Vol. 34 (2014)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

混合分数 O-U 过程的最小范数估计

陆健华

(湖北经济学院统计学院, 湖北 武汉 430205)

摘 要: 本文研究混合分数 O-U 过程的最小范数估计问题. 利用分数布朗运动驱动的随机微分方程偏差不等式, 获得了混合分数 O-U 过程漂移参数的最小范数估计、相合性及渐近分布.

关 键 词: 最小范数估计; 混合分数 O-U 过程

MR(2010) **主题分类号**: 60G15 **中 图 分 类 号**: O211.6

文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2014)03-0597-06

1 引言

设 $W^H=\{W_t^H, t\geq 0\}$ 是分数布朗运动有 Hurst 标量 H, 即: 它是一个连续 Gaussian 过程满足以下性质:

(I) $W_0^H=0$, $\mathbb{P}$-a.s.;

(II) $\mathbb{E}W_t^H=0$, $\mathbb{E}W_t^HW_s^H=\dfrac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-|s-t|^{2H})$ 对任意 $s,t\geq 0$;

(III) W^H 的增量是平稳的, H 阶自相似的, 且其轨道式几乎处处连续但不可微的.

标准布朗运动 W 是参数为 $H=\frac{1}{2}$ 的分数布朗运动. 设 a, b 是两个实常数使得 $(a,b)\neq(0,0)$.

定义 1.1 参数为 a, b, H 的混合分数布朗运动 (MFBM) 是满足下面性质的过程. 对任意 $t\in\mathbb{R}_+$,

$$\forall Z_t^H=Z_t^H(a,b)=aW_t+bW_t^H, \tag{1.1}$$

这里 $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是布朗运动, $(W_t^H)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是数为 H 的分数布朗运动参, 且 $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 和 $(W_t^H)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是独立的.

Cheridito [1] 介绍了这个过程, 并且利用它研究下面的金融模型,

$$X_t^H(a,b)=X_0^H(a,b)\exp\Big(\nu t+\sigma Z_t^H(a,b)\Big), \tag{1.2}$$

这里 ν, σ 是常数, a 是任意正常数, $b=1$, $Z^H(a,b)$ 是参数为 a, b, H 的 MFBM.

文献 [2] 研究了混合分数布朗运动的一些随机性质. 文献 [3] 一般化了 Zili 的工作, 研究了分数混合分数布朗运动的一些性质. 由布朗运动驱动的随机微分方程的统计推断得到了很多学者的研究 (参看文献 [4]). 对于分数布朗运动的统计估计问题最近得到了广泛关注. 文献 [5] 研究了由分数布朗运动驱动的线性模型的参数估计问题. 文献 [6] 证明了由分数布朗运动驱动的随机微分方程 MLE 和 Bayes 估计的大偏差不等式. 文献 [7] 研究了分数 O-U 过程的参数估计问题. 这篇文章, 我们将研究分数 O-U 过程参数的最小范数估计的渐近性质.

*收稿日期: 2013-08-01 接收日期: 2013-12-20

作者简介: 陆健华 (1968–), 女, 湖北武汉, 副教授, 主要研究方向: 概率统计.

2 一些引理

从文献 [2], 我们知道 MFBM 是一个混合自相似过程:

$$\{Z_{ht}^H(a,b)\} =^d \{Z_t^H(ah^{1/2}, bh^H)\},$$

这里 $h > 0$ 是常数, $\{X_t\} =^d \{Y_t\}$ 表示 means $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 和 $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 有相同分布. 对任意过程 X, X^* 表示上确界过程: $X_t^* = \sup_{s\le t}|X_s|$. 因此由自相似性质 $Z_{ht}^{H*}(a,b) =^d Z_t^{H*}(ah^{1/2}, bh^H)$. 对任意 $p>0$, 有

引理 2.1 设 $T > 0$ 是一个常数, Z 是参数为 a,b,H 的 MFBM. 则对任意 $p > 0$,

$$\mathbb{E}(Z_T^{H*}(a,b))^p = \mathbb{E}(Z_1^{H*}(aT^{1/2}, bT^H))^p = \mathbb{E}(\sup_{t\le 1}|aT^{1/2}W_t + bT^HW_t^H|)^p. \tag{2.1}$$

B-D-G 不等式 (布朗运动情形) 设 W 为布朗运动, $p > 0$, 则对任意停时 τ 有

$$c(p)\mathbb{E}(\tau^{p/2}) \le \mathbb{E}((W_\tau^*)^p) \le C(p)\mathbb{E}(\tau^{p/2}), \tag{2.2}$$

这里常数 $c(p)$, $C(p) > 0$ 依赖于 p.

定理 NV [8] 设 W^H 是分数布朗运动, τ 是停时, 则对任意 $p \ge 0$, $H \in (1/2, 1)$, 有

$$c(p,H)\mathbb{E}(\tau^{pH}) \le \mathbb{E}((W_\tau^{H*})^p) \le C(p,H)\mathbb{E}(\tau^{pH}), \tag{2.3}$$

且对任意 $p > 0$, $H \in (0, 1/2)$, 有

$$c(p,H)\mathbb{E}(\tau^{pH}) \le \mathbb{E}((W_\tau^{H*})^p), \tag{2.4}$$

这里 $c(p,H)$, $C(p,H) > 0$ 依赖于 p, H.

利用定理 NV 和 B-D-G 不等式, 可得 (2.1) 式的上界.

设 $\{X_t, t \ge 0\}$ 是下面随机微分方程的解

$$X_t = x_0 + \theta\int_0^t X_s ds + \varepsilon Z_t^H, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.5}$$

这里 θ 是未知参数, Z_t^H 是 MFBM.

若 $s \in (0,t)$, 设 $K(t,s) := (c/C)s^{-r}(t-s)^{-r}$, 若 $s > t$, 设 $K(t,s) = 0$, 这里 $r = H - 1/2$,

$$C := \sqrt{\frac{H}{(H-1/2)B(H-1/2, 2-2H)}}$$

且

$$c := \frac{1}{B(H+1/2, 3/2-H)},$$

这里 $B(\mu,\nu)$ 被定义为

$$B(\mu,\nu) := \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}.$$

利用文献 [9] 的命题 2.1, 可得

命题 2.2 设 $H \in (0,1)$, 定义 M 为

$$M_t = \int_0^t K(t,s) dW_s^H,$$

则 M 是一个 Gaussian 鞅且 $\langle M \rangle_t = (C^2/4H^2(2-2H))t^{2-2H}$.

有关分数布朗运动的进一步性质, 请参考文献 [9, 10].

3 主要结果

3.1 最小范数估计

设混合分数 O-U 过程 $X = \{X_t, 0 \le t \le T\}$ 满足以下方程

$$dX_t = \theta X_t dt + \varepsilon dZ_t^H, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.1}$$

这里 $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

设 $x_t(\theta)$ 是当 $\varepsilon = 0$ 时, 上面随机微分方程的解. 显然有

$$x_t(\theta) = x_0 e^{\theta t}, \quad 0 \le t \le T. \tag{3.2}$$

设

$$S_T(\theta) = \int_0^T |X_t - x_t(\theta)| dt. \tag{3.3}$$

最小范数估计 θ_ε^* 满足下面方程

$$S_T(\theta_\varepsilon^*) = \inf_{\theta \in \Theta} S_T(\theta). \tag{3.4}$$

有关最小范数存在性可参看文献 [11]. 因此, 我们假设存在 θ_ε^* 满足上面方程.

3.2 相合性

设 θ_0 为真值, 对任意 $\delta > 0$ 定义

$$g(\delta) = \inf_{|\theta-\theta_0|>\delta} \int_0^T |x_t(\theta) - x_t(\theta_0)| dt. \tag{3.5}$$

则对任意 $\delta > 0$, 有 $g(\delta) > 0$.

定理 3.1 对任意 $p > 0$, 存在常数 $C_1(p,H)$, $C_2(p) > 0$ 使得对任意 $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}(|\theta_\varepsilon^* - \theta_0| > \delta) \le & 2^p \varepsilon^p T^p (g(\delta))^{-p} e^{p|\theta_0 T|} (C_1(p,H) T^{Hp} + C_2(p) T^{p/2}) \\ = & O((g(\delta)^{-p})\varepsilon^p).\end{aligned} \tag{3.6}$$

证 显然有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}(|\theta_\varepsilon^* - \theta_0| > \delta) = & \mathbb{P}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}(\inf_{|\theta-\theta_0|\le\delta} \|X - x(\theta)\| > \inf_{|\theta-\theta_0|>\delta} \|X - x(\theta)\| > \delta) \\ \le & \mathbb{P}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}(\inf_{|\theta-\theta_0|\le\delta} (\|X - x(\theta_0)\| + \|x(\theta_0) - x(\theta)\|) \\ & > \inf_{|\theta-\theta_0|>\delta} (\|x(\theta_0) - x(\theta)\| - \|X - x(\theta_0)\|) > \delta) \\ = & \mathbb{P}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}(\|X - x(\theta_0)\| > g(\delta)/2).\end{aligned} \tag{3.7}$$

由于 $x_t(\theta)=x_0e^{\theta t}$, 则

$$\begin{aligned} X_t-x_t(\theta_0)=&x_0+\theta_0\int_0^t X_s ds+\varepsilon Z_t-x_t(\theta) \\ =&\theta_0\int_0^t (X_s-x_s(\theta_0))ds+\varepsilon Z_t. \end{aligned} \tag{3.8}$$

设 $V_t=|X_t-x_t(\theta_0)|$, 则有

$$V_t=|X_t-x_t(\theta_0)|\le|\theta_0|\int_0^t V_s ds+\varepsilon|Z_t|.$$

由 Gronwall 不等式, 可得

$$\sup_{0\le t\le T}|V_t|\le\varepsilon e^{|\theta_0T|}\sup_{0\le t\le T}|Z_t|.$$

因此, 利用 (3.7) 式, 引理 2.1, B-D-G 不等式和定理 NV, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}(|\theta_\varepsilon^*-\theta_0|>\delta)\le&\mathbb{P}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}(\|X-x(\theta_0)\|>g(\delta)/2) \\ \le&\mathbb{P}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}(Z_T^*>\frac{e^{-|\theta_0t|}g(\delta)}{2\varepsilon T}) \\ \le&2^p\varepsilon^pT^p(g(\delta))^{-p}e^{p|\theta_0T|}(C_1(p,H)T^{Hp}+C_2(p)T^{p/2}) \\ =&O((g(\delta)^{-p})\varepsilon^p). \end{aligned}$$

3.3 渐近分布

显然, 有

$$X_t=e^{\theta_0t}(x_0+\int_0^t e^{-\theta_0s}\varepsilon dZ_s), \tag{3.9}$$

这个等价于

$$X_t-x_t(\theta_0)=\varepsilon e^{\theta_0T}\int_0^t e^{-\theta_0s}\varepsilon dZ_s.$$

设

$$Y_t=e^{\theta_0t}\int_0^t e^{-\theta_0s}dZ_s=ae^{\theta_0t}\int_0^t e^{-\theta_0s}dW_s+be^{\theta_0t}\int_0^t e^{-\theta_0s}dW_s^H=:aY_t^1+bY_t^2,$$

则 Y 是一个 Gauss 过程. 参考文献 [12](或者文献 [7, 10]), 可得对任意 $h\ge0$,

$$Cov(Y_t^2,Y_{t+h}^2)=e^{2\theta_0t+\theta_0h}\gamma_H(t),$$

这里

$$\gamma_H(t)=H(2H-1)\int_0^t\int_0^t e^{-\theta_0(u+v)}|u-v|^{2H-2}dudv.$$

显然有

$$\mathrm{Cov}(Y_t^1,Y_{t+h}^1)=e^{2\theta_0t+\theta_0h}\int_0^t e^{-2\theta_0s}ds.$$

因此, Y 是一个 0 期望 Guass 过程. 设

$$\xi = \arg \inf_{-\infty<u<\infty} \int_0^T |Y_t - utx_0 e^{\theta_0 t}| dt.$$

定理 3.2 随机变量 $u^* = \varepsilon^{-1}(\theta_\varepsilon^* - \theta_0)$ 以概率收敛于某随机变量, 其概率分布在 $\mathbb{P}_{\theta_0}$ 下与 ξ 相同.

证 设 $x_t^{'}(\theta) = x_0 t e^{\theta t}$,

$$N_\varepsilon(u) = \|Y - \varepsilon^{-1}(x(\theta_0 + \varepsilon u) - x(\theta_0))\|$$

和

$$N_0(u) = \|Y - ux^{'}(\theta_0)\|.$$

再假设

$$A_\varepsilon = \{\omega : |\theta_\varepsilon^* - \theta_0| < \delta_\varepsilon\}, \quad \delta_\varepsilon = \varepsilon^\tau, \quad \tau \in (1/2, 1) \quad L_\varepsilon = \varepsilon^{\tau-1}.$$

可以发现 u^* 满足方程

$$N_\varepsilon(u_\varepsilon^*) = \inf_{|u|<L_\varepsilon} Z_\varepsilon(u), \quad \omega \in A_\varepsilon.$$

定义

$$\xi_\varepsilon = \arg \inf_{|u|<L_\varepsilon} Z_0(u).$$

以概率 1, 有

$$\begin{aligned}
\sup_{|u|<L_\varepsilon} \|N_\varepsilon(u) - N_0(u)\| =& |\|Y - ux^{'}(\theta_0) - \frac{1}{2}\varepsilon u^2 x^{''}(\tilde{\theta})\| - \|Y - ux^{'}(\theta_0)\||\\
\le& \frac{\varepsilon}{2} L_\varepsilon^2 \sup_{|\theta-\theta_0|<\delta_\varepsilon} \int_0^T |x^{''}(\theta)| dt\\
\le& C\varepsilon^{2\tau-1},
\end{aligned}$$

这里 $\tilde{\theta} = \theta_0 + \alpha(\theta - \theta_0)$ 对某个 $\alpha \in (0,1)$. 此外, 利用文献 [13] 中的定理 2 的讨论, $\{Z_0(u), -\infty < u < \infty\}$ 以概率 1 有唯一最小解 u^*. 现在, 选择区间 $[-L, L]$ 使得

$$\mathbb{P}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}(u_\varepsilon^* \in (-L, L)) \ge 1 - \beta g(L)^{-p}$$

和

$$\mathbb{P}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}(u^* \in (-L, L)) \ge 1 - \beta g(L)^{-p},$$

这里 $\beta > 0$. $g(L)$ 关于 L 递增. 过程 $Z_\varepsilon(u), u \in [-L, L]$ 和 $Z_0(u), u \in [-L, L]$ 满足 Lipschitz 条件, 且 $Z_\varepsilon(u)$ 在 $u \in [-L, L]$ 上, 一致收敛于 $Z_0(u)$. 因此, $Z_\varepsilon(\cdot)$ 的最小值收敛于 $Z_0(u)$ 的最小值. 定理证毕.

参 考 文 献

[1] Cheridito P. Mixed fractional Brownian motion [J]. Bernoulli, 2001, 7(6): 913–934.

[2] Zili M. On the mixed fractional Brownian motion [J]. J. Appl. Math. Stoch. Anal., 2006, Article ID 32435: 1–9.

[3] Miao Y, Ren W Y, Ren Z X. On the fractional mixed fractional Brownian motion [J]. Appl. Math. Sci. (Ruse), 2008, 2(33-36): 1729–1738.

[4] Prakasa Rao B L S. Statistical inference for diffusion type processes [M]. New York: Arnold, London and Oxford University Press, 1999.

[5] Breton A Le. Filtering and parameter estimation in a simple linear model driven by a fractional Brownian motion [J]. Statist. Probab. Lett., 1998, 38: 263–274.

[6] Miao Y, Wang J X. Large deviation inequalities for MLE and Bayes estimator in SDE with fractional Brownian motion [J]. J. Math., 2008, 28(4): 355–361.

[7] Kleptsyna M L, Breton A Le, Roubaud M C. Parameter estimation and optimal filtering for fractional type stochastic systems [J]. Stat. Inference Stoch. Process., 2000, 3: 173–182.

[8] Novikov A, Valkeila E. On some maximal inequalities for fractional Brownian motions [J]. Statist. Probab. Lett., 1999, 44(1): 47–54.

[9] Norros I, Valkeila E, Virtamo J. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions [J]. Bernoulli, 1999, 5(4): 571–587.

[10] Gripenberg G, Norros I. On the prediction of fractional Brownian motion [J]. J. Appl. Probab, 1996, 33: 400–410.

[11] Prakasa Rao B L S. Asymptotic theory of statistical inference [M]. New York: Wiley, 1987.

[12] Prakasa Rao B L S. Minimum L_1-norm estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck type process [J]. Theory Probab. Math. Statist., 2005, 71: 181–189.

[13] Kutoyants Y, Pilibossian P. On minimum L_1-norm estimate of the parameter of the Ornstein-Uhlenbeck process [J]. Statist. Probab. Lett., 1994, 20: 117–123.

MINIMUM NORM ESTIMATION FOR MIXED FRACTIONAL ORNSTEIN-UHLENBECK TYPE PROCESS

LU Jian-hua

(*School of Statistics, Hubei University of Economics, Wuhan 430205, China*)

Abstract: The minimum norm estimation for mixed fractional Ornstein-Uhlenbeck type process is studied. By using deviation inequalities of fractional Brownian motion, some asymptotic properties of the minimum norm estimator of the drift parameter for mixed fractional Ornstein-Uhlenbeck type process are obtained.

Keywords: minimum norm estimation; mixed fractional

2000 MR Subject Classification: 60G15