

具有非线性范数型源的反应扩散方程组解的爆破性质

钟光胜^{1,2}, 田立新²

(1. 南通大学理学院, 江苏 南通 226007)

(2. 江苏大学理学院非线性科学研究中心, 江苏 镇江 212013)

摘 要: 本文研究了一类带有非线性范数型源的反应扩散方程组 $u_t = \Delta u^m + a \|u^{p_1} v^{q_1}\|_\alpha^{r_1}$, $v_t = \Delta v^n + b \|v^{p_2} w^{q_2}\|_\beta^{r_2}$, $w_t = \Delta w^h + c \|w^{p_3} u^{q_3}\|_\gamma^{r_3}$ 在齐次 Dirichlet 边界条件下解的爆破问题. 利用上下解方法和构造辅助函数的技巧, 得到了方程组解的整体存在与爆破的准则, 将当前的一些研究成果推广到更复杂的情形.

关键词: 反应扩散方程组; 范数型源; 整体存在; 爆破

MR(2010) 主题分类号: 35K65; 35K61

中图分类号: O175.2

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2017)01-0129-09

1 引言

本文研究如下具有范数型源的反应扩散方程组解的爆破性质:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u^m + a \|u^{p_1} v^{q_1}\|_\alpha^{r_1}, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ v_t &= \Delta v^n + b \|v^{p_2} w^{q_2}\|_\beta^{r_2}, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ w_t &= \Delta w^h + c \|w^{p_3} u^{q_3}\|_\gamma^{r_3}, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) &= v(x, t) = w(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 Ω 是 $R^N (N \geq 1)$ 中一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, 常数 $m, n, h > 1, a, b, c > 0$, $\alpha, \beta, \gamma \geq 1, r_i > 0$ 及 $p_i \geq 0, q_i > 0 (i = 1, 2, 3)$, 初值函数 $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ 是 Ω 上的非负有界连续函数, 这里的范数

$$\|\cdot\|_\alpha^\alpha = \int_\Omega |\cdot|^\alpha dx.$$

问题 (1.1) 是很值得研究的, 因为它能够描述不同的物理现象, 例如生物种群的研究中, 可以用 u, v 及 w 来刻画同一种环境下, 三种不同的物种在生长过程的密度 (见文 [1–4] 及相应的文献); 它也能刻画混合物燃烧后的热传播过程和化学反应过程.

在过去的几十年里, 对于带有局部源和没有局部源的反应扩散方程组得到了很多数学工作者的研究. 例如, 在文 [5] 中, Deng 研究了下列带齐次 Dirichlet 边界条件的初边值问题:

$$u_t = \Delta u^m + u^\alpha v^p, v_t = \Delta v^n + u^q v^\beta, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (1.2)$$

*收稿日期: 2015-07-22

接收日期: 2015-10-19

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11171135; 51276081); 江苏省自然科学基金资助 (14KJA110001).

作者简介: 钟光胜 (1978–), 男, 湖南永州, 讲师, 主要研究方向: 偏微分方程.

他们证明了如果 $m > \alpha, n > \beta$ 及 $pq < (m - \alpha)(n - \beta)$, 则问题 (1.2) 的每一个非负解整体存在, 而如果 $m < \alpha$ 或 $n < \beta$ 或 $pq > (m - \alpha)(n - \beta)$, 则该问题既存在整体非负解, 也有爆破的非负解.

在相同的初边值条件下, Li 等人在文 [6] 中考虑了下列问题:

$$u_t = \Delta u + u^\alpha(x_0, t)v^p(x_0, t), v_t = \Delta v + u^q(x_0, t)v^\beta(x_0, t), x \in \Omega, t > 0, \quad (1.3)$$

作者给出了上述问题解 (u, v) 同时爆破的充分必要条件, 并得到了一致爆破模式和爆破率的精确估计.

对于具有非局部源项的问题, 其解的整体存在和有限时刻爆破行为也得到了相应的研究. 如文 [7] 中, Deng 等人研究了

$$u_t = \Delta u^m + a \|v\|_\alpha^p, v_t = \Delta v^n + b \|u\|_\beta^q, x \in \Omega, t > 0, \quad (1.4)$$

在齐次 Dirichlet 边界条件下, 他们证明了当 $pq < mn$ 时, 每一个非负解是整体存在的; 如果 $pq > mn$, 整体解与爆破解同时存在; 他们的结果表明 $p_c = pq - mn$ 是问题 (1.4) 的临界指标.

近年来, Kong 等人在文 [8] 中研究了如下的方程组

$$u_t = \Delta u + \int_\Omega u^m(x, t)v^n(x, t)dx, v_t = \Delta v + \int_\Omega v^p(x, t)u^q(x, t)dx, \quad (1.5)$$

作者建立了相应问题的解是整体存在和有限时刻爆破的条件.

关于非局部退化抛物方程的研究, 读者还可以查阅其他的相关文献 (如文 [9–12]).

受上述文献的启发, 以构造的技巧, 用更加简单的方法推广了前述文献的研究结果, 讨论问题 (1.1) 解的整体存在与爆破准则, 并得到如下结果.

定理 1.1 若下列条件之一成立, 那么问题 (1.1) 的解整体存在.

- (1) $m > p_1r_1, n > p_2r_2, h > p_3r_3$, 且 $(r_1q_1)(r_2q_2)(r_3q_3) < (m - r_1p_1)(n - r_2p_2)(h - r_3p_3)$;
- (2) $m \leq p_1r_1$ 或 $n \leq p_2r_2$ 或 $h \leq p_3r_3$ 或

$$m > p_1r_1, n > p_2r_2, h > p_3r_3, (r_1q_1)(r_2q_2)(r_3q_3) > (m - r_1p_1)(n - r_2p_2)(h - r_3p_3),$$

且初值 $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ 充分小;

- (3) $m > p_1r_1, n > p_2r_2, h > p_3r_3, (r_1q_1)(r_2q_2)(r_3q_3) = (m - r_1p_1)(n - r_2p_2)(h - r_3p_3)$,

且 a, b, c 充分小.

定理 1.2 若下列条件之一成立, 那么问题 (1.1) 的解在有限时刻爆破.

- (1) $m > p_1r_1, n > p_2r_2, h > p_3r_3$,

$$(r_1q_1)(r_2q_2)(r_3q_3) > (m - r_1p_1)(n - r_2p_2)(h - r_3p_3),$$

且初值 $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ 充分大;

- (2) $m \leq p_1r_1$ 或 $n \leq p_2r_2$ 或 $h \leq p_3r_3$, 且初值 $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ 充分大;

- (3) $m > p_1r_1, n > p_2r_2, h > p_3r_3$,

$$(r_1q_1)(r_2q_2)(r_3q_3) = (m - r_1p_1)(n - r_2p_2)(h - r_3p_3),$$

并且区域 Ω 包含一个充分大的球, 而初值 $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ 在 Ω 上为正的连续函数.

2 预备知识

在这里给出问题 (1.1) 的弱解的定义. 对任意的 $0 < T < \infty$, 设 $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$.

定义 2.1 称函数组 $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$ 是问题 (1.1) 在 Q_T 上的弱下解, 如果下列条件都成立:

- (1) $(u(x, t), v(x, t), w(x, t)) \in L^\infty(Q_T)$;
- (2) $u(x, t), v(x, t), w(x, t) \leq 0, (x, t) \in S_T, u(x, 0) \leq u_0(x), v(x, 0) \leq v_0(x), w(x, 0) \leq w_0(x), x \in \Omega$;
- (3)
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u(x, t)\psi_1(x, t) - u_0(x)\psi_1(x, 0))dx &\leq \int_0^t \int_{\Omega} (u\psi_{1s} + u^m \Delta \psi_1 + a \|u^{p_1} v^{q_1}\|_{\alpha}^{r_1} \psi_1) dx ds, \\ \int_{\Omega} (v(x, t)\psi_2(x, t) - v_0(x)\psi_2(x, 0))dx &\leq \int_0^t \int_{\Omega} (v\psi_{2s} + v^n \Delta \psi_2 + b \|v^{p_2} w^{q_2}\|_{\beta}^{r_2} \psi_2) dx ds, \\ \int_{\Omega} (w(x, t)\psi_3(x, t) - w_0(x)\psi_3(x, 0))dx &\leq \int_0^t \int_{\Omega} (w\psi_{3s} + w^n \Delta \psi_3 + c \|w^{p_3} u^{q_3}\|_{\gamma}^{r_3} \psi_3) dx ds, \end{aligned}$$

其中 $t \in [0, T]$, 且 ψ_1, ψ_2, ψ_3 属于函数族

$$\Psi \equiv \{\psi \in C(\overline{Q_T}); \psi_t, \Delta \psi \in C(Q_T) \cap L^2(Q_T); \psi \geq 0, \psi(x, t) |_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0\}.$$

类似的, 改变上式中所有不等号的方向可以得到弱上解的定义. 称 $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$ 是问题 (1.1) 的弱解, 如果它既是 (1.1) 的弱下解, 又是弱上解. 显然, 问题 (1.1) 的每个非负古典解都是定义 2.1 意义下的弱解.

类似于文 [8] 那样, 能论证问题 (1.1) 弱解的局部存在性和相应的强极值原理, 这里省略了, 而下列的比较原理成立.

引理 2.2 (比较原理) 设 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 与 $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ 分别是问题 (1.1) 在 $\overline{Q_T}$ 上的非负上、下解. 如果 $(\underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{w}_0) \leq (\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0)$ 或者存在常数 δ , 使得

$$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \geq \delta > 0 \quad \text{或} \quad \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \geq \delta > 0 \quad (2.1)$$

成立. 那么在 Q_T 上, $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) \leq (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$.

3 定理 1 的证明

由比较原理, 只需要对任意 $T > 0$, 构造出有界的正弱上解即可.

设 $\varphi(x)$ 是下列椭圆问题的解

$$-\Delta \varphi(x) = 1, \quad x \in \Omega; \quad \varphi(x) = 1, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.1)$$

记 $C = \max_{x \in \Omega} \varphi(x)$, 则 $1 \leq \varphi(x) \leq C$. 定义 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 为如下形式

$$\bar{u} = K^{l_1} \varphi^{\frac{1}{m}}(x), \quad \bar{v} = K^{l_2} \varphi^{\frac{1}{n}}(x), \quad \bar{w} = K^{l_3} \varphi^{\frac{1}{h}}(x), \quad (3.2)$$

其中 $l_1, l_2, l_3 > 0$, $K > 0$ 将在后面被确定. 显然, 对于任意 $T > 0$, $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 是有界的, 且 $\bar{u} \geq K^{l_1} > 0, \bar{v} \geq K^{l_2} > 0, \bar{w} \geq K^{l_3} > 0$. 通过一系列的计算, 可得

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_t - \Delta \bar{u}^m - a \|\bar{u}^{p_1} \bar{v}^{q_1}\|_{\alpha}^{r_1} &= K^{ml_1} - a \left\| K^{l_1 p_1} \varphi^{\frac{p_1}{m}} K^{l_2 q_1} \varphi^{\frac{q_1}{n}} \right\|_{\alpha}^{r_1} \\
 &\geq K^{ml_1} - a K^{r_1(l_1 p_1 + l_2 q_1)} C^{r_1(\frac{p_1}{m} + \frac{q_1}{n})} |\Omega|^{\frac{r_1}{\alpha}}, \\
 \bar{v}_t - \Delta \bar{v}^n - b \|\bar{v}^{p_2} \bar{w}^{q_2}\|_{\beta}^{r_2} &= K^{nl_2} - b \left\| K^{l_2 p_2} \varphi^{\frac{p_2}{n}} K^{l_3 q_2} \varphi^{\frac{q_2}{h}} \right\|_{\beta}^{r_2} \\
 &\geq K^{nl_2} - b K^{r_2(l_2 p_2 + l_3 q_2)} C^{r_2(\frac{p_2}{n} + \frac{q_2}{h})} |\Omega|^{\frac{r_2}{\beta}}, \\
 \bar{w}_t - \Delta \bar{w}^h - c \|\bar{w}^{p_3} \bar{u}^{q_3}\|_{\gamma}^{r_3} &= K^{hl_3} - c \left\| K^{l_3 p_3} \varphi^{\frac{p_3}{h}} K^{l_1 q_3} \varphi^{\frac{q_3}{m}} \right\|_{\gamma}^{r_3} \\
 &\geq K^{hl_3} - c K^{r_3(l_3 p_3 + l_1 q_3)} C^{r_3(\frac{p_3}{h} + \frac{q_3}{m})} |\Omega|^{\frac{r_3}{\gamma}}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

记

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (a C^{r_1(\frac{p_1}{m} + \frac{q_1}{n})} |\Omega|^{\frac{r_1}{\alpha}})^{1/(ml_1 - l_1 r_1 p_1 - l_2 r_1 q_1)}, \\
 C_2 &= (b C^{r_2(\frac{p_2}{n} + \frac{q_2}{h})} |\Omega|^{\frac{r_2}{\beta}})^{1/(nl_2 - l_2 r_2 p_2 - l_3 r_2 q_2)}, \\
 C_3 &= (c C^{r_3(\frac{p_3}{h} + \frac{q_3}{m})} |\Omega|^{\frac{r_3}{\gamma}})^{1/(hl_3 - l_3 r_3 p_3 - l_1 r_3 q_3)}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

(1) 若 $m > p_1 r_1, n > p_2 r_2, h > p_3 r_3, (r_1 q_1)(r_2 q_2)(r_3 q_3) < (m - r_1 p_1)(n - r_2 p_2)(h - r_3 p_3)$, 那么存在正常数 l_1, l_2 使得

$$\frac{r_1 q_1}{m - r_1 p_1} < \frac{l_1}{l_2} < \frac{(h - r_3 p_3)(n - r_2 p_2)}{(r_2 q_2)(r_3 q_3)}. \tag{3.5}$$

同时, 也存在正数 l_3 使得

$$\frac{l_3}{l_2} < \frac{n - r_2 p_2}{r_2 q_2}, \frac{l_1}{l_3} < \frac{h - r_3 p_3}{r_3 q_3}. \tag{3.6}$$

从而

$$r_1 q_1 l_2 < (m - r_1 p_1) l_1, \quad r_2 q_2 l_3 < (n - r_2 p_2) l_2, \quad r_3 q_3 l_1 < (h - r_3 p_3) l_3. \tag{3.7}$$

根据 (3.7) 式, 能选择充分大的 K 使得 $K \geq \max\{C_1, C_2, C_3\}$, 且

$$K^{l_1} \geq u_0(x), \quad K^{l_2} \geq v_0(x), \quad K^{l_3} \geq w_0(x). \tag{3.8}$$

根据 (3.3)–(3.8) 式, 那么由 (3.2) 式定义的 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 是问题 (1.1) 的正弱上解, 因此由比较原理知 $(u, v, w) \leq (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, 进而意味着 (u, v, w) 整体存在.

(2) 若 $m \leq p_1 r_1$ 或 $n \leq p_2 r_2$ 或 $h \leq p_3 r_3$ 或

$$m > p_1 r_1, n > p_2 r_2, h > p_3 r_3, (r_1 q_1)(r_2 q_2)(r_3 q_3) > (m - r_1 p_1)(n - r_2 p_2)(h - r_3 p_3),$$

那么存在三个正常数 l_1, l_2, l_3 使得

$$r_1 q_1 l_2 > (m - r_1 p_1) l_1, \quad r_2 q_2 l_3 > (n - r_2 p_2) l_2, \quad r_3 q_3 l_1 > (h - r_3 p_3) l_3. \tag{3.9}$$

那么能选择充分小的 K , 使得 $K \leq \min\{C_1, C_2, C_3\}$. 进一步, 假设 $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ 也是充分小, 并满足式 (3.8). 同样的, 由 (3.2) 式定义的 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 也是问题 (1.1) 的弱上解, 因此 (u, v, w) 整体存在.

(3) 若 $m > p_1 r_1, n > p_2 r_2, h > p_3 r_3$,

$$(r_1 q_1)(r_2 q_2)(r_3 q_3) = (m - r_1 p_1)(n - r_2 p_2)(h - r_3 p_3),$$

那么存在正常数 l_1, l_2, l_3 使得

$$\frac{r_1 q_1}{m - r_1 p_1} = \frac{l_1}{l_2}, \quad \frac{n - r_2 p_2}{r_2 q_2} = \frac{l_3}{l_2}, \quad \frac{h - r_3 p_3}{r_3 q_3} = \frac{l_1}{l_3}. \quad (3.10)$$

从而

$$r_1 q_1 l_2 = (m - r_1 p_1) l_1, \quad r_2 q_2 l_3 = (n - r_2 p_2) l_2, \quad r_3 q_3 l_1 = (h - r_3 p_3) l_3. \quad (3.11)$$

假定 a, b, c 充分小, 且满足

$$\begin{aligned} a &\leq (C^{r_1(\frac{p_1}{m} + \frac{q_1}{n})} |\Omega|^{\frac{r_1}{\alpha}})^{-1}, \\ b &\leq (C^{r_2(\frac{p_2}{n} + \frac{q_2}{h})} |\Omega|^{\frac{r_2}{\beta}})^{-1}, \\ c &\leq (C^{r_3(\frac{p_3}{h} + \frac{q_3}{m})} |\Omega|^{\frac{r_3}{\gamma}})^{-1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

另外, 可以选择充分大的 K 使得 (3.8) 式成立. 那么根据 (3.3), (3.8), (3.10)–(3.12) 式, 由 (3.2) 式定义的 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 也是问题 (1.1) 的弱上解. 根据比较原理 $(u, v, w) \leq (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$. 因此可以得到 (u, v, w) 是整体存在的. 定理 1 证毕.

4 定理 2 的证明

在本节将通过构造问题 (1.1) 的爆破弱下解来证明定理 2.

设 λ 和 $\phi(x)$ 是下列特征问题的第一特征值和相应的特征函数

$$-\Delta \phi(x) = \lambda \phi(x), \quad x \in \Omega; \quad \phi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (4.1)$$

显然 $\phi(x)$ 在 Ω 上可正则化成 $\phi(x) > 0$, 且 $\max_{\bar{\Omega}} \phi(x) = 1$. 在 $\partial\Omega$ 上, $\partial\phi/\partial n < 0$, 其中 n 为 $\partial\Omega$ 的外法线方向. 记 $d = \min_{x \in \bar{\Omega}} \phi(x)$.

定义 $\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t), \underline{w}(x, t)$ 如下

$$\underline{u}(x, t) = s^{l_1}(t) \phi^{\frac{1}{m}}(x), \quad \underline{v}(x, t) = s^{l_2}(t) \phi^{\frac{1}{n}}(x), \quad \underline{w}(x, t) = s^{l_3}(t) \phi^{\frac{1}{h}}(x), \quad (4.2)$$

其中 $s(t)$ 为初值问题

$$s'(t) = k s^\theta, \quad s(0) = s_0 > 0 \quad (4.3)$$

的解, 这里 $k, s_0 > 0, \theta > 1$ 待定. 显然 $s(t) \geq s_0$, 且在有限时刻无界, 而且

$$\underline{u} \geq d^{l_1} s_0^{\frac{1}{m}} > 0, \quad \underline{v} \geq d^{l_2} s_0^{\frac{1}{n}} > 0, \quad \underline{w} \geq d^{l_3} s_0^{\frac{1}{h}} > 0. \quad (4.4)$$

直接计算知

$$\begin{aligned}
 \Delta \underline{u}^m + a \|\underline{u}^{p_1} \underline{v}^{q_1}\|_{\alpha}^{r_1} &= -\lambda s^{ml_1} \phi + a s^{(l_1 p_1 + l_2 q_1) r_1} \left\| \phi^{\frac{p_1}{m} + \frac{q_1}{n}} \right\|_{\alpha}^{r_1} \\
 &= l_1 s^{l_1 - 1} \phi^{\frac{1}{m}} \left(-\frac{\lambda s^{ml_1 - l_1 + 1} \phi^{1 - \frac{1}{m}}}{l_1} + \frac{a c_1 \phi^{-\frac{1}{m}}}{l_1} s^{(l_1 p_1 + l_2 q_1) r_1 - l_1 + 1} \right) \\
 &\geq l_1 s^{l_1 - 1} \phi^{\frac{1}{m}} \frac{a c_1}{l_1} s^{ml_1 - l_1 + 1} \left(-\frac{\lambda}{a c_1} + s^{(l_1 p_1 + l_2 q_1) r_1 - ml_1} \right), \\
 \underline{u}_t &= l_1 s^{l_1 - 1} \phi^{\frac{1}{m}} s'(t).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

类似有

$$\begin{aligned}
 \Delta \underline{v}^n + b \|\underline{v}^{p_2} \underline{w}^{q_2}\|_{\beta}^{r_2} &= -\lambda s^{nl_2} \phi + b s^{(l_2 p_2 + l_3 q_2) r_2} \left\| \phi^{\frac{p_2}{n} + \frac{q_2}{h}} \right\|_{\beta}^{r_2} \\
 &\geq l_2 s^{l_2 - 1} \phi^{\frac{1}{n}} \frac{b c_2}{l_2} s^{nl_2 - l_2 + 1} \left(-\frac{\lambda}{b c_2} + s^{(l_2 p_2 + l_3 q_2) r_2 - nl_2} \right),
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{v}_t &= l_2 s^{l_2 - 1} \phi^{\frac{1}{n}} s'(t), \\
 \Delta \underline{w}^h + c \|\underline{w}^{p_3} \underline{u}^{q_3}\|_{\gamma}^{r_3} &= -\lambda s^{hl_3} \phi + c s^{(l_3 p_3 + l_1 q_3) r_3} \left\| \phi^{\frac{p_3}{h} + \frac{q_3}{m}} \right\|_{\gamma}^{r_3} \\
 &\geq l_3 s^{l_3 - 1} \phi^{\frac{1}{h}} \frac{c c_3}{l_3} s^{hl_3 - l_3 + 1} \left(-\frac{\lambda}{c c_3} + s^{(l_3 p_3 + l_1 q_3) r_3 - hl_3} \right), \\
 \underline{w}_t &= l_3 s^{l_3 - 1} \phi^{\frac{1}{h}} s'(t),
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中

$$c_1 = \left\| \phi^{\frac{p_1}{m} + \frac{q_1}{n}} \right\|_{\alpha}^{r_1}, \quad c_2 = \left\| \phi^{\frac{p_2}{n} + \frac{q_2}{h}} \right\|_{\beta}^{r_2}, \quad c_3 = \left\| \phi^{\frac{p_3}{h} + \frac{q_3}{m}} \right\|_{\gamma}^{r_3}. \tag{4.8}$$

(1) 如果 $m > p_1 r_1, n > p_2 r_2, h > p_3 r_3, (r_1 q_1)(r_2 q_2)(r_3 q_3) > (m - r_1 p_1)(n - r_2 p_2)(h - r_3 p_3)$, 那么存在正数 l_1, l_2, l_3 使得

$$r_1 q_1 l_2 > (m - r_1 p_1) l_1, \quad r_2 q_2 l_3 > (n - r_2 p_2) l_2, \quad r_3 q_3 l_1 > (h - r_3 p_3) l_3. \tag{4.9}$$

选取

$$\begin{aligned}
 k &= \min \left\{ \frac{a c_1}{l_1}, \frac{b c_2}{l_2}, \frac{c c_3}{l_3} \right\}, \\
 \theta &= \min \{ m l_1 - l_1 + 1, n l_2 - l_2 + 1, h l_3 - l_3 + 1 \} > 1, \\
 s_0 &= \max \left\{ \left(\frac{\lambda}{a c_1} + 1 \right)^{1/((l_1 p_1 + l_2 q_1) r_1 - m l_1)}, \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{\lambda}{b c_2} + 1 \right)^{1/((l_2 p_2 + l_3 q_2) r_2 - n l_2)}, \left(\frac{\lambda}{c c_3} + 1 \right)^{1/((l_3 p_3 + l_1 q_3) r_3 - h l_3)} \right\} > 1.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

假设 $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ 充分大, 并满足

$$u_0(x) \geq s_0^{l_1}, \quad v_0(x) \geq s_0^{l_2}, \quad w_0(x) \geq s_0^{l_3}. \tag{4.11}$$

那么根据 (4.3)–(4.11) 式, 由 (4.2) 式定义的 $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ 是问题 (1.1) 的弱下解. 由于 $s(t)$ 在有限时刻无界, 因此 $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ 在有限时刻爆破. 由比较原理知, $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) \leq (u, v, w)$; 这意味着 (u, v, w) 在有限时刻爆破.

(2) 若 $m \leq p_1 r_1$ 或 $n \leq p_2 r_2$ 或 $h \leq p_3 r_3$, 那么存在正常数 l_1, l_2, l_3 , 使得 (4.9) 式仍然成立, 因此可以用类似的方法证明结果, 在这儿省略掉.

(3) 下面考虑 $m > p_1 r_1, n > p_2 r_2, h > p_3 r_3$,

$$(r_1 q_1)(r_2 q_2)(r_3 q_3) = (m - r_1 p_1)(n - r_2 p_2)(h - r_3 p_3).$$

显然, 存在正常数 l_1, l_2, l_3 使得

$$r_1 q_1 l_2 = (m - r_1 p_1) l_1, \quad r_2 q_2 l_3 = (n - r_2 p_2) l_2, \quad r_3 q_3 l_1 = (h - r_3 p_3) l_3. \quad (4.12)$$

不失一般性, 假设 $0 \in \Omega$, 并设 $B_R(0) \subset \Omega$ 是一个半径为 R 的开球.

记 $\lambda_{B_R} > 0$ 与 $\phi_R(r)$ 是下列问题的第一特征值和相应的特征函数

$$-\phi''(r) - \frac{N-1}{r} \phi'(r) = \lambda \phi(r), \quad r \in (0, R); \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi(R) = 0. \quad (4.13)$$

在 B_R 中, 将 $\phi_R(r)$ 正则化成 $\phi_R(r) > 0$, 且 $\phi_R(0) = \max_{B_R} \phi_R(r) = 1$. 根据特征值及特征函数的性质 (设 $\tau = r/R$) 可知

$$\lambda_{B_R} = R^{-2} \lambda_{B_1}, \quad \phi_R(r) = \phi_1(r/R) = \phi_1(\tau),$$

这里 λ_{B_1} 与 $\phi_1(\tau)$ 是单位球 $B_1(0)$ 内的第一特征值问题的特征值和相应的标准特征函数, 且

$$\max_{B_1} \phi_1 = \phi_1(0) = \phi_R(0) = \max_{B_R} \phi_R = 1.$$

现在定义 $\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t), \underline{w}(x, t)$ 如下:

$$\underline{u}(x, t) = s^{l_1}(t) \phi_R^{\frac{1}{m}}(|x|), \quad \underline{v}(x, t) = s^{l_2}(t) \phi_R^{\frac{1}{n}}(|x|), \quad \underline{w}(x, t) = s^{l_3}(t) \phi_R^{\frac{1}{h}}(|x|), \quad (4.14)$$

其中 $s(t)$ 如式 (4.3) 的定义, $k, s_0 > 0, \theta > 1$ 待定. 那么, 类似于 (4.5)–(4.7) 式的计算可得

$$\underline{u}_t - \Delta \underline{u}^m - a \|\underline{u}^{p_1} \underline{v}^{q_1}\|_{\alpha}^{r_1} \leq l_1 s^{l_1-1} \phi_R^{\frac{1}{m}}(s'(t) - \frac{ac_1 - \lambda_{B_R}}{l_1} s^{ml_1-l_1+1}), \quad (4.15)$$

$$\underline{v}_t - \Delta \underline{v}^n + b \|\underline{v}^{p_2} \underline{w}^{q_2}\|_{\beta}^{r_2} \leq l_2 s^{l_2-1} \phi_R^{\frac{1}{n}}(s'(t) - \frac{bc_2 - \lambda_{B_R}}{l_2} s^{nl_2-l_2+1}), \quad (4.16)$$

$$\underline{w}_t - \Delta \underline{w}^h - c \|\underline{w}^{p_3} \underline{u}^{q_3}\|_{\gamma}^{r_3} \leq l_3 s^{l_3-1} \phi_R^{\frac{1}{h}}(s'(t) - \frac{cc_3 - \lambda_{B_R}}{l_3} s^{hl_3-l_3+1}), \quad (4.17)$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &= \left\| \phi_R^{\frac{p_1}{m} + \frac{q_1}{n}} \right\|_{\alpha}^{r_1} = \left(\int_{B_R} \phi_R^{\alpha(\frac{p_1}{m} + \frac{q_1}{n})}(|x|) dx \right)^{\frac{r_1}{\alpha}} \\ &= R^{\frac{Nr_1}{\alpha}} \int_{B_1} \phi_1^{\alpha(\frac{p_1}{m} + \frac{q_1}{n})}(|y|) dy)^{\frac{r_1}{\alpha}} \leq K_1 R^{\frac{Nr_1}{\alpha}}, \\ c_2 &= \left\| \phi_R^{\frac{p_2}{n} + \frac{q_2}{h}} \right\|_{\beta}^{r_2} \leq K_2 R^{\frac{Nr_2}{\beta}}, \\ c_3 &= \left\| \phi_R^{\frac{p_3}{h} + \frac{q_3}{m}} \right\|_{\gamma}^{r_3} \leq K_3 R^{\frac{Nr_3}{\gamma}}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

这里 K_1, K_2, K_3 是与 R 无关的常数. 由于 $\lambda_{B_R} = R^{-2}\lambda_{B_1}$, 可以假设球 B_R 的半径 R 充分大, 并使得

$$\lambda_{B_R} < \min\{ac_1, bc_2, cc_3\}, \quad (4.19)$$

因此

$$\sigma_1 \equiv \frac{ac_1 - \lambda_{B_R}}{l_1} > 0, \quad \sigma_2 \equiv \frac{bc_2}{l_2} - \lambda_{B_R} > 0, \quad \sigma_3 \equiv \frac{cc_3}{l_3} - \lambda_{B_R} > 0. \quad (4.20)$$

记

$$\theta_1 = ml_1 - l_1 + 1, \quad \theta_2 = nl_2 - l_2 + 1, \quad \theta_3 = hl_3 - l_3 + 1.$$

根据 $m, n, h > 1$ 得 $\theta_1, \theta_2, \theta_3 > 1$. 因为 u_0, v_0, w_0 在 Ω 内是正的连续函数, 所以可以选取充分小的 $s_0 > 0$, 在球 $B_R(0)$ 内满足

$$u_0 \geq s_0^{l_1} \phi_R^{\frac{1}{m}}, \quad v_0 \geq s_0^{l_2} \phi_R^{\frac{1}{n}}, \quad w_0 \geq s_0^{l_3} \phi_R^{\frac{1}{h}}. \quad (4.21)$$

最后, 选择 θ, k 使得

$$1 < \theta < \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \quad 0 < k < \min\{\sigma_1 s_0^{\theta_1 - \theta}, \sigma_2 s_0^{\theta_2 - \theta}, \sigma_3 s_0^{\theta_3 - \theta}\}. \quad (4.22)$$

从而根据 (4.3) 式, 得到

$$s(t) \geq s(0) = s_0 > \max\left\{\left(\frac{k}{\sigma_1}\right)^{1/(\theta_1 - \theta)}, \left(\frac{k}{\sigma_2}\right)^{1/(\theta_2 - \theta)}, \left(\frac{k}{\sigma_3}\right)^{1/(\theta_3 - \theta)}\right\}. \quad (4.23)$$

即

$$ks^\theta(t) \leq \sigma_1 s^{\theta_1}(t), \quad ks^\theta(t) \leq \sigma_2 s^{\theta_2}(t), \quad ks^\theta(t) \leq \sigma_3 s^{\theta_3}(t). \quad (4.24)$$

根据 (4.15)–(4.24) 式知, 由 (4.14) 式定义的 $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ 是问题 (1.1) 在 $B_R(0)$ 内正的弱下解, 它在有限时刻爆破. 从而 (u, v, w) 在充分大的 Ω 上爆破. 定理 2 证毕.

参 考 文 献

- [1] Anderson J R, Deng K. Global existence for degenerate parabolic equations with a non-local forcing[J]. Math. Meth. Appl. Sci., 1997, 20: 1069–1087.
- [2] Friedman A, McLeod B. Blow-up of solutions of nonlinear degenerate parabolic equations[J]. Arch. Ration. Mech. Appl. Sci., 1987, 96: 55–80.
- [3] Cantrell R S, Cosner C. Diffusive logistic equations with indefinite weights: Population models in disrupted environments II[J]. SIAM J. Math. Anal., 1991, 22: 1043–1064.
- [4] Souplet P. Blow-up in nonlocal reaction-diffusion equations[J]. SIAM J. Math. Anal., 1998, 29: 1301–1334.
- [5] Deng W B. Global existence and finite time blow up for a degenerate reaction-diffusion system[J]. Nonl. Anal., 2005, 60: 977–991.
- [6] Li H L, Wang M X. Uniform blow-up profiles and boundary layer for a parabolic system with localized nonlinear reaction terms[J]. Science in China Ser. A Math., 2005, 48(2): 185–197.
- [7] Deng W B, Li Y X, Xie, CH. Blow-up and global existence for a nonlocal degenerate parabolic system[J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, 277(1): 199–217.

- [8] Kong L H, Wang X W. Global existence and blow-up of solutions to a parabolic system with nonlocal sources and boundaries[J]. Sci. China Ser. A, 2007, 50: 1251–1266.
- [9] Chen Y J. Blow-up and global existence for a nonlocal degenerate quasilinear parabolic system[J]. Acta Math. Sci. (Series A), 2010, 30(2) : 386–396.
- [10] Zhong G S. Global solution and blow-up profiles for a nonlinear degenerate parabolic equation with nonlocal source[J]. Inter. J. Nonl. Sci., 2011, 12(2): 214–226.
- [11] Lu H H, Wang M X. Global solutions and blow-up problems for a nonlinear degenerate parabolic system coupled via nonlocal sources[J]. J. Math. Anal. Appl., 2007, 333(2): 984–1007.
- [12] Zheng S N, Wang L D. Blow-up rate and profile for a degenerate parabolic system coupled via nonlocal sources[J]. Comput. Math. Appl., 2006, 52: 1387–1402.
- [13] 高景璐, 韩玉柱, 高文杰. 一类具交错扩散的强耦合退化抛物方程组解的整体存在与非存在性 [J]. 数学杂志, 2014, 34(5): 947–958.

BLOW-UP PROPERTIES FOR A REACTION-DIFFUSION SYSTEM WITH NONLINEAR NORM-TYPE SOURCES

ZHONG Guang-sheng^{1,2}, TIAN Li-xin²

(1.School of Science, Nantong University, Nantong 226007, China)

(2.Nonlinear Scientific Research Center, Faculty of Science, Jiangsu University,
Zhenjiang 212013, China)

Abstract: In this paper, we study the blow-up problems for a class of reaction-diffusion system with nonlinear norm-type sources: $u_t = \Delta u^m + a \|u^{p_1} v^{q_1}\|_{\alpha}^{r_1}$, $v_t = \Delta v^n + b \|v^{p_2} w^{q_2}\|_{\beta}^{r_2}$, $w_t = \Delta w^h + c \|w^{p_3} u^{q_3}\|_{\gamma}^{r_3}$ subject to homogeneous Dirichlet conditions. By using upper-lower solution method and constructing auxiliary functions' techniques, we obtain the criteria for global existence or finite time blow-up, which extend some results of the current research to more complex situations.

Keywords: reaction-diffusion system; norm-type sources ; global existence; blow up

2010 MR Subject Classification: 35K65; 35K61