Vol. 37 (2017)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Bernstein-Durrmeyer 算子拟中插式在 Orlicz 空间中的逼近

韩领兄 [1], 吴嘎日迪 [2], 高会双 [1]
(1. 内蒙古民族大学数学学院, 内蒙古 通辽 028043)
(2. 内蒙古师范大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010022)

摘 要: 本文在 Orlicz 空间中研究了 Bernstein-Durrmeyer 算子拟中插式 $B_n^{(2r-1)}(f,x)$ 逼近性质. 利用 $2r$ 阶 Ditzian-Totik 模与 K - 泛函的等价性, Jensen 不等式, Hölder 不等式, Berens-Lorentz 引理得到了逼近的正, 逆和等价定理, 从而推广了 Bernstein-Durrmeyer 算子拟中插式 $B_n^{(2r-1)}(f,x)$ 在 L_P 空间的逼近结果.

关键词: Bernstein-Durrmeyer 算子; Ditzian-Totik 模; 正逆定理; Orlicz 空间
MR(2010) **主题分类号**: 41A17; 41A27; 41A35 **中图分类号**: O147.41
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)03-0488-09

1 引言及主要结果

首先介绍 Orlicz 空间. 基于 N 函数 $M(u)$ 是幂函数 $|u|^p(p>1)$ 的推广, Orlicz 空间是熟知的 $L_p(p>1)$ 空间的推广.

定义 1.1 [1] 称定义在 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 上的实值函数 $M(u)$ 为 N 函数, 假设它具有下列性质

(1) $M(u)$ 为偶的连续凸函数且 $M(0)=0$;

(2) 当 $u>0$ 时 $M(u)>0$;

(3) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{M(u)}{u}=0,\quad \lim\limits_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u}=\infty.$

对于给定的 N 函数 $M(u)$, 其余 N 函数记为 $N(v)$.

定义 1.2 [1] 称 N 函数 $M(u)$ 满足 $\triangle_2$ 条件 (简记为 $M(u)\in\triangle_2$) 是指存在 $k>0$, $u_0>0$, 使当 $u\geq u_0$ 时, 有

$$M(2u)\leq kM(u).$$

由 N 函数 $M(u)$ 生成的 Orlicz 类 $L_M[0,1]$ 是指满足 $\rho(u,M)=\displaystyle\int_0^1 M(u(x))dx<+\infty$ 的可测函数 $u(x)$ 的全体.

定义 1.3 [1] Orlicz 空间 $L_M^*[0,1]$ 是指有限的 Orlicz 范数

$$\|u\|_M=\sup_{\rho(v,N)\leq 1}\Big|\int_0^1 u(x)v(x)dx\Big|$$

*收稿日期: 2016-08-17 接收日期: 2016-09-22
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11161033; 11461052); 内蒙古自治区自然科学基金资助 (2014MS0107; 2016MS0118); 内蒙古民族大学科学研究项目资助 (NMDYB15087).
作者简介: 韩领兄 (1980–), 女, 蒙古族, 内蒙古通辽, 副教授, 主要研究方向: 函数逼近论.

的可测函数 $u(x)$ 的全体.

Orlicz 空间还赋予与 Orlicz 范数等价的 Luxemburg 范数

$$\begin{aligned}&\|u\|_{(M)}=\inf_{\lambda>0}\{\lambda:\int_0^1 M(|\frac{u(x)}{\lambda}|)dx\leq 1\},\\ &\|u\|_{(M)}\leq\|u\|_M\leq 2\|u\|_{(M)}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

对于 $f\in L_M^*[0,1]$, r 阶带权函数 $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$ 的 Ditzian-Totik 连续模 $\omega_{r,\varphi}(f,t)_M$, K - 泛函 $K_{r,\varphi}(f,t^r)_M$ 和修正的 K - 泛函 $\bar{K}_{r,\varphi}(f,t^r)_M$ 的定义 [2] 为

$$\begin{aligned}&\omega_{r,\varphi}(f,t)_M=\sup_{0<h\leq t}\|\triangle_{h\varphi(x)}^r f(x)\|_M,\\ &K_{r,\varphi}(f,t^r)_M=\inf_{g^{(r-1)}\in A.C._{loc}}\Big\{\|f-g\|_M+t^r\|\varphi^r g^{(r)}\|_M\Big\},\\ &\bar{K}_{r,\varphi}(f,t^r)_M=\inf_{g^{(r-1)}\in A.C._{loc}}\Big\{\|f-g\|_M+t^r\|\varphi^r g^{(r)}\|_M+t^{2r}\|g^{(r)}\|_M\Big\},\end{aligned}$$

其中 $\triangle_{h\varphi(x)}^r f(x)=\sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}f\Big(x+(\frac{r}{2}-k)h\varphi(x)\Big)$.

连续模 $\omega_{r,\varphi}(f,t)_M$ 与两个 K - 泛函等价 [2] 的, 即存在常数 $k_1,k_2>0$, 使得

$$\begin{aligned}&k_1^{-1}\omega_{r,\varphi}(f,t)_M\leq K_{r,\varphi}(f,t^r)_M\leq k_1\omega_{r,\varphi}(f,t)_M,\\ &k_2^{-1}\omega_{r,\varphi}(f,t)_M\leq \bar{K}_{r,\varphi}(f,t^r)_M\leq k_2\omega_{r,\varphi}(f,t)_M.\end{aligned}$$

对于 $f\in L_M^*[0,1]$, Bernstein-Durrmeyer 算子的定义为

$$B_n(f,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)\int_0^1 P_{n,k}(t)f(t)dt,$$

其中 $P_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

关于 Bernstein 型算子的文章不少 [3−8]. Bernstein-Durrmeyer 算子在 $L_p[0,1]$ 空间的逼近速度 [6] 有 $\|B_nf-f\|_p=O(n^{-\alpha})\Leftrightarrow\omega_{2,\varphi}(f,t)_p=O(t^{2\alpha})$. 为了获得更快的逼近速度, Ditian 和 Ivanov 在文 [6] 中用 $B_n(f)$ 的线性组合构造了一个算子 $O_n(f)$, 并证明了对于 $r>\alpha$, 有

$$\|O_n(f)-f\|_p=O(n^{-\alpha})\Leftrightarrow\omega_{2r,\varphi}(f,t)_p=O(t^{2\alpha}).$$

最近, Sablonnière 在文 [9] 中引进了一类所谓的拟中插式算子. 设 Π_n 表示次数至多为 n 的多项式空间, 若 $\mathbb{B}_n$ 和 $\mathbb{A}_n=\mathbb{B}_n^{-1}$ 是 Π_n 中的线性自同构算子, 并且能够表示成带有多项式系数的微分算子形式 $\mathbb{B}_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\beta_k^nD^k$ 和 $\mathbb{A}_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k^nD^k$, 这里 $D=\frac{d}{dx}$, $D^0=id$, 则一类拟中插式算子被如下定义

$$\mathbb{B}_n^{(r)}=\mathbb{A}_n^{(r)}\circ\mathbb{B}_n, 0\leq r\leq n,$$

这里 $\mathbb{A}_n^{(r)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k^nD^k$. 通常在 Π_n 上 $\mathbb{B}_n^{(0)}=\mathbb{B}_n$, $\mathbb{B}_n^{(n)}=id$. 进而还有当 $0\leq r\leq n$ 时, 对于所有的 $P\in\Pi_n$, 有 $\mathbb{B}_n^{(r)}P=P$.

对于 $f \in L_M^*[0,1]$, Bernstein-Durrmeyer 算子拟中插式为

$$B_n^{(k)}(f,x) = \mathbb{A}_n^{(k)} \circ B_n = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^n D^j B_n(f,x) := \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^n B_{n,j}(f,x), 0 \le k \le n,$$

其中 $B_{n,j} = D^j B_n$. 显然 $B_n^{(0)} = B_n$, $B_n^{(n)} = id$, 且对于 $P \in \Pi_n$, $0 \le k \le n$, 有 $B_n^{(k)} P = P$.

郭顺生等在文 [7] 中给出了 Bernstein-Durrmeyer 算子拟中插式在 $C[0,1]$ 中逼近的等价定理. 在文 [8] 中给出了 Bernstein-Durrmeyer 算子拟中插式在 $L_p[0,1]$ 中逼近的等价定理. 本文得到的主要结果有

定理 1.1 (正定理) 设 $f \in L_M^*[0,1]$, $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $n \ge 2r-1$, $r \in \mathbf{N}$, $N(v) \in \Delta_2$, 则

$$\|B_n^{(2r-1)}(f) - f\|_M \le C\omega_{2r,\varphi}(f, \frac{1}{\sqrt{n}})_M.$$

本文中 C 表示与 f 与 n 无关的正常数, 在不同的地方, 它的值有所不同.

定理 1.2 (逆定理) 对于 $f \in L_M^*[0,1]$, $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $n \ge 4r$, $r \in \mathbf{N}$, $0 < \alpha < r$, 有

$$\|B_n^{(2r-1)}(f) - f\|_M = O(n^{-\alpha}) \Rightarrow \omega_{2r,\varphi}(f,t)_M = O(t^{2\alpha}).$$

定理 1.3 (等价定理) 对于 $f \in L_M^*[0,1]$, $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $n \ge 4r$, $r \in \mathbf{N}$, $0 < \alpha < r$, $N(v) \in \Delta_2$, 有

$$\|B_n^{(2r-1)}(f) - f\|_M = O(n^{-\alpha}) \Leftrightarrow \omega_{2r,\varphi}(f,t)_M = O(t^{2\alpha}).$$

2 正定理的证明

本文中 $\delta_n(x) = \max\{\varphi(x), \frac{1}{\sqrt{n}}\}$, $E_n = [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$, $E_n^c = [0, \frac{1}{n}) \cup (1-\frac{1}{n}, 1]$. 为了证明主要结果, 下面给出一些引理.

引理 2.1 [10] 对于 $f \in L_M^*[0,1]$, $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$, 有

$$B_{n,j}(f,x) = \frac{(n+1)!n!}{(n-j)!(n+j)!} \sum_{k=0}^{n-j} P_{n-j,k}(x) \int_0^1 P_{n+j,k+j}(t) f^{(j)}(t)dt, \tag{2.1}$$

$$|P_{n,k}^{(j)}(x)| \le C \sum_{i=0}^{j} (\frac{\sqrt{n}}{\varphi(x)})^{j+i} |\frac{k}{n} - x|^i P_{n,k}(x), x \in E_n, \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |\frac{k}{n} - x|^i P_{n,k}(x) \le C n^{-\frac{i}{2}} \varphi^i(x), x \in E_n, \tag{2.3}$$

$$B_n((t-x)^{2i}, x) \le C n^{-i} (\varphi^2(x) + \frac{1}{n})^i, x \in [0,1]. \tag{2.4}$$

引理 2.2 对于 $f \in L_M^*[0,1]$, $r, s \in \mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\}$, 有

$$\|\delta_n^s \varphi^{2r} D^{2r+s}(B_n(f))\|_M \le C n^{\frac{s}{2}} \|\varphi^{2r} f^{(2r)}\|_M,$$

其中当 $r\neq 0$ 时, $f\in W_{\varphi}^{2r}(L_M^*[0,1])$; 当 $r=0$ 时, $f\in L_M^*[0,1]$.

证 当 $x\in E_n^c$ 时 $\delta_n(x)\sim n^{-\frac{1}{2}}$. 由 (1.1), (2.1) 式和 Jensen 不等式得到

$$\begin{aligned}
&\|\delta_n^s(x)\varphi^{2r}(x)D^{2r+s}(B_n(f,x))\|_{M,E_n^c}\\
=\ &\|\delta_n^s(x)\varphi^{2r}(x)\frac{(n+1)!n!}{(n+2r)!(n-2r)!}\sum_{k=0}^{n-2r}P_{n-2r,k}^{(s)}(x)\int_0^1 P_{n+2r,k+2r}(t)f^{(2r)}(t)dt\|_{M,E_n^c}\\
\leq\ &2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_{E_n^c}M\Big(\frac{1}{\lambda}\delta_n^s(x)\varphi^{2r}(x)\sum_{k=0}^{n-2r}\frac{(n-2r)!}{(n-2r-s)!}P_{n-2r-s,k}(x)\sum_{i=0}^{s}(n+1)\\
&\int_0^1 P_{n+2r,k+2r+i}(t)\varphi^{-2r}(t)|\varphi^{2r}(t)f^{(2r)}(t)|dt\Big)dx\leq 1\Big\}\\
\leq\ &2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_{E_n^c}M\Big(\frac{Cn^{\frac{s}{2}}}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-2r-s}P_{n-s,k+r}(x)(n+1)\\
&\int_0^1 P_{n,k+r+i}(t)|\varphi^{2r}(t)f^{(2r)}(t)|dt\Big)dx\leq 1\Big\}\\
\leq\ &2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_{E_n^c}\sum_{k=0}^{n-s}P_{n-s,k}(x)(n+1)\int_0^1 P_{n,k+i}(t)M\Big(\frac{Cn^{\frac{s}{2}}}{\lambda}|\varphi^{2r}(t)f^{(2r)}(t)|\Big)dtdx\leq 1\Big\}\\
\leq\ &2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_0^1 M\Big(\frac{Cn^{\frac{s}{2}}}{\lambda}|\varphi^{2r}(t)f^{(2r)}(t)|\Big)dt\leq 1\Big\}\\
\leq\ &Cn^{\frac{s}{2}}\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_{(M)}\leq Cn^{\frac{s}{2}}\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_M.
\end{aligned}$$

当 $x\in E_n$ 时, $\delta_n(x)\sim\varphi(x)$. 由引理 2.1 得

$$\begin{aligned}
&|\delta_n^s(x)\varphi^{2r}(x)D^{2r+s}(B_n(f,x))|\\
\leq\ &C\varphi^s(x)\sum_{k=0}^{n-2r}\sum_{i=0}^{s}\Big(\frac{\sqrt{n-2r}}{\varphi(x)}\Big)^{s+i}\Big|\frac{k}{n-2r}-x\Big|^iP_{n,k+r}(x)(n+1)\int_0^1 P_{n,k+r}(t)\varphi^{2r}(t)\\
&|f^{(2r)}(t)|dt\\
\leq\ &C\sum_{i=0}^{s}n^{\frac{s+i}{2}}\varphi^{-i}(x)\Big(\sum_{k=0}^{n-2r}\Big|\frac{k+r}{n}-x\Big|^iP_{n,k+r}(x)+\sum_{k=0}^{n-2r}\Big|\frac{k}{n-2r}-\frac{k+r}{n}\Big|^iP_{n,k+r}(x)\Big)\\
&(n+1)\int_0^1 P_{n,k+r}(t)\varphi^{2r}(t)|f^{(2r)}(t)|dt\\
\leq\ &C\sum_{i=0}^{s}n^{\frac{s+i}{2}}\varphi^{-i}(x)\sum_{k=0}^{n-2r}\Big|\frac{k+r}{n}-x\Big|^iP_{n,k+r}(x)(n+1)\int_0^1 P_{n,k+r}(t)\varphi^{2r}(t)|f^{(2r)}(t)|dt\\
&+C\sum_{i=0}^{s}n^{\frac{s+i}{2}}\varphi^{-i}(x)\sum_{k=0}^{n-2r}\Big|\frac{k}{n-2r}-\frac{k+r}{n}\Big|^iP_{n,k+r}(x)(n+1)\int_0^1 P_{n,k+r}(t)\varphi^{2r}(t)|f^{(2r)}(t)|dt\\
:=\ &I_1+I_2.
\end{aligned}$$

从而 $\|\delta_n^s\varphi^{2r}D^{2r+s}(B_n(f))\|_{M,E_n}\leq\|I_1\|_{M,E_n}+\|I_2\|_{M,E_n}$. $\|I_1\|_{M,E_n}$ 和 $\|I_2\|_{M,E_n}$ 估计类似, 所以只证 $\|I_1\|_{M,E_n}$.

由 (1.1) 式及 Jensen 不等式得到

$$
\begin{aligned}
&\|I_1\|_{M,E_n}\\
\le\ & 2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_{E_n}M\Big(\frac{C}{\lambda}\sum_{i=0}^{s}n^{\frac{s+i}{2}}\varphi^{-i}(x)\sum_{k=0}^{n-2r}\Big|\frac{k+r}{n}-x\Big|^{i}P_{n,k+r}(x)(n+1)\\
&\int_0^1 P_{n,k+r}(t)\varphi^{2r}(t)|f^{(2r)}(t)|dt\Big)dx\le 1\Big\}\\
\le\ & 2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_{E_n}M\Big(\frac{C}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}\Big|\frac{k}{n}-x\Big|^{i}P_{n,k}(x)n^{\frac{s+i}{2}}\varphi^{-i}(x)(n+1)\\
&\int_0^1 P_{n,k}(t)\varphi^{2r}(t)|f^{(2r)}(t)|dt\Big)dx\le 1\Big\}\\
\le\ & 2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_{E_n}\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)M\Big(\sum_{i=0}^{s}\Big|\frac{k}{n}-x\Big|^{i}n^{\frac{i}{2}}\varphi^{-i}(x)(n+1)\\
&\int_0^1 P_{n,k}(t)n^{\frac{s}{2}}\varphi^{2r}(t)\frac{C}{\lambda}|f^{(2r)}(t)|dt\Big)dx\le 1\Big\}\\
\le\ & 2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_0^1\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)(n+1)\int_0^1 P_{n,k}(t)M\Big(\frac{C}{\lambda}n^{\frac{s}{2}}\varphi^{2r}(t)|f^{(2r)}(t)|\Big)dtdx\le 1\Big\}\\
\le\ & Cn^{\frac{s}{2}}\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_{(M)}\le Cn^{\frac{s}{2}}\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_{M}.
\end{aligned}
$$

引理 2.3 [8] 对于 $j\ge 0$, $x\in[0,1]$, 有 $|\alpha_j^n(x)|\le Cn^{-\frac{j}{2}}\delta_n^j(x)$.

引理 2.4 对于 $f\in L_M^*[0,1]$, $r\in\mathbf{N_0}$, 有 $\|B_n^{(r)}(f)\|_M\le C\|f\|_M$.

证 由引理 2.2, 引理 2.3 得到

$$
\begin{aligned}
\|B_n^{(r)}(f)\|_M &= \|\sum_{j=0}^{r}\alpha_j^n(x)D^jB_n(f)\|_M\le\sum_{j=0}^{r}\|\alpha_j^n(x)D^jB_n(f)\|_M\\
&\le Cn^{-\frac{j}{2}}\sum_{j=0}^{r}\|\delta_n^j(x)D^jB_n(f)\|_M\le C\|f\|_M.
\end{aligned}
$$

引理 2.5 [11] 若 N 函数 $N(v)$ 满足 Δ_2 条件, 则函数 $f\in L_M^*[0,1]$ 的 Hardy-Littlewood 极大函数

$$G(x)=\sup_{0\le t\le 1,t\ne x}\frac{1}{t-x}\int_x^t|f(u)|du,$$

$G(x)\in L_M^*[0,1]$ 且 $\|G\|_M\le C\|f\|_M$.

定理 1.1 的证明 由 $\bar{K}_{2r,\varphi}(f,t^{2r})_M$ 的定义, 可以选取 $g(t)=g_n(t)$, 使得

$$\|f-g\|_M+n^{-r}\|\varphi^{2r}g^{(2r)}\|_M+n^{-2r}\|g^{(2r)}\|_M\le 2\bar{K}_{2r,\varphi}(f,n^{-r})_M. \tag{2.5}$$

对于多项式 $P\in\Pi_k$, $B_n^{(k)}P=P$, 及引理 2.4, 有

$$
\begin{aligned}
&\|B_n^{(2r-1)}(f)-f\|_M\le C\|f-g\|_M+\|B_n^{(2r-1)}(g)-g\|_M\\
=\ & C\|f-g\|_M+\|B_n^{(2r-1)}(R_{2r}(g,\cdot,x),x)\|_M:=C\|f-g\|_M+J,
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

其中 $R_{2r}(g,\cdot,x)=\frac{1}{(2r-1)!}\int_x^t(t-u)^{2r-1}g^{(2r)}(u)du$ 为 g 的泰勒展开式的积分型余项.

下面只需估计 J.

$$J=\|\sum_{j=0}^{2r-1}\alpha_j^n(x)D^jB_n(R_{2r}(g,\cdot,x),x)\|_M\le\sum_{j=0}^{2r-1}J_j,\tag{2.7}$$

其中 $J_j=\|\alpha_j^n(x)D^jB_n(R_{2r}(g,\cdot,x),x)\|_M$,

$$\begin{aligned}J_j&\le\|\alpha_j^n(x)D^jB_n(R_{2r}(g,\cdot,x),x)\|_{M,E_n}+\|\alpha_j^n(x)D^jB_n(R_{2r}(g,\cdot,x),x)\|_{M,E_n^c}\\&:=J_{j_1}+J_{j_2}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

先估计 J_{j_1}. 由引理 2.3, (1.1), (2.2) 式及不等式 (当 u 在 t 和 x 之间时) $\frac{|t-u|}{\delta_n^2(u)}\le\frac{|t-x|}{\delta_n^2(x)}$, 得到

$$\begin{aligned}J_{j_1}&\le2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_{E_n}M\Big(\frac{1}{\lambda}\Big|\alpha_j^n(x)\sum_{k=0}^nP_{n,k}^{(j)}(x)(n+1)\int_0^1P_{n,k}(t)\frac{1}{(2r-1)!}\\&\qquad\int_x^t(t-u)^{2r-1}g^{(2r)}(u)dudt\Big|\Big)dx\le1\Big\}\\&\le2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_{E_n}M\Big(\frac{C}{\lambda}\Big|n^{-\frac{j}{2}}\varphi^j(x)\sum_{k=0}^n\sum_{i=0}^j\Big(\frac{\sqrt{n}}{\varphi(x)}\Big)^{j+i}\Big|\frac{k}{n}-x\Big|^iP_{n,k}(x)(n+1)\\&\qquad\int_0^1P_{n,k}(t)\frac{(t-x)^{2r}}{\delta_n^{2r}(x)}dtG(x)\Big|\Big)dx\le1\Big\}.\end{aligned}$$

由 Hölder 不等式, (2.3), (2.4) 式, 得

$$\Big|\sum_{i=0}^jn^{\frac{i}{2}}\varphi^{-i}(x)\delta_n^{-2r}(x)\sum_{k=0}^nP_{n,k}(x)\Big|\frac{k}{n}-x\Big|^i(n+1)\int_0^1P_{n,k}(t)(t-x)^{2r}dt\Big|\le Cn^{-r}.$$

从而由 (1.1) 式及引理 2.5, 得到

$$\begin{aligned}J_{j_1}&\le Cn^{-r}\|G\|_{(M)}\le Cn^{-r}\|G\|_M\le Cn^{-r}\|\delta_n^{2r}g^{(2r)}\|_M\\&\le C(n^{-r}\|\varphi^{2r}g^{(2r)}\|_M+n^{-2r}\|g^{(2r)}\|_M).\end{aligned}\tag{2.9}$$

现在估计 J_{j_2}. 由引理 2.3, (1.1), (2.1) 式及 $\delta_n(x)\sim n^{-\frac{1}{2}},x\in E_n^c$, 得

$$\begin{aligned}J_{j_2}&\le2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_{E_n^c}M\Big(\frac{1}{\lambda}\alpha_j^n(x)\frac{n!}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{n-j}P_{n-j,k}(x)(n+1)\int_0^1\sum_{i=0}^j(-1)^{j-i}\binom{j}{i}P_{n,k+i}(t)\\&\qquad\frac{1}{(2r-1)!}\int_x^t(t-u)^{2r-1}g^{(2r)}(u)dudt\Big|\Big)dx\le1\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad 2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_{E_n^c} M\Big(\frac{C}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-j}P_{n-j,k}(x)(n+1)\int_0^1\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}P_{n,k+i}(t)(t-x)^{2r}dtG(x)\delta_n^{-2r}(x)\Big)\\
&\qquad dx\leq 1\Big\}\\
&= \quad \inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_{E_n^c} M\Big(\frac{C}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-j}P_{n-j,k}(x)(n+1)\int_0^1\frac{\binom{n}{k+i}}{\binom{n-j}{k}}P_{n-j,k}(t)t^i(1-t)^{j-i}(t-x)^{2r}dtG(x)\\
&\qquad \delta_n^{-2r}(x)\Big)dx\leq 1\Big\}.
\end{aligned}$$

令 $K=\frac{\binom{n}{k+i}}{\binom{n-j}{k}}$, 利用 Hölder 不等式两次和 Beta 函数, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-j}P_{n-j,k}(x)(n+1)\int_0^1\frac{\binom{n}{k+i}}{\binom{n-j}{k}}P_{n-j,k}(t)t^i(1-t)^{j-i}(t-x)^{2r}dt\delta_n^{-2r}(x)\\
\leq\ &\Big(\sum_{k=0}^{n-j}P_{n-j,k}(x)(n+1)\int_0^1K^2t^{2i}(1-t)^{2(j-i)}P_{n-j,k}(t)dt\Big)^2\cdot\Big(\sum_{k=0}^{n-j}P_{n-j,k}(x)(n+1)\\
&\int_0^1P_{n-j,k}(t)(t-x)^{4r}dt)^{\frac12}\delta_n^{-2r}(x)\Big)\\
\leq\ &Cn^{-r}(\varphi^2(x)+\frac{1}{n})^r\delta_n^{-2r}(x)\leq Cn^{-r}.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
J_{j_2}\ &\leq\ Cn^{-r}\|\delta_n^{2r}g^{(2r)}\|_{(M)}\leq Cn^{-r}\|\delta_n^{2r}g^{(2r)}\|_M\\
&\leq\ C(n^{-r}\|\varphi^{2r}g^{(2r)}\|_M+n^{-2r}\|g^{(2r)}\|_M).
\end{aligned}\tag{2.10}$$

由 (2.8), (2.9), (2.10) 式知

$$J_j\leq C(n^{-r}\|\varphi^{2r}g^{(2r)}\|_M+n^{-2r}\|g^{(2r)}\|_M).\tag{2.11}$$

再由 (2.5)–(2.7), (2.11) 式及修正的 K - 泛函与连续模的等价性得

$$\begin{aligned}
&\|B_n^{(2r-1)}(f)-f\|_M\leq C(\|f-g\|_M+n^{-r}\|\varphi^{2r}g^{(2r)}\|_M+n^{-2r}\|g^{(2r)}\|_M)\\
\leq\ &C\omega_{2r,\varphi}(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_M.
\end{aligned}$$

从而正定理得证.

3 逆定理的证明

先给出几个引理.

引理 3.1 [8] $j\geq 0$, $r\leq j$, 有 $|D^r\alpha_j^n(x)|\leq Cn^{-\frac{j-r}{2}}\delta_n^{j-r}(x), x\in[0,1]$.

引理 3.2 对于 $n\geq 4r$, $r\in\mathbf{N}$ 且 $r\geq 2$, 有

$$\|\varphi^{2r}D^{2r}B_n^{(2r-1)}(f)\|_M\leq Cn^r\|f\|_M, f\in L_M^*[0,1],\tag{3.1}$$

$$\|\varphi^{2r}D^{2r}B_n^{(2r-1)}(f)\|_M\leq C\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_M, f\in W_\varphi^{2r}(L_M^*[0,1]).\tag{3.2}$$

证　先证 (3.1) 式. 由引理 2.2 ($r=0$) 和引理 3.1 得

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi^{2r}D^{2r}B_n^{(2r-1)}(f)\|_M = \|\varphi^{2r}\sum_{j=0}^{2r-1}\sum_{i=0}^{j}\binom{2r}{i}D^i\alpha_j^n(x)D^{j+2r-i}B_n(f)\|_M \\
\le\ & C\sum_{j=0}^{2r-1}\sum_{i=0}^{j}\|\delta_n^{2r}(x)n^{-\frac{j-i}{2}}\delta_n^{j-i}(x)D^{j+2r-i}B_n(f)\|_M \le Cn^r\|f\|_M.
\end{aligned}
$$

再证 (3.2) 式. 由引理 2.2, 引理 3.1 得

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi^{2r}D^{2r}B_n^{(2r-1)}(f)\|_M = \|\varphi^{2r}\sum_{j=0}^{2r-1}\sum_{i=0}^{j}\binom{2r}{i}D^i\alpha_j^n(x)D^{j+2r-i}B_n(f)\|_M \\
\le\ & C\sum_{j=0}^{2r-1}\sum_{i=0}^{j}n^{-\frac{j-i}{2}}\|\varphi^{2r}(x)\delta_n^{j-i}(x)D^{j+2r-i}B_n(f)\|_M \le C\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_M.
\end{aligned}
$$

定理 1.2 的证明　由 K - 泛函的定义和引理 3.2 得

$$
\begin{aligned}
K_{2r,\varphi}(f,t^{2r})_M &\le \|f-B_n^{(2r-1)}(f)\|_M + t^{2r}\|\varphi^{2r}D^{2r}B_n^{(2r-1)}(f)\|_M \\
&\le C[n^{-\alpha}+t^{2r}n^rK_{2r,\varphi}(f,n^{-r})_M] \\
&= C\Big[(n^{-\frac{1}{2}})^{2\alpha}+\Big(\frac{t}{n^{-\frac{1}{2}}}\Big)^{2r}K_{2r,\varphi}(f,(n^{-\frac{1}{2}})^{2r})_M\Big].
\end{aligned}
$$

由 Berens-Lorentz 引理 [10] 知对 $0<\alpha<r$, 有 $K_{2r,\varphi}(f,t^{2r})_M = O(t^{2\alpha})$. 从而由 K - 泛函与连续模的等价性知 $\omega_{2r,\varphi}(f,t)_M = O(t^{2\alpha})$.

由定理 1.1 和定理 1.2 得到定理 1.3.

参 考 文 献

[1] 吴从炘, 王挺辅. 奥尔里奇空间及其应用 [M]. 哈尔滨: 黑龙江科技出版社, 1983.

[2] 汪和平. Orlicz 空间上的多项式逼近 [D]. 北京: 北京师范大学, 1993.

[3] 赵德钧. 一类 Bernstein 型算子加权逼近 [J]. 数学杂志, 2000, 20(3): 293–299.

[4] 刘清国, 刘军. Bernstein-Sheffer 算子的逼近等价定理 [J]. 数学杂志, 2003, 23(2): 253–256.

[5] 李翠香, 任孟霞. Bernstein-Kantorovich 算子的迭代布尔和的逼近性质 [J]. 数学杂志, 2007, 27(1): 105–110.

[6] Ditzian Z, Ivanov K. Bernstein-type operators and their derivatives[J]. J. Approx. The., 1989, 56: 72–90.

[7] 郭顺生, 张更生, 齐秋兰, 刘丽霞. Bernstein-Durrmeyer 算子拟中插式的逼近 [J]. 数学学报, 2005, 48(4): 681–692.

[8] Duan Liqin, Cuixiang. The global approximation by left-Bernstein-Durrmeyer quasi-interpolants in $L_p[0,1]$[J]. Anal. The. Appl., 2004, 20(3): 242–251.

[9] Sablonnière P. Representation of quasi-interplants as differential operators and applications[J]. Intern. Ser. Numer. Math., 1999, 132: 233–252.

[10] Ditzian Z, Totik V. Moduli of smoothness[M]. New York: Springer-Verlag, 1987.

[11] Lorentz G G. On the theory of spaces Λ[J]. Pacific J. Math., 1951, 1: 411–429.

APPROXIMATION BY BERNSTEIN-DURRMEYER QUASI-INTERPOLANTS IN ORLICZ SPACES

HAN Ling-xiong[1], WU Ga-ri-di[2], GAO Hui-shuang[1]

(*1.College of Mathematics, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao 028043, China*)

(*2.College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China*)

Abstract: In the present paper, we will study the approximation property of the Bernstein-Durrmeyer quasi-interpolants $B_n^{(2r-1)}(f,x)$ in Orlicz space. By using the $2r$-th Ditzian-Totik modulus of smoothness, Jensen inequality, Hölder inequality and Berens-Lorentz lemma, we obtain the direct, inverse and equivalence theorems, which generalize the approximation results of the Bernstein-Durrmeyer quasi-interpolants $B_n^{(2r-1)}(f,x)$ in L_P space.

Keywords: Bernstein-Durrmeyer operators; Ditzian-Totik modulus; direct inverse theorem; Orlicz space

2010 MR Subject Classification: 41A17; 41A27; 41A35