

关于曲率积分不等式的注记

马 磊¹, 曾春娜²

(1. 广东石油化工学院高州师范学院数学系, 广东 茂名 525200)

(2. 重庆师范大学数学学院, 重庆 400047)

摘 要: 本文主要研究平面卵形线的曲率积分不等式. 利用积分几何中凸集的支持函数以及外平行集的性质, 得到了 Gage 等周不等式与曲率的熵不等式的一个积分几何的简化证明; 进一步地, 我们得到了一个新的关于曲率积分的不等式.

关键词: 曲率; Gage 等周不等式; 熵不等式; 支持函数

MR(2010) 主题分类号: 52A10

中图分类号: O186.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)05-0925-06

1 引言

1980's 前后, Gage 在 [1] 中证明了一个涉及平面凸曲线的曲率积分的不等式, 即:

(Gage 等周不等式) 欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上闭凸曲线 Γ 所围成的区域 D 的面积 A , 周长 L 满足不等式

$$\int_{\Gamma} \kappa^2 ds \geq \frac{\pi L}{A}, \quad (1.1)$$

其中 κ 为 Γ 的曲率, 等号成立当且仅当 Γ 为圆.

不等式 (1.1) 称为 Gage 等周不等式, 并且 Gage 还给出了 Jacobowitz 骨形非凸曲线的例子, 来说明该不等式对非凸曲线不成立.

在 20 世纪末, Green-Osher 给出了一系列关于曲率积分的等周不等式 (参见文献 [3]).

$$\int_{\Gamma} \kappa^3 ds \geq \frac{\pi L^2 - 2\pi^2 A}{A^2}; \quad (1.2)$$

$$\int_{\Gamma} \kappa^4 ds \geq \frac{\pi L^3 - 3\pi^2 AL}{A^3}; \quad (1.3)$$

$$\int_{\Gamma} \kappa \ln(\kappa) ds + \pi \ln\left(\frac{A}{\pi}\right) \geq 0. \quad (1.4)$$

其中, L , A 分别为平面卵形线 Γ 的周长及它所围成的面积, 等号成立当且仅当 Γ 为圆. 不等式 (1.4) 通常称为曲率的熵不等式.

几何不等式可以分为内在型几何不等式 (即关于体积、面积、弧长、Guass 曲率等内在不变量以及这些不变量积分不等式) 和外在型几何不等式 (即关于平均曲率等外在不变量以

*收稿日期: 2012-08-14

接收日期: 2013-04-11

基金项目: 重庆师范大学基金项目资助 (12XLB026).

作者简介: 马磊 (1982-), 男, 河南鹿邑, 助讲, 主要研究方向: 积分几何与凸几何分析.

及积分不等式)(参见文献 [8]). 值得注意的是: 经典的等周不等式以及 Bonnesen 型不等式与域 D 的表面积 A , 体积 V , 直径 D , 最大内接球半径 r , 及最小外接球半径 R 等内蕴不变量有关. 但是我们对外在型的几何不等式却知之甚少. Ros 不等式 (参见文献 [14]) 是目前已知的几个与内在型不变量和外在型不变量有关的混合型几何不等式之一. 最近, 周家足教授等已将其推广到了平面和高维的情形 (参见文献 [7, 8]). 而 Gage 不等式作为与外蕴不变量 κ 有关不等式, 对人们理解平面曲线缩短流以及研究平面曲线的其他演化问题起着重要作用 (参见文献 [2, 4]). 因此, 研究平面曲线曲率积分有着十分重要的意义, 也越来越受到数学家的关注 (参见文献 [6, 9]).

本文主要利用积分几何与凸几何分析中凸集的支持函数以及外平行集的性质讨论不等式 (1.1)、(1.3)、(1.4) 之间的关系, 得到了 Gage 等周不等式以及曲率的熵不等式的一个简化证明; 进一步地, 我们得到了一个新的关于曲率积分的不等式 定理 3.5.

2 支持函数与外平行曲线的性质

设 C 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中闭的凸曲线, 其曲率为 κ , 周长为 L , 所围面积为 A . 若记 $h = h(\theta)$ 为 C 的支持函数 ($h(\theta)$ 是以 2π 为周期的周期函数), 则 (参见文献 [10, 11])

$$\kappa = \frac{1}{h + h''}, \quad (2.1)$$

$$L = \int_0^{2\pi} h d\theta = \int_0^{2\pi} h + h'' d\theta, \quad (2.2)$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h^2 - h'^2) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(h + h'') d\theta. \quad (2.3)$$

若欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上简单闭曲线的曲率 κ 处处大于 0, 则称此曲线为卵形线.

设 D 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中一凸集. 以 D 的每一点为圆心、以 t 为半径作圆, 这些圆之并集称为 D 的距离为 t 的外平行集, 记为 D_t . 其边界 ∂D_t 称为 ∂D 的外平行曲线. 外平行曲线 ∂D_t 也可以看作是这一族圆的包络: 圆的半径为 t 圆心在 ∂D 上流动. 特别的当 $t = 0$ 时 D_t 就是 D .

若凸集 D 的支持函数为 $p(\theta)$, 则外平行集 D_t 的支持函数为 $p(\theta) + t$, 且有下列性质 (参见 [3, 12]):

$$\begin{aligned} L_t &= \int_0^{2\pi} (p + t) d\theta = \int_0^{2\pi} p d\theta + t \int_0^{2\pi} d\theta = L + 2\pi t, \\ A_t &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p + t)(p + t + p'') d\theta = A + tL + \pi t^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中 L_t 、 A_t 分别为 D_t 的周长与面积.

设 κ , κ_t 分别为 ∂D 和 ∂D_t 的曲率, 且 κ 处处不为 0 (即 ∂D 为卵形线), 则

$$\frac{1}{\kappa_t} = \frac{1}{\kappa} + t, \quad \kappa_t = \frac{\kappa}{1 + t\kappa}. \quad (2.5)$$

由 (2.5) 式及卵形线的定义可知, 卵形线的外平行线仍为卵形线. 因此 (参见文献 [12]):

$$\begin{aligned} \frac{dL_t}{dt} &= 2\pi, & \frac{dA_t}{dt} &= L_t, & \frac{d\kappa_t}{dt} &= -\kappa_t^2, \\ L^2 - 4\pi A &= L_t^2 - 4\pi A_t. \end{aligned}$$

3 曲率积分不等式

首先, 我们有下列引理:

引理 3.1 ^[3] 欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中曲率为 k , 周长为 L , 所围面积为 A 的卵形线 Γ 满足下列不等式:

$$\int_{\Gamma} \kappa^3 ds \geq \frac{\pi L^2 - 2\pi^2 A}{A^2}, \quad (3.1)$$

等号成立当且仅当 Γ 为圆.

定理 3.2 (见文献 [1, 3, 5], Gage 等周不等式) 欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中曲率为 k , 周长为 L , 所围面积为 A 的卵形线 Γ 满足下列不等式:

$$\int_{\Gamma} \kappa^2 ds \geq \frac{\pi L}{A}, \quad (3.2)$$

等号成立当且仅当 Γ 为圆.

证 设 Γ_t 为卵形线 Γ 的外平行曲线, κ_t, L_t, A_t 分别为 Γ_t 的曲率, 周长及所围面积. 令

$$F(t) = \int_{\Gamma_t} \kappa_t^2 ds_t - \frac{\pi L_t}{A_t}.$$

由 (2.1), (2.2), (2.3), (3.1) 式以及外平行集的性质, 则下式成立

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\Gamma_t} \kappa_t^2 ds_t - \frac{\pi L_t}{A_t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^{2\pi} \kappa_t d\theta - \frac{\pi L_t}{A_t} \right) \\ &= - \int_0^{2\pi} \kappa_t d\theta + \frac{\pi L_t^2 - 2\pi^2 A_t}{A_t^2} = - \int_{\Gamma_t} \kappa_t^3 ds_t + \frac{\pi L_t^2 - 2\pi^2 A_t}{A_t^2} \leq 0. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Gamma_t} \kappa_t^2 ds_t - \frac{\pi L_t}{A_t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{2\pi} \kappa_t d\theta - \frac{\pi L_t}{A_t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\kappa}{1 + t\kappa} d\theta - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi L + 2\pi^2 t}{A + tL + \pi t^2} = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

因此, 对于任意的 $t \geq 0$, 都有 $F(t) \geq 0$.

根据引理 3.1, $\frac{dF}{dt} = 0$ 当且仅当 Γ 为圆, 又因为 $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$. 因此, $F(t) = 0$ 当且仅当 Γ 为圆.

特别地, 当 $t = 0$ 时,

$$F(0) = \int_{\Gamma} \kappa^2 ds - \frac{\pi L}{A} \geq 0,$$

即

$$\int_{\Gamma} \kappa^2 ds \geq \frac{\pi L}{A}.$$

等号成立当且仅当 Γ 为圆.

定理 3.3 (见文献 [3], 曲率的熵不等式) 欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中曲率为 k , 周长为 L , 所围面积为 A 的卵形线 Γ 满足下列不等式:

$$\int_{\Gamma} \kappa \ln(\kappa) ds + \pi \ln\left(\frac{A}{\pi}\right) \geq 0, \quad (3.3)$$

等号成立当且仅当 Γ 为圆.

证 设 Γ_t 为卵形线 Γ 的外平行曲线, κ_t , L_t , A_t 分别为 Γ_t 的曲率、周长及所围面积. 令

$$G(t) = \int_{\Gamma_t} \kappa_t \ln(\kappa_t) ds_t + \pi \ln\left(\frac{A_t}{\pi}\right).$$

由 (2.1), (2.2), (2.3) 式, Gage 等周不等式 (3.2) 以及外平行集的性质, 则下式成立:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\int_{\Gamma_t} \kappa_t \ln(\kappa_t) ds_t + \pi \ln\left(\frac{A_t}{\pi}\right) \right] = \frac{d}{dt} \left[\int_0^{2\pi} \ln(\kappa_t) d\theta + \pi \ln\left(\frac{A_t}{\pi}\right) \right] \\ &= - \int_0^{2\pi} \kappa_t d\theta + \frac{\pi L_t}{A_t} = - \int_{\Gamma_t} \kappa_t^2 ds + \frac{\pi L_t}{A_t} \leq 0. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_{\Gamma_t} \kappa_t \ln(\kappa_t) ds_t + \pi \ln\left(\frac{A_t}{\pi}\right) \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{2\pi} \ln(\kappa_t) d\theta + \pi \ln\left(\frac{A_t}{\pi}\right) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{\kappa}{1+t\kappa} \sqrt{\frac{A+tL+\pi t^2}{\pi}}\right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

因此, 对于任意的 $t \geq 0$, 都有 $G(t) \geq 0$.

根据定理 3.2, $\frac{dG}{dt} = 0$ 当且仅当 Γ 为圆, 又因为 $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = 0$. 因此, $G(t) = 0$ 当且仅当 Γ 为圆.

特别地, 当 $t = 0$ 时,

$$G(0) = \int_{\Gamma} \kappa \ln(\kappa) ds + \pi \ln\left(\frac{A}{\pi}\right) \geq 0.$$

等号成立当且仅当 Γ 为圆.

由定理 3.3 和经典的等周不等式 $L^2 - 4\pi A \geq 0$, 我们立即得到:

推论 3.4 设欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中卵形线 Γ 的周长为 L , 曲率为 κ , 则

$$\int_{\Gamma} \kappa \ln(\kappa) ds + 2\pi \ln\left(\frac{L}{2\pi}\right) \geq 0, \quad (3.4)$$

等号成立当且仅当 Γ 为圆.

根据推论 3.4, 得到

定理 3.5 设欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中卵形线 Γ 的周长为 L , 曲率为 κ , 则

$$\int_{\Gamma} \ln(\kappa) ds + L \ln \left(\frac{L}{2\pi} \right) \leq 0, \quad (3.5)$$

等号成立当且仅当 Γ 为圆.

证 设 Γ_t 为卵形线 Γ 的外平行曲线, κ_t , L_t , A_t 分别为 Γ_t 的曲率、周长及所围面积. 令

$$H(t) = \int_{\Gamma_t} \ln(\kappa_t) ds_t + L_t \ln \left(\frac{L_t}{2\pi} \right).$$

由 (2.1), (2.2), (2.3) 式, 推论 3.4 以及外平行集的性质, 则下式成立

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\int_{\Gamma_t} \ln(\kappa_t) ds_t + L_t \ln \left(\frac{L_t}{2\pi} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left[\int_{\Gamma_t} \frac{\ln(\kappa_t)}{\kappa_t} d\theta + L_t \ln \left(\frac{L_t}{2\pi} \right) \right] \\ &= \int_{\Gamma_t} \kappa_t \ln(\kappa_t) ds_t + 2\pi \ln \left(\frac{L_t}{2\pi} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

又

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_{\Gamma_t} \ln(\kappa_t) ds + L_t \ln \left(\frac{L_t}{2\pi} \right) \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_t} \ln \left(\frac{\kappa L + 2\pi \kappa t}{2\pi + 2\pi \kappa t} \right) ds_t = 0.$$

因此, 对于任意的 $t \geq 0$, 都有 $H(t) \geq 0$.

根据推论 3.4, $\frac{dH}{dt} = 0$ 当且仅当 Γ 为圆, 又因为 $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = 0$. 因此, $H(t) = 0$ 当且仅当 Γ 为圆.

特别地, 当 $t = 0$ 时,

$$H(0) = \int_{\Gamma} \ln(\kappa) ds + L \ln \left(\frac{L}{2\pi} \right) \leq 0,$$

等号成立当且仅当 Γ 为圆.

由定理 3.5 和经典的等周不等式 $L^2 - 4\pi A \geq 0$, 立即得到:

推论 3.6 设欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上卵形线 Γ 的周长为 L , 曲率为 κ , 则

$$\int_{\Gamma} \ln(\kappa) ds + \frac{L}{2} \ln \left(\frac{A}{\pi} \right) \leq 0,$$

等号成立当且仅当 Γ 为圆.

推论 3.7 设欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上卵形线 Γ 的周长为 L , 曲率为 κ , 则

$$\int_{\Gamma} \ln(\kappa) ds + \frac{A}{\pi} \ln \left(\frac{A}{\pi} \right) \leq 0,$$

等号成立当且仅当 Γ 为圆.

参 考 文 献

- [1] Gage M. An isoperimetric inequality with applications to curve shortening [J]. Duke Math. J., 1983, 50: 1225–1229.
- [2] Gage M, Li Y. Evolving plane curves by curvature in relative geometries II [J]. Duke Math. J., 1994, 75(1): 79–98.
- [3] Green M, Osher S. Steiner polynomials, wulff flows, and some new isoperimetric inequalities for convex plane curves [J]. Asian. J. math., 1999, 3(3): 659–676.
- [4] Pan Shengliang, Yang Junna. On a non-local perimeter-preserving curve evolution problem for convex plane curves [J]. Manuscripta Math, 2008, 4(127): 469–484.
- [5] 潘生亮, 唐学远, 汪小玉. Gage 等周不等式的加强形式 [J]. 数学年刊, 2008, 29A(3): 301–306.
- [6] Escudero C, Reventós A, Solanes G. Focal sets in two-dimensional space forms [J]. Pacific J. Math., 2007, 233(2): 309–320.
- [7] Zhou Jiazuo. New curvature inequalities for curves [J]. Inter. J. of Math., comp. Sci. & Appl. 2007, 1(1/2): 145–147.
- [8] Zhou Jiazuo, Jiang Deshuo, Li Ming, Chen Fangwei. On Ros' theorem for hypersurfaces [J]. Acta. Math. Sinica, Chinese Series, 2009, 6(52): 1075–1084.
- [9] 周家足, 任德麟. 从积分几何观点看几何不等式 [J]. 数学物理学报, 2010, 30(5): 1322–1339.
- [10] 任德麟. 积分几何引论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.
- [11] Santalo L. Integral geometry and geometric probability[M]. Addison Wesley Publishing Company, 1976.
- [12] Carmo Do. Differential geometry of curves and surfaces[M]. Englewood: Prentice-Hall, Inc. 1976.
- [13] Osserman R. Curvature in the eighties[J]. Amer. Math. Monthly., 1990, 97(8): 731–756.
- [14] Ros A. Compact hypersurfaces with constant scalar and a congruence theorem[J]. J. Differential Geom., 1988, 27: 215–220.

SOME NOTES ON CURVATURE INTEGRAL INEQUALITIES

MA Lei¹, ZENG Chun-na²

(1. Dept. of Math., Gaozhou Normal College, Guangdong University of Petrochemical Technology,
Maoming 525200, China)

(2. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper we investigate the curvature integral inequalities. Using the properties of support functions of convex set and the outer parallel set in integral geometry, we give a simplified proof of the Gage-isoperimetric inequality and the entropy inequality for curvature. Finally, we obtain a new integral inequality for curvature.

Keywords: curvature; the Gage-isoperimetric inequality; entropy inequality; support function.

2010 MR Subject Classification: 52A10