 $w_I(t)$ 和 $w(t)$ 相关. 由费为银和李淑娟 [16] 可知东道国的对数消费篮子价格的动力学可以表示为

$$dL(t) = (\psi - \frac{1}{2}\xi^2)dt + \xi dw_I(t), \tag{2.1}$$

其中 ψ 和 ξ 是常数, 实数 ψ 表示预期通胀率, ξ 是通胀波动率. 因为消费篮子价格通常是上升的, 所以 $\psi > 0$. 向量 ϵ 表示 $w_I(t)$ 和 $w(t)$ 之间的相关系数, 即

$$E[dw(t)dw_I(t)] = \epsilon dt.$$

记 Y_t 是 t 时刻东道国 GDP 水平的变化, 假设 GDP 水平的变化 $(Y_t)_{0\le t\le T}$ 服从几何布朗运动 $dY_t=\mu Y_t dt+\sigma Y_t dw(t)$, 其中 μ 和 σ 是常数. 因为几何布朗运动在无限期限内是上方无界的, 所以 GDP 水平服从几何布朗运动的这个假设可以看成是在短、中期运作中 GDP 水平变化的近似.

设 Θ 是密度生成元集. 对于这样的集合, 令

$$dB(t)\triangleq\frac{\sigma dw(t)-\xi dw_I(t)}{\sqrt{\xi^2+\sigma^2-2\xi\sigma\epsilon}},$$

则 $B(t)$ 为标准布朗运动, 在 $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ 上定义由 Θ 生成的概率测度集 $\mathcal{P}^\Theta=\{Q^\theta\big|\,\theta\in\Theta\}$, 其中 Q^θ 由下式给出

$$\frac{dQ^\theta}{dP}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t|\theta_s|^2\,ds-\int_0^t\theta_s dB(s)\right\}.$$

为了分析 MMEU 框架中含糊条件下的行为, 假设用相当于一个概率测度 P 的概率测度集来刻画决策者的信仰. 如果概率测度集 $\mathcal{P}^\Theta$ 通过密度生成元集 Θ 变大, 那么这就意味着决策者要考虑许多情况, 包括最好和最坏的情况.

引入下面由 Chen 和 Epstein[7] 提出的密度生成元类. 引入 i.i.d. 含糊的概念是为了分析解决动态最优化问题. 设 $\mathcal{L}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ 上实值可测, $\mathcal{F}_t$ 适应的随机过程集, $\mathcal{L}^2$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个子集, 定义为

$$\mathcal{L}^2=\left\{(\theta_t)_{0\le t\le T}\in\mathcal{L}\,\middle|\,\int_0^T\theta_t^2dt<+\infty,\ \ P-\text{a.s.}\right\}.$$

若存在 $\mathbb{R}$ 上的一个紧子集 K 使得 $0\in K$, 且 $\Theta^K=\{(\theta_t)\in\mathcal{L}^2|\,\theta_t\in K\ \ (l\otimes P)-\text{a.s.}\}$, 其中 l 表示 $\mathcal{B}([0,T])$ 上的 Lebesgue 测度, $\mathcal{B}([0,T])$ 表示包含 $[0,T]$ 的最小 Borelσ - 代数. 由 Θ^K 刻画的含糊叫做 i.i.d. 含糊. 集合 Θ^K 是状态、时间独立的, κ - 无知是 i.i.d. 含糊 Θ^K 的一种特殊情形. 在 κ - 无知的情况下, 可以将含糊的程度参数化. 关于 κ - 无知的 K 可以表示为对所有 $\kappa>0$, $K=[-\kappa,\kappa]$. 而且因为 κ 越大, 概率测度集也越大, 所以正实数 κ 就表示含糊度. 通过考虑 κ - 无知的情形, 可以静态分析比较含糊的影响.

通过 Girsanov 定理, 可知 Q^θ 下的标准布朗运动为

$$B(t)^\theta=B(t)+\int_0^t\theta(s)ds.$$

另一方面, 根据 Itô公式, 结合 (2.1) 式可得

$$\begin{aligned}de^{-L(t)}\quad&=-e^{-L(t)}dL(t)+\tfrac{1}{2}e^{-L(t)}\xi^2dt=e^{-L(t)}(dL(t)-\tfrac{1}{2}\xi^2dt)\\&=e^{-L(t)}((\psi-\tfrac{1}{2}\xi^2)dt+\xi dw_I(t)-\tfrac{1}{2}\xi^2dt)=e^{-L(t)}((\psi-\xi^2)dt+\xi dw_I(t)).\end{aligned}$$

记 $\tilde{Y}_t\triangleq e^{-L(t)}Y_t$, 于是

$$\begin{aligned}&d\tilde{Y}_t=d(e^{-L(t)}Y_t)=Y_tde^{-L(t)}+e^{-L(t)}dY_t+de^{-L(t)}dY_t\\&=-e^{-L(t)}Y_t\left((\psi-\xi^2)dt+\xi dw_I(t)\right)+e^{-L(t)}Y_t(\mu dt+\sigma dw(t))-e^{-L(t)}\xi\sigma Y_tdw(t)dw_I(t)\\&=-\tilde{Y}_t\left((\psi-\xi^2)dt+\xi dw_I(t)\right)+\tilde{Y}_t(\mu dt+\sigma dw(t))-\tilde{Y}_t\xi\sigma dw(t)dw_I(t)\\&=\tilde{Y}_t[(\xi^2-\psi+\mu-\xi\sigma\epsilon)dt+(\sigma dw(t)-\xi dw_I(t))]\\&=\tilde{Y}_t[(\xi^2-\psi+\mu-\xi\sigma\epsilon)dt+\sqrt{\xi^2+\sigma^2-2\xi\sigma\epsilon}dB(t)]\\&=\tilde{Y}_t\left(\tilde{\mu}dt+\tilde{\sigma}dB(t)\right),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\mu} = \xi^2 - \psi + \mu - \xi\sigma\epsilon$, $\tilde{\sigma} = \sqrt{\xi^2 + \sigma^2 - 2\xi\sigma\epsilon}$, 则在 Q^θ 下有

$$\begin{aligned} d\tilde{Y}_t &= \tilde{Y}_t\left(\tilde{\mu}dt + \tilde{\sigma}dB(t)\right) \\ &= \tilde{Y}_t\left(\tilde{\mu}dt + \tilde{\sigma}(dB_t^\theta - \theta_t dt)\right) \\ &= \tilde{Y}_t\left(\left(\tilde{\mu} - \tilde{\sigma}\theta_t\right)dt + \tilde{\sigma}dB_t^\theta\right). \end{aligned}$$

因此 Q^θ 下带通胀折现的利润流 $\tilde{Y}_t$ 动力学方程为

$$d\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_t\left(\left(\tilde{\mu} - \tilde{\sigma}\theta_t\right)dt + \tilde{\sigma}dB_t^\theta\right),$$

再由 Itô公式, 可推出含糊条件下带通胀折现的利润流的动力学方程为

$$\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_0 \exp\left((\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)t - \tilde{\sigma}\int_0^t \theta_s ds + \tilde{\sigma}dB_t^\theta\right), \forall t \geq 0. \tag{2.2}$$

3 i.i.d. 含糊下跨国直接投资的价值

Pennings[2] 认为商业公司的产业远小于整个经济系统, 以至于产业中的价格变化并不会影响其他产业的价格. 因此, 可以用部分均衡来分析, 假设一个典型的家庭是下面效用函数 $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的最大化:

$$U(x, m) = u(x) + m,$$

其中 $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是幸福函数, x 是某商品的消费量, m 表示所有其他商品的总消费额. 在标准模型中, 假设幸福函数 u 对于所有的 $x \geq 0$ 有 $u'(x) > 0$, $u''(x) \leq 0$, 那么这个典型家庭的逆需求函数是 $u'(x) = q$, 其中 q 是商品的消费价格.

如果公司进行出口的话, 商品的消费价格 $q = q^E = p^E + n$, 如果公司采取跨国直接投资, 那么 $q = q^F = p^F$, 其中 p^E 和 p^F 分别表示出口和跨国直接投资时的生产价格, $n \geq 0$ 表示交易费用, 它包括运输费用 $n_1 \geq 0$ 和特定关税 $n_2 \geq 0$, 而且 $n = n_1 + n_2$. 由此, 可以知道如果公司采取跨国直接投资并在东道国生产产品, 那么 $n = 0$. 设 c^E 和 c^F 分别表示在本国工厂和外国工厂生产的常临界成本. 正如 Blanchard[18] 中的假设, 真实的利润是一个关于产量的增函数, 本文假设投资利润是由整个 GDP 水平的一部分来构造的, 即 λY_t, $0 < \lambda < 1$. 如果公司进行出口, 那么每一单位家庭, 公司最大的税前和关税前利润是 $\hat{\pi}^E = (\hat{p}^E - c^E)x(\hat{q}^E)$, 而如果采取跨国直接投资并在东道国生产产品, 那就有 $\hat{\pi}^F = (\hat{p}^F - c^F)x(\hat{q}^F)$, 其中 $\hat{p}^E$ 和 $\hat{p}^F$ 分别表示出口和跨国直接投资时, 使每一单位家庭税前和关税前利润最大化的生产价格, $\hat{q}^E = \hat{p}^E + n$, $\hat{q}^F = \hat{p}^F$.

当公司采取跨国直接投资时, 她需要支付在东道国建立工厂的成本 $I(I \geq 0)$. 而且她还需要缴纳从跨国直接投资中获得的利润的法人税 $0 \leq \tau_1 \leq 1$ 和东道国的一次性付清税（或津贴、补贴）$\tau_2 \geq 0$ (或 $-I \leq \tau_2 \leq 0$). 另一方面, 她需要缴纳从本国出口所获利润的法人税 $0 \leq \tau_0 \leq 1$.

假设公司是含糊厌恶的, 也就是说, 她的信仰是由概率测度集表示的, 并使 $\mathcal{P}^\Theta$ 上的期望利润下确界最大化. 此外, 假设含糊由 i.i.d. 含糊刻画, 生产计划期为无限, 而且工厂永远不

会完全贬值, 公司的折现率 $r > \tilde{\mu}$. 因此, t 时刻进行跨国直接投资的价值为

$$\begin{aligned} V_t \equiv V(\tilde{Y}_t) &= \inf_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}^\Theta} E^Q[\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\tilde{Y}_s((1-\tau_1)\hat{\pi}^F-(1-\tau_0)\hat{\pi}^E)ds\,|\mathcal{F}_t] \\ &= \inf_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}^\Theta} E^Q[\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\tilde{Y}_s A ds\,|\mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

其中 $A = (1-\tau_1)\hat{\pi}^F - (1-\tau_0)\hat{\pi}^E$.

命题 1 假设公司是含糊厌恶的, 其信仰由 Θ^K 来刻画, 则含糊下 t 时刻进行跨国直接投资的价值为

$$V(\tilde{Y}_t) = \frac{A\tilde{Y}_t}{r-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*)}, \tag{3.1}$$

其中 $\theta^* \equiv \arg\max\{\tilde{\sigma}x\,|x\in K\} = \max K$.

证 设 $s \geq t$, $\theta, \theta^* \in \Theta$, 满足

$$\exp(-\int_t^s \tilde{\sigma}\theta_\rho d\rho + \tilde{\sigma}(B_s^\theta - B_t^\theta)) \geq \exp(-\int_t^s \tilde{\sigma}\theta_\rho^* d\rho + \tilde{\sigma}(B_s^\theta - B_t^\theta)),$$

则由条件期望的单调性知

$$\begin{aligned} E^{Q^\theta}[\exp(-\int_t^s \tilde{\sigma}\theta_\rho d\rho + \tilde{\sigma}(B_s^\theta - B_t^\theta))\,|\mathcal{F}_t] &\geq E^{Q^\theta}[\exp(-\int_t^s \tilde{\sigma}\theta_\rho^* d\rho + \tilde{\sigma}(B_s^\theta - B_t^\theta))\,|\mathcal{F}_t] \\ &= \exp\left(-\int_t^s \tilde{\sigma}\theta_\rho^* d\rho\right)\exp\left(\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(s-t)\right) \\ &= E^{Q^{\theta^*}}[\exp(-\textstyle\int_t^s \tilde{\sigma}\theta_\rho^* d\rho + \tilde{\sigma}(B_s^{\theta^*} - B_t^{\theta^*}))\,|\mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

由条件期望 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned} V_t &= \inf_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}^\Theta} E^{Q^\theta}[\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\tilde{Y}_s A ds\,|\mathcal{F}_t] \\ &= \inf_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}^\Theta} \int_t^\infty E^{Q^\theta}[e^{-r(s-t)}\tilde{Y}_s A\,|\mathcal{F}_t]ds. \end{aligned}$$

再结合 (2.2) 式, 有

$$\begin{aligned} V_t &= \inf_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}^\Theta} \int_t^\infty \tilde{Y}_t A\exp((\tilde{\mu}-r-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)(s-t))E^{Q^\theta}[\exp(-\int_t^s \tilde{\sigma}\theta_\rho d\rho + \tilde{\sigma}(B_s^\theta - B_t^\theta))\,|\mathcal{F}_t]ds \\ &= \int_t^\infty \tilde{Y}_t A\exp((\tilde{\mu}-r-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)(s-t))E^{Q^{\theta^*}}[\exp(-\int_t^s \tilde{\sigma}\theta_\rho^* d\rho + \tilde{\sigma}(B_s^{\theta^*} - B_t^{\theta^*}))\,|\mathcal{F}_t]ds \\ &= \int_t^\infty \tilde{Y}_t A\exp((\tilde{\mu}-r-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)(s-t) - \int_t^s \tilde{\sigma}\theta_\rho^* d\rho)E^{Q^{\theta^*}}[\exp\tilde{\sigma}(B_s^{\theta^*} - B_t^{\theta^*})\,|\mathcal{F}_t]ds \\ &= \int_t^\infty \tilde{Y}_t A\exp((\tilde{\mu}-r-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)(s-t) - \int_t^s \tilde{\sigma}\theta_\rho^* d\rho)\exp(\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(s-t))ds \\ &= \int_t^\infty \tilde{Y}_t A\exp((\tilde{\mu}-r)(s-t) - \int_t^s \tilde{\sigma}\theta_\rho^* d\rho)ds \\ &= \frac{A\tilde{Y}_t}{r-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*)}. \end{aligned}$$

证毕.

下面将给出含糊条件下对跨国直接投资的价值进一步的刻画, 并分析解出 HJB 方程. 公司面临的问题是在含糊条件下如何确定出口与跨国直接投资之间转换的那个时间点. 因此找一停时 t', 使跨国直接投资在 0 时刻的价值最大化

$$\min_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}^{\Theta}} E^{Q}[\int_{t'}^{\infty} e^{-rs}\tilde{Y}_s A ds - e^{-rt'}(I+\tau_2)\,|\mathcal{F}_0].$$

因此用 F_t 表示在含糊条件下跨国直接投资在 t 时刻价值的最大值, 即

$$F_t = \max_{t'\in[t,\infty)} \min_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}^{\Theta}} E^{Q}[\int_{t'}^{\infty} e^{-r(s-t)}\tilde{Y}_s A ds - e^{-r(t'-t)}(I+\tau_2)\,|\mathcal{F}_t]. \tag{3.2}$$

命题 2 假设奈特不确定由 i.i.d. 含糊刻画, 生产计划期为无限, 而且工厂永远不会完全贬值. 在这三个假设条件下, F_t 是稳定的, 即可将 F_t 看作 $F_t = F(V_t)$, 其中 $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 是某实函数. 因此可以得到在含糊条件下跨国直接投资在 t 时刻价值的最大值的 HJB 方程

$$F(V_t) = \max\left\{V_t-(I+\tau_2), \min_{\theta\in\Theta} E^{Q^{\theta}}[dF(V_t)\,|\mathcal{F}_t] + F(V_t) - rF(V_t)dt\right\}. \tag{3.3}$$

证 由矩形性 (参见 Asano[6] 中引理 4) 和 (3.2) 式得

$$\begin{aligned}
F_t &= \max\Bigg\{\min_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}^{\Theta}} E^{Q}[\textstyle\int_t^{\infty} e^{-r(s-t)}\tilde{Y}_s A ds\,|\mathcal{F}_t] - (I+\tau_2),\\
&\quad \max_{t'\geq t+dt}\min_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}^{\Theta}} E^{Q}\left[\textstyle\int_{t'}^{\infty} e^{-r(s-t)}\tilde{Y}_s A ds - e^{-r(t'-t)}(I+\tau_2)\,|\mathcal{F}_t\right]\Bigg\}\\
&= \max\left\{V_t-(I+\tau_2), \max_{t'\geq t+dt}\min_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}^{\Theta}} E^{Q}\left[\textstyle\int_{t'}^{\infty} e^{-r(s-t)}\tilde{Y}_s A ds - e^{-r(t'-t)}(I+\tau_2)\,|\mathcal{F}_t\right]\right\}\\
&= \max\left\{V_t-(I+\tau_2), \max_{t'\geq t+dt}\min_{\theta\in\Theta} E^{Q^{\theta}}\left[\textstyle\int_{t'}^{\infty} e^{-r(s-t)}\tilde{Y}_s A ds - e^{-r(t'-t)}(I+\tau_2)\,|\mathcal{F}_t\right]\right\}\\
&= \max\{V_t-(I+\tau_2),\\
&\quad e^{-rdt}\max_{t'\geq t+dt}\min_{\theta\in\Theta} E^{Q^{\theta}}\left[E^{Q^{\theta}}\left[\textstyle\int_{t'}^{\infty} e^{-r(s-t-dt)}\tilde{Y}_s A ds - e^{-r(t'-t-dt)}(I+\tau_2)\,|\mathcal{F}_{t+dt}\right]|\mathcal{F}_t\right]\}\\
&= \max\{V_t-(I+\tau_2),\\
&\quad e^{-rdt}\max_{t'\geq t+dt}\min_{\theta\in\Theta} E^{Q^{\theta}}\left[\min_{\theta'\in\Theta} E^{Q^{\theta'}}\left[\textstyle\int_{t'}^{\infty} e^{-r(s-t-dt)}\tilde{Y}_s A ds - e^{-r(t'-t-dt)}(I+\tau_2)\,|\mathcal{F}_{t+dt}\right]|\mathcal{F}_t\right]\}\\
&= \max\{V_t-(I+\tau_2),\\
&\quad e^{-rdt}\min_{\theta\in\Theta} E^{Q^{\theta}}\left[\max_{t'\geq t+dt}\min_{\theta'\in\Theta} E^{Q^{\theta'}}\left[\textstyle\int_{t'}^{\infty} e^{-r(s-t-dt)}\tilde{Y}_s A ds - e^{-r(t'-t-dt)}(I+\tau_2)\,|\mathcal{F}_{t+dt}\right]|\mathcal{F}_t\right]\}\\
&= \max\left\{V_t-(I+\tau_2), e^{-rdt}\min_{\theta\in\Theta} E^{Q^{\theta}}[F_t+dF_t\,|\mathcal{F}_t]\right\}\\
&= \max\left\{V_t-(I+\tau_2), (1-rdt)\left(\min_{\theta\in\Theta} E^{Q^{\theta}}[dF_t\,|\mathcal{F}_t] + F_t\right)\right\}\\
&= \max\left\{V_t-(I+\tau_2), \min_{\theta\in\Theta} E^{Q^{\theta}}[dF_t\,|\mathcal{F}_t] + F_t - rF_t dt\right\}.
\end{aligned}$$

证毕.

因此在继续投资期内, 跨国直接投资获得的最小期望资金等同于按公司折现率权衡所需的机会成本, 即

$$\min_{\theta\in\Theta} E^{Q^\theta}[dF_t\,|\mathcal{F}_t] = rF_t dt. \tag{3.4}$$

再由 Itô引理, 结合 (2.2) 和 (3.1) 式, 得

$$\begin{aligned} dV_t &= \frac{A}{r-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*)}d\tilde{Y}_t = (\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta)\,V_t dt + \tilde{\sigma}V_t dB_t^\theta, \\ (dV_t)^2 &= \tilde{\sigma}^2 V_t^2 (dB_t^\theta)^2 = \tilde{\sigma}^2 V_t^2 dt, \end{aligned}$$

其中 $V_0 = \frac{AY_0}{r-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*)}$. 再运用 Itô引理可知 (假设 F_t' 为正)

$$dF_t = F_t^{'} dV_t + \tfrac{1}{2}F_t^{''}(dV_t)^2 = F_t^{'}\left((\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta)\,V_t dt + \tilde{\sigma}V_t dB_t^\theta\right) + \tfrac{1}{2}F_t^{''}\tilde{\sigma}^2 V_t^2 dt.$$

在继续投资期内, 有

$$\min_{\theta\in\Theta} E^{Q^\theta}[dF_t\,|\mathcal{F}_t] = \min_{\theta\in\Theta} E^{Q^\theta}[F_t^{'}\left((\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta)\,V_t dt + \tilde{\sigma}V_t dB_t^\theta\right) + \frac{1}{2}F_t^{''}\tilde{\sigma}^2 V_t^2 dt\,|\mathcal{F}_t]\,. \tag{3.5}$$

由于 B_t^θ 是关于 Q^θ 的布朗运动, 所以 (3.5) 式可表示为

$$\min_{\theta\in\Theta} E^{Q^\theta}[dF_t\,|\mathcal{F}_t] = \min_{\theta\in\Theta} F_t^{'}\,(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta)\,V_t dt + \frac{1}{2}F_t^{''}\tilde{\sigma}^2 V_t^2 dt. \tag{3.6}$$

因为 $F_t^{'}$ 为正, $\theta^* \equiv \max K$, 所以 (3.6) 式可表示为

$$\min_{\theta\in\Theta} E^{Q^\theta}[dF_t\,|\mathcal{F}_t] = F_t^{'}\,(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*)\,V_t dt + \frac{1}{2}F_t^{''}\tilde{\sigma}^2 V_t^2 dt,$$

进而可得

$$\frac{1}{2}F_t^{''}\tilde{\sigma}^2 V_t^2 dt + F_t^{'}\,(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*)\,V_t dt - \min_{\theta\in\Theta} E^{Q^\theta}[dF_t\,|\mathcal{F}_t] = 0.$$

由 (3.4) 式可得

$$\frac{1}{2}F_t^{''}\tilde{\sigma}^2 V_t^2 + F_t^{'}\,(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*)\,V_t - rF_t = 0. \tag{3.7}$$

由 (2.2) 式知若 $\tilde{Y}_t = 0$, 则 $T \geq t$ 时, $\tilde{Y}_T = 0$, 即表示公司不该投资, 再由 (3.2) 式可知跨国直接投资的价值为 $F(0) = 0$.

由 (3.3) 式可知 $F(V_t^*) = V_t^* - (I+\tau_2)$. 因为公司进入市场后, 即 $V_t = V_t^*$ 时, 会引发成本 I 和一次性付清税 τ_2.

若在 V_t^* 时进入市场, 那么 $F(V_t)$ 需在 V_t^* 处光滑通过, 于是 $F'(V_t^*) = 1$. 所以得边界条件为

$$\begin{cases} F(0) = 0, \\ F(V_t^*) = V_t^* - (I+\tau_2), \\ F'(V_t^*) = 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

命题 3 在边界条件 (3.8) 下, 结合微分方程 (3.7), 可得到 HJB 方程 (3.3) 的解

$$F(V_t) = \begin{cases} V_t - (I+\tau_2), & V_t \geq V_t^*, \\ (\frac{I+\tau_2}{\alpha-1})^{1-\alpha}\alpha^{-\alpha}(V_t)^\alpha, & V_t < V_t^*, \end{cases}$$

其中 $V_t^*=\frac{\alpha}{\alpha-1}(I+\tau_2)$, $\alpha=\frac{-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)+\sqrt{(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)^2+2r\tilde{\sigma}^2}}{\tilde{\sigma}^2}$.

证 解微分方程 (3.7). 假设其特征方程为

$$\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2x(x-1)+(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*)\,x-r=0,$$

即 $\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2x^2+\left(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)x-r=0$.

其解为

$$\alpha=\frac{-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)+\sqrt{(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)^2+2r\tilde{\sigma}^2}}{\tilde{\sigma}^2},$$

$$\beta=\frac{-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)-\sqrt{(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)^2+2r\tilde{\sigma}^2}}{\tilde{\sigma}^2}.$$

由于

$$\begin{aligned}\alpha&=\tfrac{-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)+\sqrt{(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)^2+2r\tilde{\sigma}^2}}{\tilde{\sigma}^2}\\&>\tfrac{-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)+\sqrt{(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)^2+2(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*)\tilde{\sigma}^2}}{\tilde{\sigma}^2}\\&=\tfrac{-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)+\left|\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*+\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right|}{\tilde{\sigma}^2}.\end{aligned}$$

若 $\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*\geq-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2$, 则

$$\frac{-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)+\left|\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*+\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right|}{\tilde{\sigma}^2}\geq1.$$

若 $\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*<-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2$, 则

$$\frac{-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)+\left|\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*+\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right|}{\tilde{\sigma}^2}>1.$$

所以 $\alpha>1$. 同理

$$\begin{aligned}\beta&=\tfrac{-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)-\sqrt{(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)^2+2r\tilde{\sigma}^2}}{\tilde{\sigma}^2}\\&<\tfrac{-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)-\left|\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*+\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right|}{\tilde{\sigma}^2}\\&\leq0.\end{aligned}$$

此外, 容易证明由 V_t^α 和 V_t^β 能够得到 (3.7) 的解, 而且 $\forall V_t>0$, V_t^α 和 V_t^β 的朗斯基行列式非零, 这里定义函数 f_1 和 f_2 的朗斯基行列式为 $G(f_1,f_2)=f_1f_2'-f_1'f_2$, 而且 $G(V_t^\alpha,V_t^\beta)=(\beta-\alpha)V_t^{\alpha+\beta-1}$.

因此 (3.7) 式的任意解可以用 V_t^α 和 V_t^β 的线性关系式来表示, 即 $F(V_t)=BV_t^\alpha+CV_t^\beta$, 其中 B 和 C 为实数 (参见 Boyce and DiPrima[19] 定理 3.4).

由于 $\beta<0$, $F(0)=0$, 所以 $C=0$, 从而 $F(V_t)=BV_t^\alpha$.

又因为 $F(V_t^*)=V_t^*-(I+\tau_2)$, $F'(V_t^*)=1$, 所以

$$\begin{cases}(V_t^*)^\alpha B=V_t^*-(I+\tau_2),\\ \alpha(V_t^*)^{\alpha-1}B=1,\end{cases}$$

解得 $V_t^*=\frac{\alpha}{\alpha-1}(I+\tau_2)$, $B=\frac{\alpha^{-\alpha}}{(\alpha-1)^{1-\alpha}}(I+\tau_2)$. 由 (3.3) 式可知命题 3 成立. 证毕.

由此可知含糊条件下受通胀影响后的最优 GDP 水平 $\tilde{Y}_t^*$ 为

$$\tilde{Y}_t^* = \frac{r-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*)}{A}V_t^* = \frac{(r-(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}\theta^*))\alpha}{A(\alpha-1)}(I+\tau_2), \tag{3.9}$$

其中 $\tilde{\mu}=\xi^2-\psi+\mu-\xi\sigma\epsilon$, $\tilde{\sigma}=\sqrt{\xi^2+\sigma^2-2\xi\sigma\epsilon}$.

当 GDP 水平 $Y_t<\tilde{Y}_t^*$ 时, 在奈特不确定环境下进行 FDI 的价值 $V_t<\tilde{V}_t^*$, 则公司应该等待最优时刻; 而当 $Y_t>\tilde{Y}_t^*$ 时, 那么 $V_t>\tilde{V}_t^*$, 这时公司应该立即停止 FDI. 因此 $\tilde{Y}_t^*$ 可以被看作是预订值.

4 数值分析

为了更好地说明通胀因素对公司跨国投资决策的影响, 利用 Matlab 软件进行数值模拟定量分析, 可以得到以下结论.

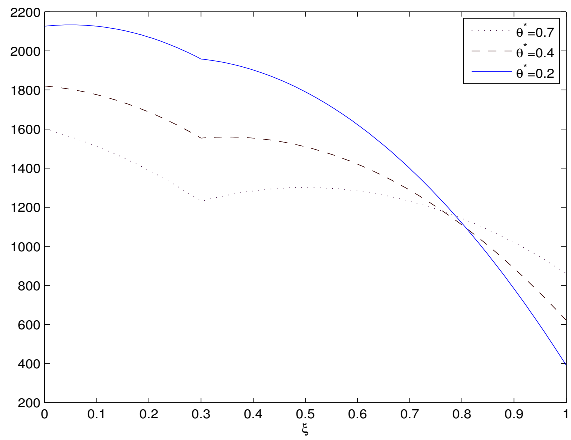

图 1: 在不同含糊度下, 通胀波动率 ξ 对最优 GDP 水平 $\tilde{Y}_t^*$ 的影响 (见 (3.9) 式)

在图 1 中, 给定参数值 I = 1000, $\hat{\pi}^F=2$, $(1-\tau_0)\hat{\pi}^E=1$, $\tau_1=0.3$, $\tau_2=-600$, $\epsilon=1$, $\mu=0.05$, $\sigma=0.3$, 研究预期通胀率 $\psi=0.002$ 时, 通胀波动率 ξ 对最优 GDP 水平的影响. 从图中可以看到, 随着通胀波动率的增加, 最优 GDP 水平先是呈现下降趋势, 也就是说决定进入东道国市场时进行 FDI 的价值 $\tilde{V}_t^*$ 也随之下降. 随着含糊度的增加, 最优 GDP 水平的下降趋势愈加明显. 但当通胀波动率到达 0.3 左右时, 出现拐点, 最优 GDP 水平呈现先上升再下降的趋势, 决定进入东道国市场时进行 FDI 的价值 $\tilde{V}_t^*$ 也随之先上升再下降. 随着含糊度的增加, 这个拐点愈加明显, 最优 GDP 水平上升的趋势愈加明显, 下降的趋势反而变缓. 但是拐点的出现均在通胀波动率为 0.3 左右, 并未受预期通胀率和含糊度的影响.

在图 2 中, 给定参数值 I = 1000, $\hat{\pi}^F=2$, $(1-\tau_0)\hat{\pi}^E=1$, $\tau_1=0.3$, $\tau_2=-600$, $\epsilon=1$, $\mu=0.05$, $\sigma=0.03$, 研究通胀波动率 $\xi=0.08$ 时, 预期通胀率 ψ 对最优 GDP 水平的影响. 从图中可以看出, 随着预期通胀率 ψ 的增加, 最优 GDP 水平随之呈现非线性增长关系, 那么决定进入东道国市场时进行 FDI 的价值 $\tilde{V}_t^*$ 也随之增加. 而且含糊度越大, 最优 GDP 水平随通胀率 ψ 的增长趋势愈加明显. 然而含糊度的增加却对进行 FDI 的价值 V_t 产生了负面影响, 进而导

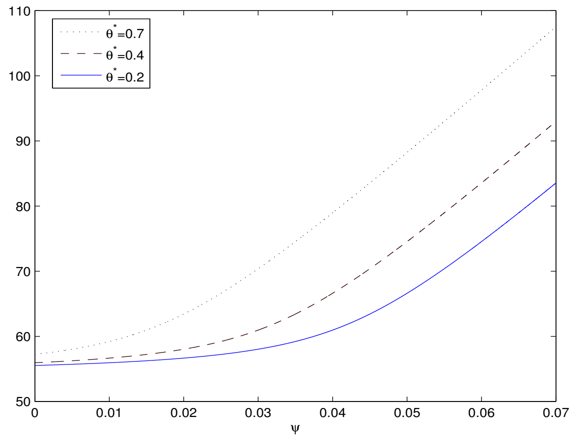

图 2: 在不同含糊度下, 预期通胀率 ψ 对最优 GDP 水平 $\tilde{Y}_t^*$ 的影响 (见 (3.9) 式)

致 FDI 价值减少, 从而也会影响到外国公司的跨国直接投资, 这就会阻碍东道国的经济发展, 所以东道国应该采取措施鼓励和吸引 FDI.

5 小结

由于各国在某个时期内都会存在一定程度的通货膨胀, 所以投资者不能忽视通货膨胀对资产配置的影响, 投资者应根据通货膨胀率的变化情况适时调整其资产组合, 以减少风险, 获得更大的收益. 本文研究了公司在含糊环境下带通胀的跨国投资决策问题, 考虑公司是选择出口, 还是跨国直接投资. 结合通胀因素, 利用随机分析方法, 推导出带有通胀因素的利润流的动力学方程. 并利用 Matlab 软件对结果进行了数值模拟, 得出预期通胀率、通胀波动率对最优 GDP 水平的影响. 所得模型更加符合实际, 为公司决策提供参考依据, 问题的研究具有较为重要的现实经济意义.

参 考 文 献

[1] Aizenman J, Marion N. The merits of horizontal versus vertiacal FDI in the presence of uncertainty[J]. J. Intern. Econ., 2004, 62: 125–148.

[2] Pennings E. How to maximize domestic benefits from foreign investment: The effect of irreversibility and uncertainty[J]. J. Econ. Dyn. Contr., 2005, 29: 873–889.

[3] Ellsberg D. Risk, ambiguity, and the savage axioms[J]. Quart. J. Econ., 1961, 75: 643–669.

[4] Gilboa I, Schmeidler D. Maxmin expected utility with non-unique prior [J]. J. Math. Econ., 1989, 18: 141–153.

[5] Nishimura K G, Ozaki H. Irreversible investment and Knightian uncertainty[J]. J. Econ. The., 2007, 136: 668–694.

[6] Asano T. Optimal tax policy and foreign direct investment under ambiguity[J]. J. Macroeconomics, 2010, 32: 185–200.

[7] Chen Z J, Epstein L G. Ambiguity, risk and asset returns in continuous time [J]. Econometrica, 2002, 70: 1403–1443.

[8] 赵果庆. 寻求我国 GDP 对 FDI 的最优依存度与 FDI 最优规模 — 基于 1980-2003 年我国 GDP 与 FDI 非线性动力系统的研究 [J]. 管理世界, 2006, (1): 57–66.

[9] 赵燕, 赵增耀. FDI 与经济增长：基于金融市场作用机制的研究 — 中美两国数据的实证检验 [J]. 世界经济研究, 2009, (2): 58–65.

[10] 廖利兵, 曹标. 企业出口与水平型 FDI 内生选择机制分析 [J]. 世界经济研究, 2013, (3): 66–72, 86–87.

[11] 费宇, 王江. FDI 对我国各地区经济增长的非线性效应分析 [J]. 统计研究, 2013, 30(4): 70–75.

[12] 杨林. 中国是否应该继续大量引进 FDI– 多重视角下 FDI 对中国经济的影响分析 [J]. 商业经济与管理, 2013, (5): 88–97.

[13] Fama E F, Schwert G W. Asset returns and inflation[J]. J. Finan. Econ., 1977, 5(2): 115–146.

[14] 戴国强, 张建华. 我国资产价格与通货膨胀的关系研究: 基于 ARDL 的技术分析 [J]. 国际金融研究, 2009, (11): 19–28.

[15] Fei W Y. Optimal consumption and portfolio under inflation and Markovian switching[J]. Stochastics, 2013, 85(2): 272–285.

[16] 费为银, 李淑娟. Knight 不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究 [J]. 工程数学学报, 2012, 29(6): 799–806.

[17] 梁勇, 费为银, 唐仕冰, 李帅. Knight 不确定及机制转换环境下带通胀的最优投资问题研究 [J]. 数学杂志, 2014, 34(2): 335–344.

[18] Blanchard O J. Output, the stock market, and interest rates [J]. Amer. Econ. Rev., 1981, 71: 132–143.

[19] Boyce W E, DiPrima R C. Elementary differential equations and boundary value problems [M]. New York: Wiley, 1986.

ON STUDY OF FOREIGN DIRECT INVESTMENT WITH INFLATION UNDER AMBIGUITY

FEI Wei-yin, GAO Gui-yun, LIANG Yong

(*School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China*)

Abstract: In this paper, we study foreign direct investment (FDI) problems by a foreign firm with inflation under ambiguity. By using Itô formula, we derive the dynamics of consumer-basket-price with inflation. Combining with the corporate tax needed to pay when the company makes transnational investment decisions, we give the value of the foreign direct investment. Under maximizing the value of foreign direct investment discounted by inflation, we analyze the optimal timing of foreign direct investment (irreversible) by a foreign firm. Then through the solution of HJB equation, we derive the optimal GDP level of switching from exporting to FDI under ambiguity. Finally, we carry on the numerical analysis and quantitatively analyze the influence of inflation on the company's foreign direct investment strategy.

Keywords: foreign direct investment (FDI); ambiguity; inflation; corporate tax; HJB equation

2010 MR Subject Classification: 60H30; 91G80