Vol. 34 (2014)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

R^{n+1} 上 self-shrinkers 的谱特征

韩方方, 杨登允
(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘 要: 本文研究了 self-shrinkers 谱与几何的关系. 利用渐进展开式系数相等的方法, 获得了如下结果: 设 M 是 R^{n+1} 上的 $n(n \geq 2)$ 维闭 self-shrinkers, 且 M 和 $S^n(\sqrt{2n})$ 有相同的平均曲率, 如果 $\mathrm{spec}^p(M) = \mathrm{spec}^p(S^n(\sqrt{2n}))$, 则 M 是 $S^n(\sqrt{2n})$, 并推广了 R^{n+1} 上 self-shrinkers 的特征.

关 键 词: self-shrinkers; 平均曲率; 谱
MR(2010) 主题分类号: 53C17　　**中图分类号**: O186.12
文献标识码: A　　**文章编号**: 0255-7797(2014)05-1010-05

1 引言

设 M 是一光滑无边的流形, $X_0 : M \to R^{n+m}$ 是一个浸入子流形, 考虑欧式空间中一簇单参数光滑超曲面浸入映射 $X(0,t) : M \times [0,T) \to R^{n+m}$, 它满足如下发展方程:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(x,t) = H(x,t), \\ X(x,0) = X_0(x), \end{cases} \quad x \in M. \tag{1.1}$$

其中 $H(x,t)$ 是 $X(x,t)$ 平均曲率向量. 如果 $H = -\frac{X^N}{2}$ 且 $X^N = \langle X, e_\alpha \rangle$, 其中 e_α 是流形 M 的法向量场且 $\alpha = n+1, n+2, \cdots, n+m$, 则 M 称为 self-shrinkers. 当 $m = 1$ 时, M 则为超曲面, 这时 $X^N = \langle X, v \rangle$, 这里 v 是 M 的单位法向量.

对于光滑紧致定向的 n 维黎曼流形 M, 令 $\wedge^p(M)$ 表示 p 阶光滑微分形式构成的空间, Δ 是作用在 $\wedge^p(M)$ 上的拉普拉斯算子. 再令 $\mathrm{spec}^p(M)$ 表示算子 Δ 在 $\wedge^p(M)$ 上的谱. 关于谱与流形之间有一个著名的问题: 黎曼流形 M 的 $\mathrm{spec}^*(M)$ 是否决定 M 的几何结构? 一般情况下是不成立的, Milnor [1], Vigneras[2] 和 Ikeda [3] 分别给除了一些反例. 但是, 对于一些特殊流形还是有肯定的答案的. Berger, Patodi 以及 Tanno 等分别在文献 [4–6] 得到了一些有意义的结果; 李光汉和吴传喜在文献 [8] 中得到了关于球面中具有常平均曲率超曲面的谱特征; 李振和和王伟在文献 [7] 中得到了关于球面上 Willmore 超曲面的谱特征, 即若此超曲面与 Willmore torus 具有相同的平均曲率, 且二者的谱相等, 则此超曲面为 Willmore torus.

本文主要研究了欧氏空间中 self-shrinkers 谱特征的问题.

主要定理　设 M 是 R^{n+1} 上的 $n(n \geq 2)$ 维闭 self-shrinkers, 且 M 和 $S^n(\sqrt{2n})$ 有相同的平均曲率, 如果 $\mathrm{spec}^p(M) = \mathrm{spec}^p(S^n(\sqrt{2n}))$ $(p = 0, 1, 2)$, 则 M 是 $S^n(\sqrt{2n})$.

2 预备知识

*收稿日期: 2012-10-15　　接收日期: 2013-01-19
基金项目: 国家自然科学基金天元青年基金 (11226078); 拟爱因斯坦度量及相关问题 (11261038).
作者简介: 韩方方 (1985–), 女, 山东菏泽, 研究方向: 微分几何. E–mail: hff6688@126.com.
通讯作者:杨登允

设 M 是 R^{n+1} 中 n 维紧致 self-shrinker. 令 R, Ric和 ρ 分别表示 M 的黎曼曲率张量, Ricci 曲率张量和数量曲率张量, 并用 R_{ijkl} 和 R_{ij} 分别表示 R 和Ric的分量, 则 Guass 方程表示为

$$R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}, \tag{2.1}$$

这里这里 h_{ij} 表示 M 在 R^{n+1} 上的第二基本形式 B 的分量.

对于任意固定的 $x \in M$, 都可以选取幺正标架场 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 使得 (h_{ij}) 在 x 点可以对角化, 即

$$h_{ij} = \kappa_i \delta_{ij}. \tag{2.2}$$

令 H 和 S 分别表示 M 的平均曲率和第二基本形式模长的平方, 则

$$H = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i, S = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2. \tag{2.3}$$

由 (2.2) 式知

$$R_{ijkl} = \kappa_i\kappa_j(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{2.4}$$

则有

$$R_{ij} = (H\kappa_i - \kappa_i\kappa_j)\delta_{ij}, \tag{2.5}$$

$$\rho = H^2 - S. \tag{2.6}$$

故由模长的定义可知

$$|R|^2 = 2S^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \kappa_i^4, |\mathrm{Ric}|^2 = H^2 S + \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^4 - 2H \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^3. \tag{2.7}$$

另外, 对于 $p = 0, 1, 2, \cdots, n$ 有

$$\mathrm{spec}^p(M) = \{0 \le \kappa_{0,p} \le \kappa_{1,p} \le \kappa_{2,p} \le \cdots \uparrow \infty\}. \tag{2.8}$$

而对于这些特征值, 有 Minakshisundaram-Pleijel 渐进展开式:

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_{i,p}t} \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}(a_{0,p} + a_{1,p}t + a_{2,p}t^2 + \cdots) \ \ (t \to 0^+), \tag{2.9}$$

这里系数 $a_{k,p}(k = 0, 1, 2)$ (参看文献 [5]), 有以下计算式:

$$a_{0,p} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \mathrm{vol}(M), \tag{2.10}$$

$$a_{1,p} = \left(\frac{1}{6} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-2 \\ p-1 \end{pmatrix} \right) \int_M \rho dv, \tag{2.11}$$

$$a_{2,p} = \int_M (c_1(n,p)\rho^2 + c_2(n,p)|\mathrm{Ric}|^2 + c_3(n,p)|R|^2) dv, \tag{2.12}$$

这里 dv 表示 M 的体积元, 且

$$c_1(n,p)=\frac{1}{72}\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} n-2 \\ p-1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} n-4 \\ p-2 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

$$c_2(n,p)=-\frac{1}{180}\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} n-2 \\ p-1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} n-4 \\ p-2 \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

$$c_3(n,p)=\frac{1}{180}\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} n-2 \\ p-1 \end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix} n-4 \\ p-2 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

这里当 $l<0$ 或 $p<0$ 或 $l<p$ 时,

$$\begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}=0.$$

设 $S^n(\sqrt{2n})$ 是 R^{n+1} 中的超球面, 因为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\sqrt{\frac{1}{2n}}$, 则 $S^n(\sqrt{2n})$ 的平均曲率 $H_0=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=n\sqrt{\frac{1}{2n}}=\sqrt{\frac{n}{2}}$, 并且 $S_0=|B_0|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2=n(\sqrt{\frac{1}{2n}})^2=\frac{1}{2}$.

对于 self-shrinkers, 在文献 [10] 中有以下定理:

定理 1 设 M 是 R^{n+m} 中完备的 n 维 self-shrinker, 且 $|B|^2\le\frac{1}{2}$, 则要么 $|B|^2\equiv 0$, 此时 M 是一个平面; 要么 $|B|^2\equiv\frac{1}{2}$, 此时 M 是 $S^k(\sqrt{2k})\times R^{n-k}$ $(1\le k\le n)$.

3 主要定理的证明

当 $n=2$ 时, 由文献 [10] 中的定理 4.2 即得结论. 现假设 $n\ge 4$, 令 $a_{k,p}$ 和 $a^0_{k,p}$ 分别表示 M 和 $M_0=S^n$ $(\sqrt{2n})$ 的 Minakshisundaram-Pleijel 渐进展开式的系数, 若 $\mathrm{spec}^p(M)=\mathrm{spec}^p(M_0)$ $(p=0,1,2)$, 则有 $a_{k,p}=a^0_{k,p}$, 结合 (2.10)–(2.15) 式以及

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} n-2 \\ p-1 \end{pmatrix}\neq 0$$

(对一些 p), 得

$$\mathrm{vol}(M)=\mathrm{vol}(M_0), \tag{3.1}$$

$$\int_M dv=\int_{M_0}dv_0, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}&\int_M (c_1(n,p)\rho^2+c_2(n,p)|R'|^2+c_3(n,p)|R|^2)dv\\ =&\int_{M_0}(c_1(n,p)\rho_0^2+c_2(n,p)|R_0'|^2+c_3(n,p)|R_0|^2)dv_0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

由 (3.1)–(3.3) 式以及 $H=H_0$ 知

$$\int_M Sdv=\int_{M_0}S_0dv_0, \tag{3.4}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_M ((c_1(n,p)+2c_3(n,p))S^2+(c_2(n,p)-2c_3(n,p))\sum_{i=1}^n \lambda_i^4-(2c_2(n,p))H\sum_{i=1}^n \lambda_i^3)dv \\
= &\int_{M_0}((c_1(n,p)+2c_3(n,p))S_0^2+(c_2(n,p)-2c_3(n,p))\sum_{i=1}^n(\lambda_i^0)^4-2c_2(n,p)H_0\sum_{i=1}^n(\lambda_i^0)^3)dv_0.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

若将上式看作关于 $\int_M S^2dv-\int_{M_0}S_0^2dv_0$, $\int_M\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i^4dv-\int_{M_0}\sum\limits_{i=1}^n{\lambda_i^0}^4dv_0$ 和 $H\int_M\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i^3dv-\int_{M_0}H_0\sum\limits_{i=1}^n{\lambda_i^0}^3dv_0$ 的线性方程组, 并且有

$$
\begin{vmatrix}
c_1(n,o)+2c_3(n,0) & c_2(n,0)-2c_3(n,0) & -2c_2(n,0)\\
c_1(n,1)+2c_3(n,1) & c_2(n,1)-2c_3(n,1) & -2c_2(n,1)\\
c_1(n,2)+2c_3(n,2) & c_2(n,2)-2c_3(n,2) & -2c_2(n,2)
\end{vmatrix} = -\frac{1}{180}\neq 0,
$$

则 (3.5) 式有唯一的解, 得

$$
\int_M S^2dv=\int_{M_0}S_0^2dv_0.
$$

由柯西 - 斯瓦兹不等式及 (3.4) 式得

$$
S_0\mathrm{vol}(M_0)=\int_M Sdv\le(\int_M S^2dv)^{\frac12}(\int_M dv)^{\frac12}=(\int_{M_0}S_0^2)^{\frac12}(\mathrm{vol}(M))^{\frac12}=S_0\mathrm{vol}(M_0),
$$

故有 $S=S_0$, 所以 $|B|^2=S=S_0=|B_0|^2=\frac12$. 再由第二部分中的定理 1 即得 M 是超球面 $S^n(\sqrt{2n})$ $(n\ge4)$.

当 $n=3$ 时, 仍有 (3.1)–(3.5) 式成立, 并且, 此时有

$$
3S^2+8H\sum_{i=1}^3\lambda_i^3-6\sum_{i=1}^3\lambda_i^4=5H^4-12H^2\sum_{i>j=1}^3\lambda_i\lambda_j. \tag{3.6}
$$

将 (3.6) 式代入 (3.1)–(3.3) 式中得到

$$
\begin{aligned}
&\int_M((c_1(3,p)+\frac34c_2(3,p)+2c_3(3,p))S^2-(\frac12c_2(3,p)+2c_3(3,p))\sum_{i=1}^3\lambda_i^4)dv\\
= &\int_{M_0}((c_1(3,p)+\frac34c_2(3,p)+2c_3(3,p))S_0^2-(\frac12c_2(3,p)+2c_3(3,p))\sum_{i=1}^3(\lambda_i^0)^4)dv_0,
\end{aligned}
$$

其中 $p=0,1$.

同时将上式看作 $\int_M S^2dv-\int_{M_0}S_0^2dv_0$ 和 $\int_M\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i^4dv-\int_{M_0}\sum\limits_{i=1}^n{\lambda_i^0}^4dv_0$ 的线性方程组, 且

$$
\begin{vmatrix}
c_1(3,0)+\frac34c_2(3,0)+2c_3(3,0) & \frac12c_2(3,0)-2c_3(3,0)\\
c_1(3,1)+\frac34c_2(3,1)+2c_3(3,1) & \frac12c_2(3,1)-2c_3(3,1)
\end{vmatrix}\neq 0,
$$

则以上方程有唯一的解, 因此 $\int_M S^2dv=\int_{M_0}S_0^2dv_0$. 同 $n\ge4$ 情形的方法可得 $M=S^3(\sqrt6)$.

综上, 定理得证.

参 考 文 献

[1] Milnor J. Eigenvalue of Laplace operator of certain manifolds [J]. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1964, 51(4): 542.

[2] Vigneras M. Variétés rimanniennes isospcetrales et non isometriques [J]. Ann. of Math., 1980, 112: 21–32.

[3] Ikeda A. On spherical space forms which are isospectral but not isometric [J]. J. Math. Soc. Japan, 1983, 35: 437–404.

[4] Berger P, Gauduchon P et E Mazet. Le spactre d'une Variété Remannienne [J]. Lecture Notes Math., 194, Springer-Verlag, 1971.

[5] Patodi U K. Curvature of the fundamental solution of the heat operator [J]. J. Indian Math. Soc., 1970, 34: 269–285.

[6] Tanno S, Masuda K. A characterization of product of two 3-sphere by the spectrum [J]. Kodai Math. J., 1985, 8: 420–429.

[7] Li Zhenhe, Wang Wei. On spectral characterizations of Willmore hypersurfaces in a sphere [J]. Appl. Math. J. Chinese Universities, 2009, 24(4): 490–494.

[8] 李光汉, 吴传喜. 球面中具有常平均曲率超曲面的谱特征 [J]. 数学进展, 2004, 5: 575–580.

[9] Ding Qing. On spectral characterizations of minimal hypersurface in a sphere [J]. Kodai Math. J., 1994, 17: 320–328.

[10] Ding Q, Xin Y L. The rigidity theorem of self shrinkers[J]. arXiv: 1105.4962.

[11] Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifold [J]. Ann. Math., 1968, 88: 62–105.

[12] Knut Smoczyk. Self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension [J]. International Mathematics Research Notice, 2005, 48: 2983–3004.

ON SPECTRAL CHARACTERIZATIONS OF SELF-SHRINKERS ON R^{n+1}

HAN Fang-fang , YANG Deng-yun

(*College of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China*)

Abstract: This article studies spectrum and geometric relations of self-shrinkers. By using the method of asymptotic expansion coefficient, we obtain the following results: Let M be an n-dismension closed self-shrinker on $R^{n+1}(n \geq 2)$ with the same mean curvature of $S^n(\sqrt{2n})$, if $\mathrm{spec}^p(M)$ $=\mathrm{spec}^p(S^n(\sqrt{2n}))$ $(p = 0, 1, 2)$, then M is $S^n(\sqrt{2n})$, which generalizes the character of self-shrinkers on R^{N+1}.

Keywords: self-shrinkers; mean curvature; spectrum

2010 MR Subject Classification: 53C17