

基于再保险和投资的随机微分博弈

杨 鹏

(西京学院基础部, 陕西 西安 710123)

摘 要: 本文研究了具有再保险和投资的随机微分博弈. 应用线性 - 二次控制的理论, 在指数效用和幂效用下, 求得了最优再保险策略、最优投资策略、最优市场策略和值函数的显示解, 推广了文 [8] 的结果. 通过本文的研究, 当市场出现最坏的情况时, 可以指导保险公司选择恰当的再保险和投资策略使自身所获得的财富最大化.

关键词: 随机微分博弈; 线性 - 二次控制; 指数效用; 幂效用

MR(2010) 主题分类号: 91A30; 91B30

中图分类号: O225

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)04-0779-08

1 引言

运用随机控制的理论研究保险公司的最优再保险和投资问题, 近年来已成为精算数学的一个研究热点. 文 [1] 首先应用随机控制理论研究了扩散风险模型的最优投资问题, 得到了最优投资策略和值函数的显示解. 文 [2] 研究了跳扩散风险模型的最优投资问题, 获得了使终值财富的指数效用最大的投资策略. 同时, 他们还研究了破产概率的数值解, 给出了破产概率的计算方法, 并讨论了一些参数对最优投资策略的影响. 文 [3] 研究了扩散风险模型的最优投资和再保险, 获得了使终值财富的指数效用最大的投资和再保险策略.

在研究中我们发现, 大多数学者只从投资者的角度出发, 获得最优再保险和最优投资策略, 而完全没有考虑市场对投资者的影响. 我们知道, 在实际中, 投资者肯定会受到市场不确定性因素的影响, 因此从投资者和市场两个角度同时考虑才更符合实际, 该问题就是随机微分博弈.

随机微分博弈属于博弈论的范畴. 博弈论虽然古已有之, 但文 [4] 的发表才标志着随机微分博弈时代的真正到来. 随机微分博弈假设市场是博弈的“虚拟”对手, 通过投资者和市场之间的双重博弈得到最优的投资组合. 它如今已成为数理金融学、管理学科的研究热点. 如文 [5] 在跳 - 扩散金融市场中, 利用随机微分博弈论研究了风险最小化的投资组合策略问题. 文 [6] 也利用随机微分博弈论研究了 Markov 调制模型下的期权估值问题. 文 [7] 研究了两个具有相关但不同投资机会的投资者之间基于随机微分博弈的最优投资问题. 文 [8] 在指数效用下研究了扩散风险模型的最优再保险和投资问题. 他们通过求解最优控制问题对应的 HJBI 方程, 得到了最优再保险、投资策略、最优市场策略和值函数的显示解. 本文在文 [8] 的基础上也研究了扩散风险模型的最优再保险和投资问题. 本文和文 [8] 区别为

*收稿日期: 2013-05-16

接收日期: 2013-09-06

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11271375); 西京学院校级科研项目资助 (XJ120106; XJ120109; XJ130246).

作者简介: 杨鹏 (1983-), 男, 山东临沂, 讲师, 主要研究方向: 数理金融、风险理论.

1. 研究方法不同. 本文不再是求解最优控制问题对应的 HJBI 方程得到最优策略, 而是使用线性 - 二次控制理论得到最优策略.

2. 本文在指数效用和幂效用下, 都得到了最优再保险、投资策略、最优市场策略和值函数的显示解, 文 [8] 只在指数效用下得到了最优策略和值函数的显示解.

2 模型和随机微分博弈问题

2.1 模型

本文对连续时间的金融市场做标准性假设:

- (1) 允许连续交易;
- (2) 交易中不含交易费用和税收;
- (3) 所有资产都是无穷可分的.

此外, 假设所有的随机变量和随机过程都定义在完备的概率空间 (Ω, F_t, P) 中, 且满足通常条件, 也就是 F_t 右连续且 P 完备.

和文 [9] 类似的, 我们假设理赔过程满足微分方程 $dC(t) = \alpha dt - \beta dW_1(t)$, 其中, $\alpha > 0, \beta > 0$ 为常数, 分别表示单位时间平均索赔和索赔波动率, $W_1(t)$ 是标准布朗运动. 保费以连续利率 $dc(t) = (1 + v)\alpha dt$ 支付, 其中 $v > 0$ 为保险公司的安全负载. 则盈余过程满足如下的微分方程

$$dX(t) = c(t)dt - dC(t) = v\alpha dt + \beta dW_1(t).$$

下面考虑比例再保险, 再保险的水平为 $a(t) \leq 1$. 当 $0 \leq a(t) \leq 1$ 时意味着公司分出保险, 特别的当 $a(t) = 1$ 表示完全分保而自留额为零, 而 $a(t) = 0$ 表示分保比例为零. $a(t) < 0$ 意味着公司接受新的分保, 此时保险公司充当再保险人的角色. 设再保险的安全负载为 η , 满足 $\eta > v$. 进行再保险后盈余过程变为

$$dX(t, a(t)) = (v - \eta a(t))\alpha dt + (1 - a(t))\beta dW_1(t).$$

考虑一个金融市场, 由两个金融资产组成, 其中一个是无风险资产 (债券), 时刻 t 的价格 $\{B(t), t \geq 0\}$ 满足方程 $dB(t) = r_0 B(t)dt$, 其中 $r_0 > 0$ 为无风险利率. 风险资产 (股票), 在时刻 t 时的价格 $\{S(t), t \geq 0\}$ 满足的随机微分方程为 $dS(t) = S(t)[r dt + \sigma dW_2(t)]$, 其中 $r \geq r_0$, $\sigma > 0$ 为常数, $W_2(t)$ 是标准布朗运动, 假设 $W_1(t), W_2(t)$ 相互独立.

保险公司除了可以进行再保险外还可以进行投资. 假设 $\pi(t)$ 是时刻 t 在风险资产上的投资额, 则在无风险资产上投资的金额为 $X(t, u(t)) - \pi(t)$, 其中 $X(t, u(t))$ 为进行投资和再保险后保险公司的盈余过程, 策略 $u(t) = (a(t), \pi(t))$. 因此进行投资和再保险后, 保险公司的盈余过程 $X(t, u(t))$ 满足下面的随机微分方程

$$\begin{aligned} dX(t, u(t)) = & [(v - \eta a(t))\alpha + \pi(t)(r - r_0) + r_0 X(t, u(t))]dt \\ & + (1 - a(t))\beta dW_1(t) + \sigma \pi(t) dW_2(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

定义 1 一个策略 $u(\cdot) = (a(\cdot), \pi(\cdot))$ 称为可行的, 如果 $u(\cdot)$ 关于流 $\{F_t\}$ 是可料的, 且对于每个 $t \geq 0$ 过程 $u(\cdot)$ 满足下面的条件:

- (1) $\int_0^T [\pi(t)]^2 dt < \infty$ a.e. 对所有的 $T < \infty$ 成立;

(2) $a(t) \leq 1$;

(3) 随机微分方程 (1) 对于 $\{u(t), t \geq 0\}$ 有唯一的强解. 所有可行策略记为 U .

设 $\{\theta(t), t \geq 0\}$ 是定义在概率空间 (Ω, F_t, P) 上实值的, 满足下列条件的随机过程

(1) $\{\theta(t), t \geq 0\}$ 是 F_t 循序可测的;

(2) 对几乎所有的 $(t, \omega) \in [0, +\infty) \times \Omega$, $\theta(t) = \theta(t, \omega) < 1$;

(3) $E \int_0^T \theta^2(t) dt < \infty$. 对满足上述条件的全体 $\theta(t)$ 记为 $\Theta(t)$.

对每个 $\{\theta(t), t \geq 0\} \in \Theta$ 定义 $\{Z^\theta(t), t \geq 0\}$ 如下

$$Z^\theta(t) = \exp\left\{-\int_0^t \theta(s) dW_1(s) - \int_0^t \theta(s) dW_2(s) - \int_0^t \theta^2(s) ds\right\}.$$

上式应用 Ito 公式得到

$$dZ^\theta(t) = -Z^\theta(t)\theta[dW_1(t) + dW_2(t)]. \quad (2.2)$$

因此 $Z^\theta(t)$ 是 (F_t, P) 上的局部鞅, 假设 $\{\theta(t), t \geq 0\}$ 是 P -几乎处处有界的, $Z^\theta(0) = Z_0(0 < Z_0 < 1)$, 所以 $Z^\theta(t)$ 是 (F_t, P) 上的鞅, 则 $EZ^\theta(T) = EZ^\theta(0) = 1$.

定义 $\frac{dP^\theta}{dP} = Z^\theta(T)$, 则对每个 $\theta \in \Theta$, 有了一个新的概率测度 P^θ .

2.2 随机微分博弈问题

设 W 为一效用函数, $W' > 0, W'' < 0$, 即 W 是严格递增的凸函数. 对每个投资策略 $u(\cdot)$, 定义投资者的终值财富在 P^θ 下的期望效用为 $V^{u, \theta}(t, x) = E_\theta[W(X_T^u) | X_t^u = x]$, 其中 E_θ 是在概率测度 P^θ 下的期望.

投资者与市场之间的博弈, 假设投资者是博弈的主导者. 即目标是, 在市场最坏的情况下, 投资者选择一个最优的策略 $u(\cdot)$ 最大化终值财富的期望效用. 即

$$\sup_{u \in U} \inf_{\theta \in \Theta} V^{u, \theta}(t, x) = V^{u^*, \theta^*}(t, x) = V(t, x), \quad (2.3)$$

其中 u^*, θ^* 为最优策略. 该问题是投资者与市场之间的零和微分博弈问题, 解决该问题就要找到最优的策略 u^*, θ^* 和相应的值函数 $V(t, x)$.

3 最优策略和值函数

3.1 指数效用函数

本节假设效用函数为指数效用 $W(x) = -\frac{1}{m}e^{-mx}$, 其中 $m > 0$.

下面我们将在该效用函数下求解投资者和市场之间的零和微分博弈问题, 得到最优策略和值函数的显式解.

3.1.1 当 $\eta\alpha \geq \frac{\beta(r-r_0)}{\sigma}$ 时

引理 1 $g_1(t)$ 满足下面的常微分方程

$$g_1'(t) + g_1(t)m\alpha(\eta - v)e^{r_0(T-t)} - \frac{g_1(t)}{4}\left(\frac{r-r_0}{\sigma} - \frac{\eta\alpha}{\beta}\right)^2 = 0, g_1(T) = 1, \quad (3.1)$$

则

$$g_1(t) = \exp\left\{\frac{m\alpha(\eta - v)}{r_0}[e^{r_0(T-t)} - 1] - \frac{T-t}{4}\left(\frac{r-r_0}{\sigma} - \frac{\eta\alpha}{\beta}\right)^2\right\}. \quad (3.2)$$

证 解常微分方程 (3.1) 即可得到 (3.2) 式. 求解过程略.

定理 1 随机微分博弈问题 (2.3) 的最优投资策略为

$$\pi^* = \frac{e^{-r_0(T-t)}}{2m\sigma^2} \left(r - r_0 - \frac{\sigma\eta\alpha}{\beta} \right); \quad (3.3)$$

最优再保险策略为

$$a^* = 1 - \frac{e^{-r_0(T-t)}}{2m\beta^2} \left(\eta\alpha - \frac{\beta(r - r_0)}{\sigma} \right); \quad (3.4)$$

市场的最优策略为

$$\theta^* = \frac{1}{2} \left(\frac{r - r_0}{\sigma} + \frac{\eta\alpha}{\beta} \right). \quad (3.5)$$

值函数满足下式

$$V(t, x) = -\frac{1}{m} g_1(t) \exp\{-mxe^{r_0(T-t)}\}, \quad (3.6)$$

$g_1(t)$ 满足 (3.2) 式.

证 令 $u(\cdot), \theta(\cdot)$ 是任意两个可行的策略, $X(t, u)$ 满足 (2.1) 式的控制过程, 对

$$-\frac{1}{m} z g_1(t) e^{-mxe^{r_0(T-t)}}$$

应用 Ito 公式, 结合 (3.1) 式有

$$\begin{aligned} & d\left[-\frac{1}{m} g_1(t) Z^\theta(t) e^{-mX(t, u) e^{r_0(T-t)}}\right] \\ = & Z^\theta(t) e^{-mX(t, u) e^{r_0(T-t)}} \left\{ -\frac{1}{m} g_1'(t) - r_0 X(t, u) g_1(t) e^{r_0(T-t)} \right. \\ & - \frac{m}{2} g_1(t) e^{2r_0(T-t)} [\beta^2(1-a)^2 + \sigma^2 \pi^2] \\ & + g_1(t) e^{r_0(T-t)} [(v - \eta a(t))\alpha + \pi(t)(r - r_0) + r_0 X(t, u(t))] \\ & - g_1(t) e^{r_0(T-t)} [(1-a)\beta + \sigma\pi]\theta \Big\} dt + \frac{1}{m} g_1(t) \theta Z^\theta(t) e^{-mX(t, u) e^{r_0(T-t)}} [dW_1(t) + dW_2(t)] \\ & + g_1(t) \theta Z^\theta(t) e^{r_0(T-t)} e^{-mX(t, u) e^{r_0(T-t)}} \theta [(1-a)\beta dW_1(t) + \sigma\pi dW_2(t)] \\ = & Z^\theta(t) e^{-mX(t, u) e^{r_0(T-t)}} \\ & \left\{ -\frac{m\sigma^2}{2} g_1(t) e^{2r_0(T-t)} [\pi(t) - \pi^*(t)]^2 - \frac{m\beta^2}{2} g_1(t) e^{2r_0(T-t)} [a(t) - a^*(t)]^2 \right. \\ & + \frac{g_1(t)}{2m} [\theta(t) - \theta^*(t)]^2 \Big\} dt + \frac{1}{m} g_1(t) \theta Z^\theta(t) e^{-mX(t, u) e^{r_0(T-t)}} [dW_1(t) + dW_2(t)] \\ & + g_1(t) \theta Z^\theta(t) e^{r_0(T-t)} e^{-mX(t, u) e^{r_0(T-t)}} \theta [(1-a)\beta dW_1(t) + \sigma\pi dW_2(t)], \end{aligned}$$

其中 π^*, a^*, θ^* 别满足 (3.3)–(3.5) 式, 从 t 到 T 积分, 在 $Z^\theta(t) = z, X(t, u) = x$ 的条件下在概率测度 P 下取条件期望, 应用 Bayes 准则, 得到

$$\begin{aligned} & V^{u, \theta}(t, x) \\ = & -\frac{1}{m} g_1(t) e^{-mxe^{r_0(T-t)}} + \frac{1}{z} E \left\{ \int_t^T Z^\theta(s) e^{-mX(s, u) e^{r_0(T-s)}} \left[-\frac{m\sigma^2}{2} g_1(s) e^{2r_0(T-s)} [\pi(s) - \pi^*(s)]^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{m\beta^2}{2} g_1(s) e^{2r_0(T-s)} [a(s) - a^*(s)]^2 + \frac{g_1(s)}{2m} [\theta(s) - \theta^*(s)]^2 \right] ds \right\}. \end{aligned}$$

因为 $g_1(t) > 0, Z^\theta(t) > 0$, 所以问题得证. 证毕.

注 1 从 (3.3), (3.4) 式可以看出, 当 $a^* < 1$ 时, 在市场出现最坏的情况时, 投资者将卖空风险资产 ($\pi^* < 0$) 还对冲承保风险.

3.1.2 当 $\eta\alpha < \frac{\beta(r-r_0)}{\sigma}$ 时

引理 2 $g_2(t)$ 满足下面的常微分方程

$$g_2'(t) + g_2(t)m\alpha(\eta - v)e^{r_0(T-t)} = 0, g_2(T) = 1, \quad (3.7)$$

则

$$g_2(t) = \exp\left\{\frac{m\alpha(\eta - v)}{r_0}[e^{r_0(T-t)} - 1]\right\}. \quad (3.8)$$

证 解常微分方程 (3.7) 即可得到 (3.8) 式. 求解过程略.

定理 2 随机微分博弈问题 (2.3) 的最优投资策略为

$$\pi^* = 0; \quad (3.9)$$

最优再保险策略为

$$a^* = 1; \quad (3.10)$$

市场的最优策略为

$$\theta^* = \frac{r - r_0}{\sigma}. \quad (3.11)$$

值函数满足下式

$$V(t, x) = -\frac{1}{m}g_2(t)\exp\{-mxe^{r_0(T-t)}\}, \quad (3.12)$$

$g_2(t)$ 满足 (3.8) 式.

证 由 (3.4) 式知当 $\eta\alpha < \frac{\beta(r-r_0)}{\sigma}$ 时, 再保险策略 $a > 1$, 所以此时最优再保险策略 $a^* = 1$. 把 $a^* = 1$ 代入 (2.1) 式, 对 $-\frac{1}{m}zg_2(t)e^{-mxe^{r_0(T-t)}}$ 应用 Ito 公式, 结合 (3.8) 式和定理 1 类似的即可证明. 这里我们忽略该定理的证明.

注 2 从 (3.9), (3.10) 式可以看出, 在 $a^* = 1$ 即完全分保时, 在风险资产上的投资金额为零, 即全部资金用来购买无风险资产.

注 3 文 [8] 所得结论, 令其中的 $\rho = 0$ 即为本文定理 1 和定理 2 的结论. 文 [8] 通过求解 HJBI 方程得到了最优策略和值函数, 本文我们使用线性 - 二次控制理论得出了同样的结论 (本文为了计算方便假设 $\rho = 0$, 当 ρ 不等于 0 仍可用线性 - 二次控制理论得出最优策略和值函数的显示解).

3.2 幂效用函数

本节假设效用函数为幂效用 $W(x) = \frac{x^p}{p}$ ($0 < p < 1$), 下面我们将在该效用函数下求解投资者和市场之间的零和微分博弈问题, 得到最优策略和值函数的显示解.

3.2.1 当 $\eta\alpha \geq \frac{\beta(r-r_0)}{\sigma}$ 时

引理 3 $f_1(t), h_1(t)$ 满足下面的常微分方程

$$f_1'(t) + f_1(t)[r_0p + \frac{p}{4(1-p)}(\frac{r-r_0}{\sigma} - \eta\alpha)^2] = 0, f_1(T) = 1, \quad (3.13)$$

$$h_1'(t) - r_0h_1(t) + (\eta - v)\alpha = 0, h_1(T) = 0, \quad (3.14)$$

则

$$f_1(t) = \exp\{[r_0 p + \frac{p}{4(1-p)}(\frac{r-r_0}{\sigma} - \eta\alpha)^2](T-t)\}, \quad (3.15)$$

$$h_1(t) = \frac{(\eta-v)\alpha}{r_0}[1 - e^{-r_0(T-t)}]. \quad (3.16)$$

证 解常微分方程 (3.13), (3.14) 式即可得到 (3.15), (3.16) 式. 求解过程略.

定理 3 随机微分博弈问题 (2.3) 的最优投资策略为

$$\pi^* = \frac{x - h_1(t)}{2(1-p)\sigma^2}(r - r_0 - \frac{\sigma\eta\alpha}{\beta}); \quad (3.17)$$

最优再保险策略为

$$\pi^* = 1 - \frac{x - h_1(t)}{2(1-p)\beta^2}(\eta\alpha - \frac{\beta(r-r_0)}{\sigma}); \quad (3.18)$$

市场的最优策略为

$$\theta^* = \frac{1}{2}(\frac{(r-r_0)}{\sigma} + \frac{\eta\alpha}{\beta}). \quad (3.19)$$

值函数满足下式

$$V(t, x) = f_1(t) \frac{[x - h_1(t)]^p}{p}, \quad (3.20)$$

$f_1(t), h_1(t)$ 分别满足 (3.15), (3.16) 式.

证 令 $u(\cdot), \theta(\cdot)$ 是任意两个可行的策略, $X(t, u)$ 满足 (2.1) 式的控制过程, 对

$$f_1(t) \frac{[X(t, u) - h_1(t)]^p}{p} z^\theta$$

应用 Ito 公式, 结合 (3.13), (3.14) 式有

$$\begin{aligned} & d[f_1(t) \frac{[x - h_1(t)]^p}{p} Z^\theta(t)] \\ &= \frac{Z^\theta(t)}{p} \{f_1'(t)[X(t, u) - h_1(t)]^p + f_1(t)(-p[X(t, u) - h_1(t)]^{p-1}h_1'(t) \\ &\quad + p[X(t, u) - h_1(t)]^{p-1}[(v - \eta a(t))\alpha + \pi(t)(r - r_0) + r_0 X(t, u(t))]) \\ &\quad + \frac{1}{2}p(p-1)[X(t, u) - h_1(t)]^{p-2}[\beta^2(1-a)^2 \\ &\quad + \sigma^2\pi^2] - p[X(t, u) - h_1(t)]^{p-1}[(1-a)\beta + \sigma\pi]\theta\}dt \\ &\quad - f_1(t) \frac{[x - h_1(t)]^p}{p} Z^\theta(t)\theta(t)[dW_1(t) + dW_2(t)] \\ &\quad + f_1(t)[X(t, u) - h_1(t)]^p Z^\theta(t)[(1-a)\beta dW_1(t) + \sigma\pi dW_2(t)] \\ &= \frac{Z^\theta(t)}{p} \{\frac{1}{2}p(p-1)\sigma^2[X(t, u) - h_1(t)]^{p-2}[\pi(t) - \pi^*(t)]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}p(p-1)\beta^2[X(t, u) - h_1(t)]^{p-2}[a(t) - a^*(t)]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{p}{(1-p)\beta^2}[\theta(t) - \theta^*(t)]^2\}dt - f_1(t) \frac{[x - h_1(t)]^p}{p} Z^{\theta(t)\theta}(t)[dW_1(t) + dW_2(t)] \\ &\quad + f_1(t)[X(t, u) - h_1(t)]^p Z^\theta(t)[(1-a)\beta dW_1(t) + \sigma\pi dW_2(t)], \end{aligned}$$

其中 π^*, a^*, θ^* 分别满足 (3.17)–(3.19) 式, 从 t 到 T 积分, 在 $Z^\theta(t) = z, X(t, u) = x$ 的条件下在概率测度 P 下取条件期望, 应用 Bayes 准则, 得到

$$\begin{aligned} V^{u, \theta}(t, x) = & f_1(t) \frac{[X(t, u) - h_1(t)]^p}{p} \\ & + \frac{1}{z} E \left\{ \int_t^T \frac{Z^\theta(s)}{p} \left[\frac{1}{2} p(p-1) \sigma^2 [X(s, u) - h_1(s)]^{p-2} [\pi(s) - \pi^*(s)]^2 \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} p(p-1) \beta^2 [X(s, u) - h_1(s)]^{p-2} [a(s) - a^*(s)]^2 \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{p}{(p-1) \beta^2} [X(s, u) - h_1(s)]^{p-2} [\theta(s) - \theta^*(s)]^2 \right\} ds, \end{aligned}$$

所以问题得证. 证毕.

注 4 从 (3.17), (3.18) 式可以看出, 当 $a^* < 1$ 时, 在市场出现最坏的情况时, 投资者将卖空风险资产 ($\pi^* < 0$) 还对冲承保风险. 得出的结论和指数效用下的结论相同.

3.2.2 当 $\eta\alpha < \frac{\beta(r-r_0)}{\sigma}$ 时

引理 4 $f_2(t), h_2(t)$ 满足下面的常微分方程

$$f_2'(t) + r_0 p f_2(t) = 0, f_2(T) = 1, \quad (3.21)$$

$$h_2'(t) - r_0 h_2(t) + (\eta - v)\alpha = 0, h_2(T) = 0, \quad (3.22)$$

则

$$f_2(t) = e^{r_0 p(T-t)}, \quad (3.23)$$

$$h_2(t) = h_1(t) = \frac{(\eta - v)\alpha}{r_0} [1 - e^{-r_0(T-t)}]. \quad (3.24)$$

证 解常微分方程 (3.21), (3.22) 式即可得到 (3.23), (3.24) 式. 求解过程略.

定理 4 随机微分博弈问题 (2.3) 的最优投资策略为

$$\pi^* = 0; \quad (3.25)$$

最优再保险策略为

$$\pi^* = 1; \quad (3.26)$$

市场的最优策略为

$$\theta^* = \frac{r - r_0}{\sigma}. \quad (3.27)$$

值函数满足下式

$$V(t, x) = f_2(t) \frac{[x - h_2(t)]^p}{p}, \quad (3.28)$$

$f_2(t), h_2(t)$ 分别满足 (3.23), (3.24) 式.

证 由 (3.4) 式知当 $\eta\alpha < \frac{\beta(r-r_0)}{\sigma}$ 时, 再保险策略 $a > 1$, 所以此时最优再保险策略 $a^* = 1$. 把 $a^* = 1$ 代入 (2.1) 式, 对 $f_2(t) \frac{[X(t, u) - h_2(t)]^p}{p} z^\theta$ 应用 Ito 公式, 结合 (3.23), (3.24) 式和定理 3 类似的即可证明. 这里我们忽略该定理的证明.

注 5 从 (3.25), (3.26) 式可以看出, 在 $a^* = 1$ 即完全分保时, 在风险资产上的投资金额为零, 即全部资金用来购买无风险资产. 该结论和指数效用时相同.

参 考 文 献

- [1] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. *Mathematics Methods Operator Research*, 1995, 20(4): 937–957.
- [2] Yang H, Zhang L. Optimal investment for insurer with jump diffusion risk process[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2005, 37(3): 615–634.
- [3] Bai L, Guo J. Optimal proportional reinsurance and investment with multiple risky assets and no-shorting constraint[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42(3): 968–975.
- [4] Isaacs R. *Differential games* [M]. New York: Wiley, 1965.
- [5] Mataramvura S, Sendal B. Risk minimizing portfolios and HJBI equations for stochastic differential games [J]. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 2008, 4: 317–337.
- [6] Siu T K. A game theoretic approach to option valuation under Markovian regime-switching models[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42(3): 1146–1158.
- [7] Browne S. Stochastic differential portfolio games [J]. *Journal of Applied Probability*, 2000, 37(1): 126–147.
- [8] 罗琰, 杨招军. 基于随机微分博弈的保险公司最优决策模型 [J]. *保险研究*, 2101, 8: 48–52.
- [9] Promislow D S, Young V R. Minimizing the probability of ruin when claims follow Brownian motion with drift[J]. *North American Actuarial Journal*, 2005, 9(3): 109–128.

STOCHASTIC DIFFERENTIAL GAMES WITH REINSURANCE
AND INVESTMENT

YANG Peng

(Department of Basic, Xijing College, Xi'an 710123, China)

Abstract: This paper investigates a stochastic differential games problem with reinsurance and investment. Under exponential utility and power utility, by using linear-quadratic control theory, we obtain optimal reinsurance strategies, investment strategies and optimal market strategies as well as the value function closed form expressions. We generalize the results of paper [8]. Through this research when the market is worst, we can guide insurance company to select the appropriate reinsurance and investment strategies to maximize his wealth.

Keywords: stochastic differential games; linear-quadratic control; exponential utility; power utility

2010 MR Subject Classification: 91A30; 91B30