Vol. 34 (2014)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

威布尔分布族刻度参数的经验 Bayes 检验函数的收敛速度

黄金超 [1]，凌能祥 [2]

(1. 滁州职业技术学院基础部, 安徽 滁州 239000)
(2. 合肥工业大学数学学院, 安徽 合肥 230009)

摘 要: 本文研究了在"加权线性损失"下, 威布尔分布族刻度参数经验 Bayes(EB) 检验问题. 利用概率密度函数的递归核估计, 构造了刻度参数的经验 Bayes 检验函数, 并获得了它的收敛速度, 在适当的条件下, 收敛速度的阶可任意接近 $O(n^{-1})$, 推广了文献的结果. 最后给出一个有关本文主要结果的例子.

关 键 词: 威布尔分布族; 密度函数的递归核估计; 单调 Bayes 检验函数; EB 检验; 收敛速度

MR(2010) **主题分类号**: 62C12; 62F05 **中图分类号**: O212.8

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2014)04-0729-10

1 引言

经验 Bayes(EB) 检验函数问题在文献中已有许多研究, 对于连续型单参数指数族参数的 EB 检验问题, 如 Johns VR[1] , Van Houwelingen[2], Liang[3] 等对其做了不同程度的工作, 魏莉等 [4] 研究了刻度指数族参数的经验 Bayes 检验的收敛速度, 陈玲等 [5] 研究了连续单参数指数参数的经验 Bayes 检验的收敛速度, 黄金超等 [6] 在"线性损失"下利用普通核估计研究了威布尔 (Weibull) 分布族刻度参数的经验 Bayes 检验问题, 在适当的条件下获得的收敛速度的阶可任意接近 $O(n^{-\frac{1}{2}})$, 但以上几乎所有研究 EB 检验问题的文献中, 都是利用密度函数的普通核估计来研究的, 与以上文献主要不同, 本文利用递归核估计构造威布尔 (Weibull) 分布族刻度参数的经验 Bayes 检验函数, 并在"加权线性损失"下利用密度函数的递归核估计和 Bayes 检验函数的单调性, 修改 EB 检验函数的构造方法, 在较弱的条件下极大改进了文献 [6] 的收敛速度阶的结果, 在适当的条件下收敛速度的阶可任意接近 $O(n^{-1})$, 且证明方法较简洁.

考虑如下模型见文献 [6]; 设随机变量 X 条件概率密度为

$$f(x|\theta) = (mx^{m-1}/\theta)\exp(-x^m/\theta)I_{(x>0)}, \tag{1.1}$$

其中 m 和 θ 分别为形状参数和刻度参数 ($m > 0$), 且本文假定 m 为已知常数, 样本空间为 $\chi = \{x|x > 0\}$, 参数空间为 $\Omega = \{\theta|\theta > 0\}$.

本文考虑分布族 (1.1) 式中参数 θ 的 EB 检验问题：

$$H_0 : \theta \le \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0, \tag{1.2}$$

*收稿日期: 2013-08-18 接收日期: 2013-09-29
基金项目：安徽省高校自然科学基金资助项目 (KJ2013Z252).
作者简介：黄金超 (1974–), 男, 安徽凤阳, 讲师, 主要研究方向：应用统计与风险决策.

其中 $\theta_0>0$ 为已知常数.

对检验函数 (1.2) 式损失函数为下列的 "加权线性损失"

$$L_j(\theta,d_j)=(1-j)a((\theta-\theta_0)/\theta)I_{[\theta-\theta_0>0]}+ja((\theta_0-\theta)/\theta)I_{[\theta-\theta_0\le 0]}\ \ (j=0,1), \tag{1.3}$$

其中 a 是正常数, $D=\{d_0,\ d_1\}$ 是行动空间, d_0 表示接受 H_0, d_1 表示否定 H_0, $I_{[A]}$ 表示集合 A 的示性函数, 之所以取"加权线性损失"函数是考虑到它对刻度参数更为合理, 易于构造其 EB 检验函数.

设

$$\delta(x)=P(H_0|X=x) \tag{1.4}$$

为随机化判别函数, 则在先验分布 $G(\theta)$ 下 $\delta(x)$ 的风险函数为

$$\begin{aligned}R(\delta,G) &= \int_\Omega\int_\chi[L_0(\theta,d_0)f(x|\theta)\delta(x)+L_1(\theta,d_1)f(x|\theta)(1-\delta(x))]dxdG(\theta)\\ &= \int_\Omega\int_\chi[L_0(\theta,d_0)-L_1(\theta,d_1)]f(x|\theta)\delta(x)dxdG(\theta)+\int_\Omega\int_\chi L_1(\theta,d_1)f(x|\theta)dxdG(\theta)\\ &= a\int_\chi\alpha(x)\delta(x)dx+C_G, \end{aligned}\tag{1.5}$$

此处

$$\begin{aligned}C_G &= \int_\Omega\int_\chi L_1(\theta,d_1)f(x|\theta)dxdG(\theta)=\int_\Omega L_1(\theta,d_1)dG(\theta),\\ \alpha(x) &= \int_\Omega[(\theta-\theta_0)/\theta]f(x|\theta)dG(\theta)=\int_\Omega[(1-\theta_0/\theta]f(x|\theta)dG(\theta)\\ &= \theta_0p^{(1)}(x)+f(x)=\theta_0f(x)(\theta_0^{-1}-\varphi(x)),\end{aligned}\tag{1.6}$$

其中

$$f(x)=\int_\Omega f(x|\theta)dG(\theta)=\int_\Omega\theta^{-1}mx^{m-1}\exp(-x^m/\theta)dG(\theta)=u(x)p(x) \tag{1.7}$$

为 r.v.X 的边缘分布, 而 $u(x)=mx^{m-1}$, $p(x)=\int_\Omega\theta^{-1}\exp(-x^m/\theta)dG(\theta)$,

$$\varphi(x)=-\frac{p^{(1)}(x)}{f(x)}=\frac{\int_\Omega\theta^{-2}\exp(-x^m/\theta)dG(\theta)}{\int_\Omega\theta^{-1}\exp(-x^m/\theta)dG(\theta)}=E(\theta^{-1}|x), \tag{1.8}$$

$$p^{(1)}(x)=-mx^{m-1}\int_\Omega\theta^{-2}\exp(-x^m/\theta)dG(\theta).$$

由 (1.6) 式和 (1.7) 式 $\alpha(x)$ 的另一表达式

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \theta_0f(x)(\theta_0^{-1}-\varphi(x))=(1-\theta_0\frac{u^{(1)}(x)}{u^{(2)}(x)})f(x)+\frac{\theta_0}{u(x)}f^{(1)}(x)\\ &= g(x)f(x)+\frac{\theta_0}{u(x)}f^{(1)}(x),\end{aligned}\tag{1.9}$$

其中 $g(x)=1-\theta_0\frac{u^{(1)}(x)}{u^{(2)}(x)}$, $u(x)$ 由 (1.7) 式给出

$$u^{(1)}(x)=m(m-1)x^{m-2}, u^{(2)}(x)=m(m-1)(m-2)x^{m-3}.$$

由柯西—施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式和 (1.8) 式可得

$$\begin{aligned} & \varphi^{(1)}(x) \\ = & \frac{mx^{m-1}[-\int_\Omega \theta^{-3}\exp(-\frac{x^m}{\theta})dG(\theta)\int_\Omega \theta^{-1}\exp(-\frac{x^m}{\theta})dG(\theta)+(\int_\Omega \theta^{-2}\exp(-\frac{x^m}{\theta})dG(\theta))^2]}{[\int_\Omega \theta^{-1}\exp(-\frac{x^m}{\theta})dG(\theta)]^2} \\ \le & 0, \end{aligned} \tag{1.10}$$

所以对 $0<x<+\infty$, $\varphi(x)$ 是单调连续减函数.

本文假设先验 $G(\theta)$ 是非退化的且满足

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)<\theta_0^{-1}<\lim_{x\to 0^+}\varphi(x). \tag{1.11}$$

在假定 (1.11) 式成立下, 故 $\varphi(x)$ 是严格单调降的, 再由 $\varphi(x)$ 的连续性和连续函数的介值定理可知必存在点 $a_G\in(0,+\infty)$, 使得 $\varphi(a_G)=\theta_0^{-1}$. 又由 (1.9) 式可知

$$\alpha(x)\le 0 \Longleftrightarrow \varphi(x)\ge\theta_0^{-1}\Longleftrightarrow x\le a_G, \alpha(x)>0\Longleftrightarrow \varphi(x)<\theta_0^{-1}\Longleftrightarrow x>a_G.$$

因此由 (1.5) 式可知 Bayes 判决函数为

$$\delta_G(x)=\begin{cases}1, & \alpha(x)\le 0,\\ 0, & \alpha(x)>0\end{cases}=\begin{cases}1, & \varphi(x)\ge\theta_0^{-1},\\ 0, & \varphi(x)<\theta_0^{-1}\end{cases}=\begin{cases}1, & x\le a_G,\\ 0, & x>a_G,\end{cases} \tag{1.12}$$

其 Bayes 风险为

$$R(G)=\inf_\delta R(\delta,G)=R(\delta_G,G)=a\int_\chi \alpha(x)\delta_G(x)dx+C_G. \tag{1.13}$$

在 (1.13) 式中, 当先验分布 $G(\theta)$ 已知, 且 $\delta(x)=\delta_G(x)$ 是可以达到的, 但此处 $G(\theta)$ 未知, 因而 $\delta_G(x)$ 无使用价值, 于是考虑引入 EB 方法.

本文第二节利用概率密度函数递归核估计和 Bayes 检验函数的单调性, 给出 EB 检验函数的构造法, 对文献 [6] 中的检验函数做了本质的修改. 第三节在独立同分布条件下, 证明 Bayes 检验函数的收敛速度, 这一收敛速度改进文献 [6] 的结果. 最后给出满足定理条件的先验分布是存在的.

2 EB 检验函数的构造

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 X 是独立同分布样本 (iid), 它们具有共同的边缘密度函数如 (1.7) 式所示, 通常称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为历史样本, 称 X 为当前样本, 令 $f(x)$ 为 X_1 的概率密度函数, 同分布样本 (iid) 作如下假定:

(A) $f(x)\in C_{s,a}$.

假定 $C_{s,a}$ 表示 R^1 中一族概率密度函数, 其 s 阶导数存在, 连续且绝对值不超过 α, $s>2$ 为正整数.

令 $K_r(x)(r=0,1,2,\cdots,s-1)$ 是 Borel 可测的有界函数, 在区间 (0,1) 之外为零, 且满足下列的条件 (B):

(B$_1$) $\frac{1}{t!}\int_0^1 y^t K_r(y)dy=\begin{cases}1, & t=r,\\ 0, & t\neq r, t=1,2,\cdots,s-1.\end{cases}$

(B$_2$) $K_r(x)$ 在 R^1 上除有限点集 E_0 外是可微的, 且

$$\sup_{x\in R^1-E_0}|K_r'(x)|\,|\leq C<\infty.$$

本文假定先验分布 $G(\theta)$ 非退化, 且属于下列先验分布类:

(C) $\Gamma(A_1,A_2)=\{G(\theta)|A_1<a_G<A_2,\ A_1,A_2$ 为给定的正常数 $\}$,
通常取 A_1 为充分小正数, A_2 为充分大正数.

记 $f^{(0)}(x)=f(x)$, $f^{(r)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的第 r 阶导数, $r=0,1,\cdots,s$. 类似文献 [7] 定义密度函数 $f^{(r)}(x)$ 的递归核估计为

$$f_n^{(r)}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{nh_i^{1+r}}K_r(\frac{X_i-x}{h_i}), \tag{2.1}$$

其中为 $\{h_n\}$ 正数递减序列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$ 是满足条件 (B) 的核函数, 这种估计具有一种递归性质, 即

$$f_n^{(r)}(x)=\frac{n-1}{n}f_{n-1}^{(r)}(x)+\frac{1}{nh_n^{1+r}}K_r(\frac{X_n-x}{h_n}).$$

由上式递推关系可知, 用递归核估计去估计 $f^{(r)}(x)$ 时, 只需通过上式进行递归计算, 即在样本点增加地情形下，不需要重新计算每一项, 仅计算新的添加项, 而用普通的核估计的话需要重新计算每一项, 所以可以大大减少计算量. 另外, 递归核估计在不同区间能取不同的适当窗宽, 从而克服了核估计的过分平滑和过分锐化, 能够较全面地描述密度函数, 因此大大地提高了估计的效率.

定义 $\alpha(x)$ 的估计量由下式给出

$$\alpha_n(x)=g(x)f_n(x)+\frac{\theta_0}{u(x)}f_n^{(1)}(x), \tag{2.2}$$

由先验假设 (C) 给出的 A_1,A_2, 结合 (1.12) 式, EB 检验函数定义为

$$\delta_n(x)=\begin{cases}1, & x\leq A_1 \text{ 或 } (A_1<x<A_2 \text{ 且 } \alpha_n(x)\leq 0),\\ 0, & x\geq A_2 \text{ 或 } (A_1<x<A_2 \text{ 且 } \alpha_n(x)>0).\end{cases} \tag{2.3}$$

EB 检验这样的构造方法最先由文献 [8] 对正指数分布族提出来的.

本文中令 E_n 表示对 r.v.$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布求均值, 则的全面 Bayes 风险为

$$R_n=R_n(\delta_n,G)=a\int_x \alpha(x)E_n[\delta_n(x)]dx+C_G. \tag{2.4}$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = R(G)$, 则称 $\{\delta_n(x)\}$ 为 a.o. 的 EB 检验函数, $R_n - R(G) = O(n^{-q}), q > 0$, 则称 EB 检验函数 $\{\delta_n(x)\}$ 的收敛速度阶为 $O(n^{-q})$, 为导出 δ_n 的收敛速度, 我们给出下述引理.

令 $c, c_0, c_1, c_2, \cdots$ 表示常数, 即使在同一式子中它们也可能不同的数值.

引理 2.1 设 $f_n^{(r)}(x)$ 由 (2.1) 式定义, $s \geq 3$ 的正整数, 其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立同分布 (iid) 样本序列, 若条件 (A) 和 (B) 成立且 $f_n^{(r)}(x)$ 连续, $h_n \downarrow 0$ 当取 $h_n = n^{-\frac{1}{2(s-1)}}$ 时, 对 $0 < \lambda \leq 1$, 则有

$$E_n|f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^{2\lambda} \leq cn^{-\frac{\lambda(s-r-1.5)}{s-1}}, r = 0, 1.$$

证 由 C_r 不等式可知, 对 $r = 0, 1$ 有

$$\begin{aligned} E_n|f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^{2\lambda} &\leq c_1|E_n f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^{2\lambda} + c_2[\mathrm{Var}(f_n^{(r)}(x))]^{\lambda} \\ &= c_1 I_1^{2\lambda} + c_2 I_2^{\lambda}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

由递归函数的核估计和核函数的性质, 可知

$$\begin{aligned} E_n f_n{}^{(r)}(x) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i{}^{1+r}} E_n(K_r(\frac{X_i - x}{h_i})) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i{}^{1+r}} \int_x^{x+h_i} K_r(\frac{y-x}{h_i}) f(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i{}^{r}} \int_0^1 K_r(t) f(x + th_i)\mathrm{dt}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

由 Taylor 展开得

$$f(x + th_n) = f(x) + \sum_{l=1}^{s-1} f^{(l)}(x)\frac{(th_n)^l}{l!} + f^{(s)}(x^*)\frac{(th_n)^s}{s!} \ \ (x \leq x^* \leq x + th_n), \tag{2.7}$$

将 (2.7) 式代入 (2.6) 式, 可得

$$\begin{aligned} E_n f_n^{(r)}(x) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i^r}[f^{(r)}(x)h_i^{(r)} + \int_0^1 K_r(t) f^{(s)}(x^*)\frac{(th_i)^s}{s!}dt] \\ &= f^{(r)}(x) + \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} h_i^{s-r} \int_0^1 K_r(t) f^{(s)}(x^*)\frac{t^s}{s!}dt], \end{aligned} \tag{2.8}$$

由 $f(x) \in C_{s,a}$, 及 $|K_r(t)| \leq C$, 可知

$$I_1 = |E_n f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)| \leq c\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i^{s-r}, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathrm{Var}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i^{1+r}} K_r(\frac{X_i - x}{h_i})] \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2 h_i^{2+2r}} E_n[K_r(\frac{X_i - x}{h_i})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2 h_i^{2+2r}} \int_x^{x+h_i} K_r^2(\frac{y-x}{h_i}) f(y)dy = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i^{1+2r}} \int_0^1 K_r^2(t) f(x + th_i)dt, \end{aligned}$$

再由 $f(x)\in C_{s,a}$, 及 $|K_r(t)|\le C$, h_n 单调递减 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n=0$ 可知

$$I_2\le c(nh_n^{1+2r})^{-1}. \tag{2.10}$$

取 $h_i=i^{-\frac{1}{2(s-1)}}$ 时, 可知

$$h_i=i^{-\frac{1}{2(s-1)}}\le i^{-\frac{1}{2(s-r)}}\ \ (r=0,1),$$

由 (2.9) 式, 可得

$$I_1\le c\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h_i^{s-r}\le c\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i^{-\frac{1}{2}}\le c\frac{1}{n}\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}dx\le cn^{-\frac{1}{2}},$$

故有

$$I_1^{2\lambda}\le cn^{-\lambda}. \tag{2.11}$$

由 (2.10) 式, 取 $h_n=n^{-\frac{1}{2(s-1)}}$ 时, 有

$$I_2^{\lambda}\le c(nh_n^{1+2r})^{-\lambda}\le cn^{-\frac{\lambda(s-r-1.5)}{s-1}}. \tag{2.12}$$

将 (2.11) 式和 (2.12) 式代入 (2.5) 式, 结论成立.

注 2.1 当 $\lambda\longrightarrow 1, s\longrightarrow\infty$ 时, $O(n^{-\frac{\lambda(s-r-1.5)}{s-1}})$ 可任意接近 $O(n^{-1})$.

3 EB 检验函数的收敛速度

定理 3.1 设 $\delta_n(x)$ 由 (2.3) 式定义, 其中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布的样本序列. 且假定 $(A)-(C)$ 成立, 且 $f_n^{(r)}(x)$ 连续, $h_n\downarrow 0$, 若 $0<\lambda\le 1$, 取 $h_n=n^{-\frac{1}{2(s-1)}}$ 时, 则有

$$R_n-R(G)=O(n^{-\frac{\lambda(s-2.5)}{s-1}}).$$

此处 $s>2$ 为给定的一个正整数.

证 由 (1.13) 式和 (2.4) 式, 可知

$$\begin{aligned}0 &\le (R_n-R(G))=a\int_0^\infty \alpha(x)[E_n(\delta_n(x))-\delta_G(x)]dx\\ &= a\int_0^{A_1}\alpha(x)[E_n(\delta_n(x))-\delta_G(x)]dx+a\int_{A_1}^{a_G}\alpha(x)[E_n(\delta_n(x))-\delta_G(x)]dx\\ &\quad +a\int_{a_G}^{A_2}\alpha(x)[E_n(\delta_n(x))-\delta_G(x)]dx+a\int_{A_2}^{\infty}\alpha(x)[E_n(\delta_n(x))-\delta_G(x)]dx\\ &= a\sum_{i=1}^{4}J_i,\end{aligned} \tag{3.1}$$

由 (1.9) 式和 (2.2) 式, C_r 不等式与引理 2.1 可知

$$\begin{aligned}E|\alpha_n(x)-\alpha(x)|^{2\lambda} &= E|[f_n(x)-f(x)]g(x)+\frac{\theta_0}{u(x)}[f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)]|^{2\lambda}\\ &\le c_1|g(x)|^{2\lambda}E|f_n(x)-f(x)|^{2\lambda}+c_2[\frac{\theta_0}{u(x)}]^{2\lambda}E|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)|^{2\lambda}\\ &\le [c_1|g(x)|^{2\lambda}+c_2[u(x)]^{-2\lambda}]n^{-\frac{\lambda(s-2.5)}{s-1}},\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $g(x)$ 和 $u(x)$ 分别 (1.7) 式和 (1.9) 式给出.

当 $x \in (0, A_1)$ 时, 由 (1.12) 式和 (2.3) 式可知 $\delta_n(x) = 1$, $\delta_G(x) = 1$, $x \in (A_2, \infty)$ 时, $\delta_n(x) = 0$, $\delta_G(x) = 0$. 故

$$E_n(\delta_n(x)) - \delta_G(x) = 0,$$

因此

$$J_1 = \int_0^{A_1} \alpha(x)[E_n(\delta_n(x)) - \delta_G(x)]dx = 0, \tag{3.3}$$

$$J_4 = \int_{A_4}^{\infty} \alpha(x)[E_n(\delta_n(x)) - \delta_G(x)]dx = 0. \tag{3.4}$$

当 $x \in (A_1, a_G)$ 时, 由 (1.12) 式和 (2.3) 式可知, $\delta_G(x) = 1$, $E_n\delta_n(x) = p(\alpha_n(x) < 0)$, 利用 Markov 不等式和 (3.2) 式有

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{A_1}^{a_G} \alpha(x)[E_n(\delta_n(x)) - \delta_G(x)]dx \\
&\le \int_{A_1}^{a_G} \alpha(x)[p(\alpha_n(x) < 0) - 1]dx \\
&\le \int_{A_1}^{a_G} |\alpha(x)| p(|\alpha_n(x) - \alpha(x)|) \ge |\alpha(x)| dx \\
&\le \int_{A_1}^{a_G} |\alpha(x)|^{1-2\lambda} E|\alpha_n(x) - \alpha(x)|^{2\lambda} dx \\
&\le cn^{-\frac{\lambda(s-2.5)}{s-1}}[c_1 \int_{A_1}^{a_G} |\alpha(x)|^{1-2\lambda} |u(x)|^{-2\lambda} dx \\
&\quad + c_2 \int_{A_1}^{a_G} |\alpha(x)|^{1-2\lambda} |g(x)|^{2\lambda} dx].
\end{aligned}$$

当 $0 < \lambda \le -\frac{1}{2}$ 时, $0 \le 1 - 2\lambda < 1$, 且 $|\alpha(x)|^{1-2\lambda}$, $|u(x)|^{-2\lambda}$ 和 $|g(x)|^{2\lambda}$ 关于 x 在闭区间 $[A_1, a_G]$ 上连续函数, 由闭区间上连续函数的有界性知,

$$\int_{A_1}^{a_G} |\alpha(x)|^{1-2\lambda} |u(x)|^{-2\lambda} dx < \infty, \int_{A_1}^{a_G} |\alpha(x)|^{1-2\lambda} |g(x)|^{2\lambda} dx < \infty,$$

因此

$$J_2 \le cn^{-\frac{\lambda(s-2.5)}{s-1}}.$$

当 $\frac{1}{2} < \lambda \le 1$ 时,

$$\lim_{x \to a_G^-} |\alpha(x)| = \lim_{x \to a_G^-} \theta_0 f(x) \left|(\theta_0{}^{-1} - \varphi(x))\right| = 0$$

且

$$\int_{A_1}^{a_G} |\alpha(x)|^{1-2\lambda} dx = \int_{A_1}^{a_G} \frac{1}{|\alpha(x)|^{2\lambda-1}} dx$$

是第 2 类瑕积分, 瑕点为 $x=a_G$, 由 (1.8) 式, (1.10) 式和第 2 类瑕积分的比较判别法则, 可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a_G^-}\tfrac{(a_G-x)^{2\lambda-1}}{|\alpha(x)|^{2\lambda-1}} &= \lim_{x\to a_G^-}\big(\tfrac{1}{f(x)}\tfrac{a_G-x}{\theta_0\varphi(x)-1}\big)^{2\lambda-1}\\ &= \big(\tfrac{1}{\theta_0 f(a_G)}\lim_{x\to a_G}\big(\tfrac{-1}{\varphi^{(1)}(x)}\big)\big)^{2\lambda-1}\\ &= \big(\tfrac{1}{\theta_0 f(a_G)}\tfrac{1}{\left|\varphi^{(1)}(a_G)\right|}\big)^{2\lambda-1}>0,\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{A_1}^{a_G}\frac{1}{|\alpha(x)|^{2\lambda-1}}dx$ 与 $\displaystyle\int_{A_1}^{a_G}\frac{1}{(a_G-x)^{2\lambda-1}}dx$ 同敛散, 因为 $\frac{1}{2}<\lambda\le 1$ 时, $\displaystyle\int_{A_1}^{a_G}\frac{1}{(a_G-x)^{2\lambda-1}}dx$ 是收敛的, 因此 $\displaystyle\int_{A_1}^{a_G}|\alpha(x)|^{1-2\lambda}dx$ 收敛, $\frac{1}{u(x)}$, $\frac{u^{(1)}(x)}{u^{(2)}(x)}$ 均为闭区间 $[A_1,a_G]$ 连续函数, 故连续函数有界性知 $|u(x)|^{-2\lambda}\le M_1$, $|g(x)|^{2\lambda}\le M_2$, 故

$$J_2=cn^{-\frac{\lambda(s-2.5)}{s-1}}[c_1M_1\int_{A_1}^{a_G}|\alpha(x)|^{1-2\lambda}dx+c_2M_2\int_{A_1}^{a_G}|\alpha(x)|^{1-2\lambda}dx]\le cn^{-\frac{\lambda(s-2.5)}{s-1}}. \tag{3.5}$$

同理可证

$$\begin{aligned}J_3 &= \int_{a_G}^{A_2}\alpha(x)[E_n(\delta_n(x))-\delta_G(x)]dx\\ &\le \int_{a_G}^{A_2}|\alpha(x)|p(|\alpha_n(x)-\alpha(x)|\ge|\alpha(x)|)dx\\ &\le \int_{a_G}^{A_2}|\alpha(x)|^{1-2\lambda}E|\alpha_n(x)-\alpha(x)|^{2\lambda}dx\\ &\le cn^{-\frac{\lambda(s-2.5)}{s-1}}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

所以将 (3.3)–(3.6) 式代入 (3.1) 式可得

$$R_n-R(G)=a\sum_{i=1}^{4}J_i=O(n^{-\frac{\lambda(s-2.5)}{s-1}}).$$

注 3.1 文献 [6] 在 iid 样本下给出的经验 Bayes(EB) 检验函数, 收敛速度阶为 $O(n^{-\frac{\lambda s}{2s+1}})$, 其中 $0<\lambda\le 1$, $s\ge 2$, $\lambda\longrightarrow 1, s\longrightarrow\infty$, 收敛速度的阶可任意接近 $O(n^{-\frac{1}{2}})$. 本文在 iid 样本下利用递归核估计和 EB 检验函数的单调性, 构造 EB 检验函数, 得到收敛速度的阶为 $O(n^{-\frac{\lambda(s-2.5)}{s-1}})$, 其中 $0<\lambda\le 1$, $s\ge 3$, $\lambda\longrightarrow 1$, $s\longrightarrow\infty$, 收敛速度的阶可任意接近 $O(n^{-1})$. 比文献 [6] 中的收敛速度的阶快了约 1 倍, 极大改进文献 [6] 中的结果, 但是采用核估计和构造方法不一样, 本文方法较简洁些.

4 例子

下面举例说明适合文中定理条件的 Weibull 族和先验分布是存在的, 在模型 (1.1) 式中, 令 m 为给定已知正整数, 其中取 θ 的先验分布为

$$g(\theta)=\frac{a^b}{\Gamma(b)}\theta^{-(b+1)}e^{-\frac{a}{\theta}}I_{[\theta>0]}, \tag{4.1}$$

a 和 b 为已知常数 $a>0, b>0$, 所以有

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_\Omega f(x|\theta)dG(\theta) \\ &= -\frac{a^b\Gamma(b+1)mx^{m-1}}{\Gamma(b)(x^m+a)^{b+1}}\int_0^\infty \frac{(x^m+a)^{b+1}}{\Gamma(b+1)}(\frac{1}{\theta})^b \exp((-x^m+a)/\theta)d(\frac{1}{\theta}) \\ &= \frac{mx^{m-1}ba^b}{(x^m+a)^{b+1}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

由 (4.2) 式易见 $f(x)$ 为 x 任意阶可导函数, 导函数连续, 一致有界, 即 $f(x)\in C_{s,a}$, 条件 (A) 成立, 在假定 iid 样本下所加条件 (B) 成立, 因此只需验证条件 (C) 成立即可,

$$\varphi(x)=\frac{\displaystyle\int_\Omega \theta^{-2}\exp(-x^m/\theta)dG(\theta)}{\displaystyle\int_\Omega \theta^{-1}\exp(-x^m/\theta)dG(\theta)}=\frac{\Gamma(b+2)/(x^m+a)^{b+2}}{\Gamma(b+1)/(x^m+a)^{b+1}}=\frac{b+1}{x^m+a},$$

$\varphi'(x)=-\frac{b+1}{(x^m+a)^2}mx^{m-1}\le 0$, 故 $\varphi(x)$ 在 $x>0$ 时单调递减,

$$\lim_{x\to o^+}\varphi(x)=\tfrac{b+1}{a},\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0.$$

不妨假设 $A_1=10^{-8}$, $A_2=10^8$, $\theta_0(b+1)\ge a$, 因为

$$a_G=(\theta_0(b+1)-a)^{\frac{1}{m}},$$

所以

$$\max\{\theta_0(b+1)-10^{8m},\ 0\}<a\le\theta_0(b+1)-10^{-8m},$$

有

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\varphi(x)>\theta_0^{-1}=\varphi(a_G)>\lim_{x\longrightarrow+\infty}\varphi(x).$$

即假设条件 (C) 也成立, 故定理 3.1 结论成立.

参 考 文 献

[1] Johns M V, Van Ryzin J. Convergence rates in empirical Bayes two-action problems II: continuous case [J]. Ann. Math. Statis., 1972, 42: 934–947.

[2] Van Houwelingen J C. Tone empirical Bayes test for the continuous one-parameter exponential family [J]. Ann. Statist., 1976, 4: 981–989.

[3] Liang Tachen. On optical convergence rate of empirical Bayes tests [J]. Statis. & Prob. Lett., 2004, 68: 189–198.

[4] 魏莉, 孔胜春, 韦来生. 刻度指数族参数的经验 Bayes 检验的收敛速度 [J]. 中国科学院研究生院学报, 2007, 24(1): 9–17.

[5] 陈玲, 韦来生. 连续性单参数指数族参数的经验 Bayes 检验函数的收敛速度 [J]. 系统科学与数学, 2009, 29(8): 1142–1152.

[6] 黄金超, 凌能祥. 威布尔分布族参数的经验 Bayes 检验 [J]. 合肥工业大学学报（自然科学版), 2012, 35(6): 860–864.

[7] 樊家琨. 概率密度函数及其导数递归核估计的强相合性 [J]. 河南大学学报 (自然科学版), 1992, 22(2): 67–71.

[8] Liang Tachen. On empirical Bayes tests in a positive exponential family[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2000, 83(1): 169–181.

IMPROVEMENT ON CONVERGENCE RATES FOR EMPIRICAL BAYES TEST FOR THE SCALE PARAMETER OF WEIBULL DISTRIBUTION FAMILY

HUANG Jin-chao[1], LING Neng-xiang[2]

(*1.Basic Course Department, Chouzhou Vocational Technology College, Chuzhou 239000,China*)

(*2.School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China*)

Abstract: In this paper, the empirical Bayes(EB) test of scale parameter for Weibull distribution family is investigated under weighted linear loss. By using the conversive kernel-type density estimation, the empirical Bayes test rules are constructed, and convergence rates are obtained. The order of convergence rates can be arbitrartily close to $O(n^{-1})$, under suitable conditions, the results of paper are generalized. Finally an example about the main results of this paper is given.

Keywords: Weibull distribution family; the recursive kernel estimation of density function; monotone Bayes test; the empirical Bayes test; convergence rates

2010 MR Subject Classification: 62C12; 62F05