Vol. 34 (2014)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

半平面内无限级 Dirichlet 级数的正规增长性

徐洪焱 [1]，易才凤 [2]

(1. 景德镇陶瓷学院信息工程学院, 江西 景德镇 333403)

(2. 江西师范大学数信学院, 江西 南昌 330022)

摘 要: 本文研究了半平面内无穷级 Dirichlet 级数的正规增长性问题. 利用型函数的方法, 获得了关于无穷 X 级的正规增长性的几个等价定理, 推广了已有的结果.

关 键 词: Dirichlet 级数; 无限级; 正规增长性

MR(2010) **主题分类号**: 30B50 **中图分类号**: O174.55

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2014)05-0916-09

1 引言及主要结果

设 Dirichlet 级数

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{\lambda_n s}, \tag{1.1}$$

其中 $\{a_n\}$ 是复数列, $s=\sigma+it$ (σ, t 是实变量), 满足

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots\uparrow+\infty, \tag{1.2}$$

及

$$\liminf_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=h>0, \tag{1.3}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log|a_n|}{\lambda_n}=0. \tag{1.4}$$

根据 (1.3) 式以及文献 [7, 引理 3.1.1] 的推导知

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=E<+\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\lambda_n}=0. \tag{1.5}$$

级数 (1.1) 的收敛横坐标及绝对收敛横坐标都是零, 那么和函数 $f(s)$ 在左半平面内解析.

记 D 为级数 (1.1) 满足条件 (1.2)–(1.4) 在 $\mathrm{Re}s<0$ 内解析的和函数 $f(s)$ 全体.

定义 1.1 若 $f(s)\in D$, 那么 $f(s)$ 的增长级 ρ 定义为 $\rho=\limsup\limits_{\sigma\to0^-}\frac{\log\log M(\sigma,f)}{-\log(-\sigma)}$, 其中 $M(\sigma,f)=\sup\limits_{-\infty<t<+\infty}|f(\sigma+it)|$ 为 $f(s)$ 的最大模.

*收稿日期: 2012-09-04 接收日期: 2013-01-18

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11171170; 61202313); 江西省自然科学基金资助 (2010GQS0119; 2010GQS0103; 20122BAB201016).

作者简介: 徐洪焱 (1980–), 男, 江西乐平, 讲师, 主要研究方向: 复分析及其应用.

当 $\rho=0, 0<\rho<+\infty, \rho=+\infty$ 时, 级数 (1.1) 分别称为零级, 有限级和无限级 Dirichlet 级数. 关于零级, 有限级, 无限级 Dirichlet 级数已有不少结果 [1−7,10−11]. 为了能更好地比较两个无限级 Dirichlet 级数的增长性, 作者在文 [8] 中引入 β - 级 (本文记 X - 级) 的定义讨论了半平面内解析的无限级 Dirichlet 级数的增长性, 得到如下结果:

定理 A 若 $f(s)\in D$ 并具有 X - 级 ρ_X, 则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{X(\lambda_n)}{\log\lambda_n-\log^+\log|a_n|}=\rho_X=\limsup_{\sigma\to0^-}\frac{X(\log M(\sigma,f))}{-\log(-\sigma)}.$$

半平面内解析的无限级 Dirichlet 级数的 X 级的定义如下:

定义 1.2 若 $f(s)\in D$ 以及 $X\in\Im$, 那么 $f(s)$ 的 X - 级 ρ_X 定义为

$$\rho_X=\limsup_{\sigma\to0^-}\frac{X(\log M(\sigma,f))}{-\log(-\sigma)},$$

其中 $M(\sigma,f)=\sup\limits_{-\infty<t<+\infty}|f(\sigma+it)|$ 为 $f(s)$ 的最大模. 当 $\rho_X=0, 0<\rho_X<+\infty, \rho_X=+\infty$ 时分别称 $f(s)$ 为零 X 级, 有限 X 级以及无限 X 级 Dirichlet 级数.

注 1.1 $\Im$ 为所有满足下列条件的函数 $X(x)$ 构成的集合:

(i) $X(x)$ 为定义在 $[0,\infty)$ 上, 严格递增, 可微的正函数, 并随着 $x\to\infty$ 而趋于 ∞;

(ii) 当 $x\to\infty$ 时, 有 $xX'(x)=o(1)$.

注 1.2 显然, $\log_p x\in\Im, p\geq2$, 因此 p 级只是 X 级的一种特殊形式. 另外, X 级在某种意义上比 p 级更宽泛, 更精确. 事实上, 若函数 $Q(x)$ 的 p 级为无穷且 $p+1$ 级为零, 我们能够找到一函数 $X(x)$ 使得 $Q(x)$ 的 X - 级却为非零有限. 例如, 令 $Q(x)=\exp_{p+1}\{(t\log x)^{1/d}\}$, $X(x)=(\log_p x)^d$, 其中 $t>1, 0<d<1$. 显然,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\log_p\log Q(x)}{\log x}=\infty,\quad \limsup_{x\to\infty}\frac{\log_{p+1}\log Q(x)}{\log x}=0.$$

然而 $\limsup\limits_{x\to\infty}\frac{X(\log Q(x))}{\log x}=t$.

对于 $\rho_X=\infty$ 的 Dirichlet 级数, 如何更精确刻化它们的增长性呢? 针对这问题, 我们将结合 X 函数与文 [9] 中的型函数共同刻化级数的增长性, 得到如下结果:

定理 1.1 若 $f(s)\in D$ 并具有无限 X - 级, 则

$$\limsup_{\sigma\to0^-}\frac{X(\log M(\sigma,F))}{\log U(\frac{1}{-\sigma})}=T\Longleftrightarrow\limsup_{\sigma\to0^-}\frac{X(\log m(\sigma,F))}{\log U(\frac{1}{-\sigma})}=T,$$

其中 $0<T<\infty$ 以及 $U(x)=x^{\rho(x)}$ 是满足下列条件的函数:

(i) $\rho(x)$ 单调且 $\lim\limits_{x\to\infty}\rho(x)=\infty$;

(ii) 若 $x'=x(1+\frac{1}{\log U(x)})$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log U(x')}{\log U(x)}=1$ 成立.

关于 Dirichlet 级数的正规增长性, 孙道椿, 高宗升等人进行了一些研究, 得到许多很好的结果 (见文献 [6, 12–14]). 本文继续研究具有无穷 X - 级的正规增长性, 得到如下结果:

定理 1.2 若 $f(s)\in D$ 并具有无限 X - 级, 那么

(i) $\limsup\limits_{\sigma\to0^-}\frac{X(\log M(\sigma,F))}{\log U(\frac{1}{-\sigma})}=T\Longleftrightarrow\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{X(\lambda_n)}{\log U(\frac{\lambda n}{\log^+|an|})}=T$;

(ii) $\lim\limits_{\sigma\to 0^-}\frac{X(\log M(\sigma,F))}{\log U(\frac{1}{-\sigma})}=T \Longleftrightarrow \limsup\limits_{n\to\infty}\frac{X(\lambda_n)}{\log U(\frac{\lambda n}{\log^+|a n|})}=T$,
并存在 $\{\lambda_n\}$ 的子序列 $\{\lambda_{n(p)}\}$, 使

$$\lim_{p\to\infty}\frac{X(\lambda_{n(p)})}{\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})}=T,\quad \lim_{p\to\infty}\frac{X(\lambda_{n(p)})}{X(\lambda_{n(p+1)})}=1.$$

注 若级数 (1.1) 满足定理 1.2 中的 (ii), 则称 $f(s)$ 为具有正规增长的无限 X 级级数.

2 定理 1.1 与 1.2 的证明

为证明定理 1.1 和定理 1.2, 我们需要以下引理.

引 理 2.1 [7] 若级数 (1.1) 满足 (1.3),(1.4) 式, 对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 当 $\sigma<0$ 时, 有

$$m(\sigma,f)\le M(\sigma,f)\le K_1(\varepsilon)\frac{1}{-\sigma}m((1-\varepsilon)\sigma,f),$$

其中 $K_1(\varepsilon)$ 是一个与 ε 和 E 有关的正数, 这里 E 如 (1.5) 式所述.

引 理 2.2 若 $X(x)\in\Im$, 正实函数 $\beta(x)$ 满足

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\log\beta(x)}{\log x}=\varrho\ \ (0\le\varrho<\infty), \tag{2.1}$$

如果 $M(x)$ 满足 $\limsup\limits_{x\to\infty}\frac{X(\log M(x))}{\log x}=\mu(>0)$. 那么

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{X(\beta(x)\log M(x))}{\log x}=\mu.$$

证 这里只证当 $0<\varrho<+\infty$ 时的情形. 当 $\varrho=0$ 时类似可证得. 由条件 (2.1) 知, 当 $x\to\infty$ 时, $\beta(x)\to\infty$. 这样, 对充分大的 x, 不妨设 $\beta(x)>1$. 又由于 $X(x)\in\Im$, 我们有 $\lim\limits_{x\to\infty}\log M(x)=\infty$. 于是, 根据柯西中值定理知, 至少存在一点 ξ 满足 $\log M(x)<\xi<\beta(x)\log M(x)$, 使得

$$\frac{X(\beta(x)\log M(x))-X(\log M(x))}{\log(\beta(x)\log M(x))-\log\log M(x)}=\frac{X'(\xi)}{(\log\xi)'}=\xi X'(\xi),$$

即

$$X(\beta(x)\log M(x))=X(\log M(x))+\log\beta(x)\xi X'(\xi). \tag{2.2}$$

由于 $X(x)$ 性质, 当 $x\to+\infty$ 时 $xX'(x)=o(1)$, 这样由 (2.1), (2.2) 式, 我们很容易得到引理 2.2 的结论.

定理 1.1 的证明 根据定理 1.1 的条件以及引理 2.1, 2.2, 容易证得定理 1.1.

定理 1.2 的证明 我们首先证明定理 1.2(i) 中 ($\Longleftarrow$).

若

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{X(\lambda_n)}{\log U(\frac{\lambda_n}{\log^+|a_n|})}=T, \tag{2.3}$$

那么对 $\forall\tau>0$ 以及充分大的 n, 有 $\lambda_n\leq W((T+\tau)\log U(\frac{\lambda_n}{\log^+|a_n|}))$, 其中 $W(x)$ 与 $X(x)$ 互为反函数. 令 $V(x)$ 与 $U(x)$ 互为反函数, 由上式可得

$$V(\exp\{\frac{1}{T+\tau}X(\lambda_n)\})\leq\frac{\lambda_n}{\log^+|a_n|},\ \ \log^+|a_n|\leq\lambda_n(V(\exp\{\frac{1}{T+\tau}X(\lambda_n)\}))^{-1}.$$

于是

$$\log^+|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\leq\lambda_n((V(\exp\{\frac{1}{T+\tau}X(\lambda_n)\}))^{-1}+\sigma),\tag{2.4}$$

那么对于任意充分接近 0^- 的 σ, 取

$$G=W((T+\tau)\log U(\frac{1}{-\sigma}+\frac{1}{-\sigma\log U(\frac{1}{-\sigma})})),$$

即

$$\frac{1}{-\sigma}+\frac{1}{-\sigma\log U(\frac{1}{-\sigma})}=V(\exp\{\frac{1}{T+\tau}X(G)\}).\tag{2.5}$$

如果 $\lambda_n\leq G$, 对于充分大的 n, 不妨设 $V(\exp\{\frac{1}{T+\tau}X(\lambda_n)\})\geq 1$, 由 (2.4), (2.5) 式及 $\sigma<0$, 有

$$\begin{aligned}\log^+|a_n|e^{\lambda_n\sigma}&\leq G((V(\exp\{\frac{1}{T+\tau}X(\lambda_n)\}))^{-1}+\sigma)\\&\leq G=W((T+\tau)\log U(\frac{1}{-\sigma}+\frac{1}{-\sigma\log U(\frac{1}{-\sigma})})),\end{aligned}$$

再根据 $U(x)$ 的性质可得

$$\log^+|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\leq W((T+\tau)\log[(1+o(1))U(\frac{1}{-\sigma})]).\tag{2.6}$$

如果 $\lambda_n>G$, 由 (2.6) 式有 $\log^+|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\leq\lambda_n((V(\exp\{\frac{1}{T+\tau}X(G)\}))^{-1}+\sigma)$, 将 (2.5) 式代入上式得到

$$\log^+|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\leq\lambda_n((\frac{1}{-\sigma}+\frac{1}{-\sigma\log U(\frac{1}{-\sigma})})^{-1}+\sigma)<0.\tag{2.7}$$

这样由 (2.6) 与 (2.7) 式可得

$$\log m(\sigma,f)\leq W((T+\tau)\log[(1+o(1))U(\frac{1}{-\sigma})]),$$

由于 τ 的任意性, 根据上式并结合定理 1.1, 有

$$\limsup_{\sigma\to 0^-}\frac{X(\log M(\sigma,F))}{\log U(\frac{1}{-\sigma})}\leq T.\tag{2.8}$$

下面将证明 (2.8) 式中的不等号不成立. 反证, 假设

$$\limsup_{\sigma\to 0^-}\frac{X(\log M(\sigma,F))}{\log U(\frac{1}{-\sigma})}=\eta<T.$$

于是 $\exists\varepsilon\in(0,\frac{\eta}{2})$, 对于任意的 n 以及任意充分接近 0^- 的 σ, 有

$$\log^+|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\le\log M(\sigma,f)\le W((\eta-2\varepsilon)\log U(\frac{1}{-\sigma})). \tag{2.9}$$

由 (2.3) 式知存在子序列 $\{\lambda_{n(p)}\}$, 对上述的 ε 及充分大的 p, 满足

$$X(\lambda_{n(p)})>(T-\varepsilon)\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}). \tag{2.10}$$

取序列 $\{\sigma_p\}$ 满足

$$W((\eta-2\varepsilon)\log U(\frac{1}{-\sigma_p}))=\frac{\log^+|a_{n(p)}|}{1+\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})}. \tag{2.11}$$

于是由 (2.9) 及 (2.11) 式可得

$$\log^+|a_{n(p)}|+\lambda_{n(p)}\sigma_p\le W((\eta-2\varepsilon)\log U(\frac{1}{-\sigma_p}))=\frac{\log^+|a_{n(p)}|}{1+\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})},$$

即

$$\frac{1}{-\sigma_p}\le\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}(1+\frac{1}{\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})}).$$

再根据 $U(x)$ 的性质便得到

$$U(\frac{1}{-\sigma_p})\le U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}(1+\frac{1}{\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})}))\le U^{1+o(1)}(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}). \tag{2.12}$$

结合 (2.11) 式可得

$$\begin{aligned}\lambda_{n(p)}&=\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}W((\eta-2\varepsilon)\log U(\frac{1}{-\sigma_p}))(1+\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}))\\&=\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}W((\eta-2\varepsilon)(1+o(1))\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}))(1+\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})).\end{aligned}$$

类似于引理 2.2 的证明, 至少存在一实数 ξ 介于

$$\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}(1+\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})W(\eta-2\varepsilon)(1+o(1))\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})$$

与 $W(\eta-2\varepsilon)(1+o(1))\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})$ 之间, 使得

$$\begin{aligned}&X(\lambda_{n(p)})\\=\;&X(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}(1+\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}))W((\eta-2\varepsilon)(1+o(1))\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})))\\=\;&X(W((\eta-2\varepsilon)(1+o(1))\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})))\\&+\log(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}(1+\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})))\xi X'(\xi),\end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\log(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}(1+\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})))}{\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})}=0,$$

于是对于充分大的 p, 得到

$$X(\lambda_{n(p)})=(\eta-2\varepsilon)(1+o(1))\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})+\xi X'(\xi)o(1)\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}). \tag{2.13}$$

由 $\eta<T$ 并结合 (2.10), (2.13) 式, 容易得出矛盾. 这样便得到

$$\limsup_{\sigma\to0^-}\frac{X(\log M(\sigma,f))}{\log U(\frac{1}{-\sigma})}=T.$$

因此, 定理 1.2(i) 的充分性得证.

类似于充分性的讨论可以容易证得其必要性.

接下来证明定理 1.2(ii). 先证充分性: 对于任意的 $\varepsilon(>0)$, 由条件可设存在一子序列 $\{\lambda_{n(p)}\}$ 满足

$$\lambda_{n(p)}\geq W((T-\varepsilon)\log U(\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|})),\quad \lim_{p\to\infty}\frac{X(\lambda_{n(p)})}{X(\lambda_{n(p+1)})}=1, \tag{2.14}$$

即

$$\frac{\lambda_{n(p)}}{\log^+|a_{n(p)}|}\leq V(\exp\{\frac{1}{T-\varepsilon}X(\lambda_{n(p)})\}),\ \ \log^+|a_{n(p)}|\geq\lambda_{n(p)}V(\exp\{\frac{1}{T-\varepsilon}X(\lambda_{n(p)})\})^{-1}.$$

取序列 $\{\sigma_p\}$ 满足

$$\lambda_{n(p)}=W((T-\varepsilon)\log U(\frac{1}{-\sigma_p}+\frac{1}{\sigma_p\log U(\frac{1}{-\sigma_p})})), \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{-\sigma_p}+\frac{1}{\sigma_p\log U(\frac{1}{-\sigma_p})}=V(\exp\{\frac{1}{T-\varepsilon}X(\lambda_{n(p)})\}). \tag{2.16}$$

对任意充分接近 0^- 的 σ, 选取 $\sigma_p\leq\sigma<\sigma_{p+1}$, 再根据 (2.14)–(2.16) 式可得

$$\begin{aligned}\log M(\sigma,f)&\geq \log m(\sigma,f)\geq\log^+|a_{n(p)}|+\lambda_{n(p)}\sigma_p\\&\geq \lambda_{n(p)}(V(\exp\{\frac{1}{T-\varepsilon}X(\lambda_{n(p)})\})^{-1}+\sigma_p)\\&\geq W((T-\varepsilon)\log U(\frac{1}{-\sigma_p}+\frac{1}{\sigma_p\log U(\frac{1}{-\sigma_p})}))\frac{-\sigma_p}{\log U(\frac{1}{-\sigma_p})-1}\\&\geq (1+o(1))W((T-\varepsilon)\log U(\frac{1}{-\sigma_{p+1}}+\frac{1}{\sigma_{p+1}\log U(\frac{1}{-\sigma_{p+1}})}))\frac{-\sigma_p}{\log U(\frac{1}{-\sigma_p})-1}\\&\geq (1+o(1))W((T-\varepsilon)\log U(\frac{1}{-\sigma}+\frac{1}{\sigma\log U(\frac{1}{-\sigma})}))\frac{-\sigma}{\log U(\frac{1}{-\sigma})-1}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

令

$$\frac{1}{-\sigma}+\frac{1}{\sigma\log U(\frac{1}{-\sigma})}=r,\ \ r(1+\frac{1}{\log U(r)})=R,\ \ R(1+\frac{1}{\log U(R)})=R',$$

通过简单的计算可得 $R' \geq \frac{1}{-\sigma}$, 由 $U(r)$ 的性质 (ii) 容易得

$$\limsup_{\sigma\to 0^-}\frac{\log U(r)}{\log U(\frac{1}{-\sigma})}=1, \tag{2.18}$$

又因为 $\limsup\limits_{\sigma\to 0^-}\frac{\log\frac{-\sigma}{\log U(\frac{1}{-\sigma})-1}}{\log U(\frac{1}{-\sigma})}=0$. 这样由引理 2.2 及 (2.17)–(2.18) 式可得

$$\limsup_{\sigma\to 0^-}\frac{X(\log M(\sigma,f))}{\log U(\frac{1}{-\sigma})}=T.$$

接下来证明定理 1.2(ii) 的必要性. 由定理 1.2(i) 容易得到定理 1.2(ii) 的第一个式子成立, 下证第二个式子也成立. 取递减的正数列 $\{\varepsilon_i\}(0<\varepsilon_i<T)$, $\varepsilon_i\to 0(i\to\infty)$. 令

$$E_i=\{n:\frac{X(\lambda_n)}{\log U(\frac{\lambda_n}{\log^+|a_n|})}>T-\varepsilon_i\}, \tag{2.19}$$

则由条件知: 对每个 $i\in N_+$, E_i 为非空无限集且 $E_{i+1}\subset E_i$. 将 E_i 中正整数从小到大记为 $\{n(p)^{(i)}\}_{p=1}^{\infty}$, 那么 $\limsup\limits_{\nu\to+\infty}\frac{X(\lambda_{n(p+1)^{(i)}})}{X(\lambda_{n(p)^{(i)}})}\geq 1$.

接下来分两种情况讨论.

情形 1 若对每个 $i\in N_+$ 有 $\limsup\limits_{\nu\to+\infty}\frac{X(\lambda_{n(p+1)^{(i)}})}{X(\lambda_{n(p)^{(i)}})}=1$, 那么存在 $N_i\in E_i(i\in N_+)$, 当 $n(p)^{(i)}\geq N_i$ 时, 有

$$\frac{X(\lambda_{n(p+1)^{(i)}})}{X(\lambda_{n(p)^{(i)}})}\leq 1+\varepsilon_i. \tag{2.20}$$

又因为 $E_{i+1}\subset E_i$, 可取 $N_{i+1}>N_i$, E_i 的子集 $E_i'=\{n\in E_i: N_i\leq n\leq N_{i+1}\}$, 那么 E_i' 中的元素同时满足 (2.19) 和 (2.20) 式. 将 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i'$ 中的元素按递增进行排序, 记为 $\{n_\nu\}$, 很容易证得定理 1.2 的结论.

情形 2 若存在 $i\in N_+$ 使 $\limsup\limits_{p\to+\infty}\frac{X(\lambda_{n(p+1)^{(i)}})}{X(\lambda_{n(p)^{(i)}})}>1$, 那么存在 $\{n(p)^{(i)}\}$ 子列 (依然记为 $\{n(p)^{(i)}\}$), 使任 $p\in N_+$ 和正常数 γ, 有 $\frac{X(\lambda_{n(p+1)^{(i)}})}{X(\lambda_{n(p)^{(i)}})}\geq 1+\gamma$.

取 $\{n'(p)\},\{n''(p)\}$ 为两个单调增加的正整数序列

$$n'(1)=n(1)^{(i)},n'(2)=n(3)^{(i)},\cdots,n'(p)=n(2p-1)^{(i)},\cdots,$$
$$n''(1)=n(2)^{(i)},n''(2)=n(4)^{(i)},\cdots,n''(p)=n(2p)^{(i)},\cdots,$$

满足

$$n''(p)<n'(p+1),\quad X(\lambda_{n''(p)})>(1+\gamma)X(\lambda_{n'(p)}),\quad p=1,2,\cdots,$$

则对于充分大的 p, 当 $n'(p)<n<n''(p)$, $n\notin E_i$, 那么由 (2.19) 式, 存在一正数 $\delta>0$, 有

$$\lambda_n\leq W((T-\delta)\log U(\frac{\lambda_n}{\log^+|a_n|})),\ \ \frac{\lambda_n}{\log^+|a_n|}\geq V(\exp\{\frac{1}{T-\delta}X(\lambda_n)\}), \tag{2.21}$$

那么

$$\log^+|a_n|e^{\sigma\lambda_n}<\lambda_n(\frac{1}{V(\exp\{\frac{1}{T-\delta}X(\lambda_n)\})}+\sigma). \tag{2.22}$$

令
$$G=W((T-\delta)\log U(\frac{1}{-\sigma}+\frac{1}{-\sigma\log U(\frac{1}{-\sigma})})),$$
即
$$\frac{1}{-\sigma}+\frac{1}{-\sigma\log U(\frac{1}{-\sigma})}=V(\exp\{\frac{1}{T-\delta}X(G)\}). \tag{2.23}$$

若 $\lambda_n\geq G$, 由 (2.21), (2.22) 式, 可得
$$\log^{+}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}\leq\lambda_n(\frac{1}{V(\exp\{\frac{1}{T-\delta}X(\lambda_n)\})}+\sigma)<0. \tag{2.24}$$

若 $\lambda_n<G$, 由 (2.21),(2.22) 式, 可得
$$\log^{+}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}<G=W((T-\delta)\log U(\frac{1}{-\sigma}+\frac{1}{-\sigma\log U(\frac{1}{-\sigma})})). \tag{2.25}$$

取序列 $\{\sigma_p\}$ 满足 $\sigma_p=-V(\exp\{\frac{1}{T-\delta}X(\lambda_{n''(p)})\})^{-1}$, 于是由条件知: 存在 $N_2\in N_+$ 满足 $V(\exp\{\frac{1}{T-\delta}X(\lambda_n)\})\geq 1$, 当 $n\geq N_2$ 时有
$$\log^{+}|a_n|e^{\sigma_p\lambda_n}<\lambda_n(V(\exp\{\frac{1}{T-\delta}X(\lambda_n)\})^{-1}+\sigma_p).$$

当 $n\geq n''(p)$ 时, $\lambda_n\geq\lambda_{n''(p)}$, 再由 σ_ν 的取法, 于是
$$\log^{+}|a_n|e^{\sigma_p\lambda_n}<\lambda_n(V(\exp\{\frac{1}{T-\delta}X(\lambda_{n''(p)})\})^{-1}+\sigma_p)=0. \tag{2.26}$$

对于充分大的 ν, 当 $N_2\leq n\leq n'(p)$ 时有 $\lambda_{n'(p)}\geq\lambda_n$, 且
$$\log^{+}|a_n|e^{\sigma_p\lambda_n}\leq\lambda_{n'(p)}(V(\exp\{\frac{1}{T-\delta}X(\lambda_n)\})^{-1}+\sigma_p).$$
又由于 $\lambda_{n'(p)}<W(\frac{1}{1+\gamma}X(\lambda_{n''(p)}))$, $\sigma_p<0$ 以及 σ_p,N_2 的取法, 得到
$$\log^{+}|a_n|e^{\sigma_p\lambda_n}\leq W(\frac{1}{1+\gamma}X(\lambda_{n''(p)}))\leq W(\frac{T-\delta}{1+\gamma}\log U(\frac{1}{-\sigma_p})). \tag{2.27}$$
这样由 (2.23)–(2.26) 式知, 当 $n>N_2$, 有
$$\log^{+}|a_n|e^{\sigma_p\lambda_n}\leq W((T-\delta)\log U(\frac{1}{-\sigma}+\frac{1}{-\sigma\log U(\frac{1}{-\sigma})})).$$
根据引理 2.2 得到
$$\lim_{\sigma_p\to 0^-}\frac{X(\log m(\sigma_p,f))}{\log U(\frac{1}{-\sigma_\nu})}\leq T-\delta<T.$$
结合定理 1.1 可知上式与定理 1.2 中
$$\lim_{\sigma\to 0^-}\frac{X(\log M(\sigma,f))}{\log U(\frac{1}{-\sigma})}=T$$
矛盾. 故定理 1.2 的必要性得证.

参 考 文 献

[1] 余家荣. 随机狄里克莱级数的一些性质 [J]. 数学学报, 1978, 21(2): 97–118.

[2] Yu J R. On the growth and the distribution of values of exponential series convergent only in the right half-plane[J]. Chinese Annals of Mathematics, 1982, 3(4): 545–554.

[3] 高宗升, 孙道椿. 无限级随机 Dirichlet 级数的值分布 [J]. 数学年刊 A 辑, 1993, 14(6): 677–685.

[4] 刘名生. 半平面上有限级 Dirichlet 级数的正规增长 [J]. 系统科学与数学, 2002, 22(2): 229–238.

[5] 高宗升. 无限级 Dirichlet 级数及随机 Dirichlet 级数 [J]. 系统科学与数学, 2000, 20(2): 187–195.

[6] 徐洪焱, 易才凤. 半平面上有限级 Dirichlet 级数的逼近 [J]. 数学学报, 2010, 53(3): 617–624.

[7] 余家荣, 丁晓庆, 田范基. Dirichlet 级数与随机 Dirichlet 级数的值分布 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.

[8] 徐洪焱, 易才凤. 无限级 Dirichlet 级数的增长性与逼近 [J]. 数学进展, 2013, 42: 81–88.

[9] Hiong K L. Sur les fonctions entieres et let fonctions mèromorphes d'order infini[J]. J. Math. Pures et Appl., 1935, 14: 233–308.

[10] 高宗升. Dirichlet 级数表示的整函数的增长性 [J]. 数学学报, 1999, 42: 741–748.

[11] 孙道椿, 陈特为. 无限级 Dirichlet 级数 [J]. 数学学报, 2001, 44: 259–268.

[12] Filevich P V, Sheremeta M N. Regularly increasing entire Dirichlet series[J]. Mathematical Notes, 2003, 74: 110-122; Translated from Matematicheskie Zametki, 2003, 74: 118–131.

[13] 古振东, 孙道椿. Dirichlet 级数在全平面上的正规增长性 [J]. 数学物理学报, 2011, 31: 991–997.

[14] 宁菊红, 易才凤, 黄文平. 广义 Dirichlet 级数的正规增长性 [J]. 数学物理学报, 2012, 31: 379–386.

THE REGULAR GROWTH OF DIRICHLET SERIES OF INFINITE ORDER IN THE HALF PLANE

XU Hong-yan[1] , YI Cai-feng[2]

(*1.Department of Informatics and Engineering; Jingdezhen Ceramic Institute, Jingdezhen 333403, China*)

(*2.Institute of Mathematics and informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China*)

Abstract: The purpose of this paper is to study the regular growth of Dirichlet series of infinite order in the half-plane. By using the type function, we obtained some equivalence results about the regular growth of Dirichlet series with infinite X-order, which extend the known results.

Keywords: Dirichlet series; infinite order; regular growth

2010 MR Subject Classification: 30B50