Vol. 35 (2015)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

基于基准可靠度和预防维修次数上限的两参数预防维修策略

沈洁琼 [1], 何 平 [2], 李海艳 [1]
(1. 四川大学锦城学院数学教研室, 四川 成都 611731)
(2. 西南交通大学数学学院, 四川 成都 610031)

摘 要: 本文研究了一类修旧非新的两参数预防维修策略. 在预防维修依赖于基准可靠度 R 的条件下，利用系统的相关可靠性指标建立了平均费用关于 R 和 N (预防维修次数上限) 的函数关系. 进一步找到了该函数的最小值点，即得到了最优策略 $(R,N)^*$. 同时通过实例说明了本文的维修策略优于文献 [8].

关键词: 两参数预防维修策略; 几何过程; 基准可靠度; 平均费用
MR(2010) **主题分类号**: 90B25; 60K10; 62N05 **中图分类号**: O213.2
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)04-0945-07

1 引言

1960 年, Barlow 和 Hunter[1] 首先提出了一类基于失效率的最小维修模型, 并给出相应的维修策略. 随后, Brown 和 Proschan 在文献 [10] 中介绍了一类不完全维修模型, 并得到了相应维修策略. 文献 [11, 12] 提出了一类基于几何过程的维修模型, 并分别研究了关于工作时间和失效次数的两种维修策略. 对于带几何过程的预防维修策略, 已有较多研究, 如文献 [3, 6–9] 等. 文献 [3] 基于系统失效次数 N_1 研究了一带几何过程的预防维修策略, 假定预防维修修旧如新、失效维修修旧非新, 得到了其最优策略 N_1^*, 同时证明了有预防维修的最优策略 N_1^* 是优于无预防维修的最优策略 N^*. 紧接着, Wang 和 Zhang [8] 研究了一带几何过程的两参数预防维修策略 (L,N), L 是相邻两预防维修的固定时间间隔, N 是系统预防维修次数的上限, 假定预防维修修旧非新, 服从几何过程, 得到了相应平均费用表达式, 并通过一实例给出了最优维修策略 $(L,N)^*$.

对于单部件可修系统, 文献 [2, 3, 8] 都假定系统每隔固定时间进行预防维修. 但在实际情况中常常需要考虑系统的可靠度, 即在工作过程中, 系统何时进行预防维修以可靠度下降到某个恰当值 R(称为基准可靠度) 为依据, 因此相邻两次预防维修时间间隔不相同, 是逐渐缩短的. 对于此类基于可靠度的预防维修策略, 只有较少结果, 如 Wang 和 Zhang [9] 在文献 [3] 的基础上研究了一类基于 R 和 N_1(失效次数) 的修旧如新的预防维修策略. 事实上, 更多的预防维修是修旧非新的. 由于修旧非新, 失效率呈现锯齿状, 其总趋势逐渐增大, 即系统的可靠度总趋势逐渐减小, 故障会越来越频繁, 因此需要对总的预防维修次数设定一个上限 N. 本文在文献 [8] 的基础上研究了一类修旧非新的两参数预防维修策略 (R,N), 并通过一实例说明本文的维修策略比文献 [8] 中的维修策略更优.

*收稿日期: 2013-09-17 接收日期: 2014-06-04
基金项目: 中国铁路总公司科技研究开发计划重点课题 (2013J006-B); 成都铁路局科技研究开发计划重点课题 (CX1304).

作者简介: 沈洁琼 (1985–), 女, 浙江宁波, 讲师, 主要研究方向: 高等数理统计及可靠性理论与应用.

2 模型假设

为了得到维修策略的相关可靠性指标及平均费用的表达式, 我们先给出相应的数学记号及模型假设.

定义 2.1 [4,5] 令 $\{X_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 是一列相互独立的非负随机变量, 其分布函数为 $F_n(t)=F(a^{n-1}t),\ a>0,\ n=1,2,\cdots$, 则称 $\{X_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 是一几何过程.

若 $0<a<1$, 则称 $\{X_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 是随机递增, 即 $X_n<X_{n+1},\ n=1,2,\cdots$; $a>1$, 则称 $\{X_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 是随机递减, 即 $X_n>X_{n+1},\ n=1,2,\cdots$. 特别地, $a=1$, 则 $\{X_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 是一更新过程.

定义 2.2 [9] 令 T_1 为系统开始工作到第一次更换的时间间隔, $T_n(n\geq 2)$ 为第 $n-1$ 次更换与第 n 次更换之间的时间间隔, 两个连续更换的时间间隔称为一个更新周期.

假设 1 系统开始工作时是全新的, 系统采用预防维修和失效维修相结合的混合维修策略. R 是系统预防维修的基准可靠度, 即在系统工作过程中, 当系统的可靠度降至 R 时, 系统立即停止工作并进行预防维修, 且预防维修修旧非新. 系统预防维修次数上限为 N, 即到第 $N+1$ 次预防维修时间时系统仍未失效, 则不再进行预防维修而用新系统将其更换; 若系统在 $N+1$ 次预防维修前已经失效, 则在失效时刻立即进行系统更换, 此时会产生失效损失.

假设 2 系统第 $n-1$ 次预防维修后的工作时间为 X_n, 第 n 次预防维修的时间为 Y_n. 预防维修修旧非新, 服从几何过程, $X_n, Y_n, n=1,2,\cdots$ 是独立的, 其分布函数分别为

$$F_n(t)=F(a^{n-1}t), a\geq 1, n=1,2,\cdots;$$
$$G_n(t)=G(b^{n-1}t), 0<b\leq 1, n=1,2,\cdots.$$

假设 3 系统第 $n-1$ 次与第 n 次预防维修的时间间隔为 L_n, 刚开始工作到第一次预防维修的时间间隔为 L_1; c, c_w, c_p, η 分别为系统更换费用、单位时间工作报酬、单位时间预防维修费用、系统失效时的损失费用.

3 相关可靠性指标及平均费用

由假设 1 易得 $1-F(L_1)=1-F_n(L_n)=R$, 同时由假设 2 和定义 2.1 得 $F_n(L_n)=F(a^{n-1}L_n)$. 进一步有

$$F(L_1)=F(a^{n-1}L_n), L_n=\frac{L_1}{a^{n-1}}.$$

由于 $a\geq 1$, 故 L_n 是关于 n 的递减函数, 即随着 n 的增加, 相邻两预防维修的时间间隔将会越来越短, 符合实际.

若定义 M 为系统失效前已预防维修的次数, 则 M 为一随机变量, 且有 $M\leq N$. 具体而言, $M\leq N$ 可分三种情况: $M<N$ 表示系统失效前已预防维修的次数小于 N; $M=N^-$ 表示系统失效前已预防维修的次数等于 N, 且在第 $N+1$ 次预防维修时间之前已失效; $M=N^+$ 表示系统失效前已预防维修的次数等于 N, 且在第 $N+1$ 次预防维修时间时还未失效.

据此, 通过计算可得一个更新周期 (参见定义 2.2) 内各靠性指标及平均费用表达式:

(1) 系统不进行预防维修的概率

$$P\{M=0\}=1-R. \tag{3.1}$$

(2) 系统进行 k 次预防维修的概率

$$P\{M=k\}=\begin{cases}R^k(1-R), & k<N;\\ R^N(1-R), & k=N^-;\\ R^{N+1}, & k=N^+.\end{cases} \tag{3.2}$$

(3) 系统更换前的工作时间

$$T(R,N)=\begin{cases}\frac{a^M-1}{a^M-a^{M-1}}\times L_1+Z_{M+1}, & M<N;\\ \frac{a^N-1}{a^N-a^{N-1}}\times L_1+Z_{N+1}, & M=N^-;\\ \frac{a^{N+1}-1}{a^{N+1}-a^N}\times L_1, & M=N^+,\end{cases} \tag{3.3}$$

其中 Z_i 是一随机变量, 表示第 $i-1$ 次预防维修到系统失效 (在第 $i-1$ 次预防维修后到第 i 次预防维修前系统失效) 这一时间间隔, 满足 $E(Z_i)=E(X_i|X_i<L_i)$.

(4) 总预防维修时间

$$S(R,N)=\begin{cases}Y_1+Y_2+\cdots+Y_M, & M<N;\\ Y_1+Y_2+\cdots+Y_N, & M=N^-;\\ Y_1+Y_2+\cdots+Y_N, & M=N^+.\end{cases} \tag{3.4}$$

(5) 总费用函数

$$\begin{aligned}\Phi(R,N)=&[-c_w(\frac{a^M-1}{a^M-a^{M-1}}\times L_1+Z_{M+1})+c_p\sum_{i=1}^{M}Y_i+\eta]\cdot\chi_{\{M<N\}}\\ &+[-c_w(\frac{a^N-1}{a^N-a^{N-1}}\times L_1+Z_{N+1})+c_p\sum_{i=1}^{N}Y_i+\eta]\cdot\chi_{\{M=N^-\}}\\ &+[-c_w(\frac{a^{N+1}-1}{a^{N+1}-a^N}\times L_1)+c_p\sum_{i=1}^{N}Y_i]\cdot\chi_{\{M=N^+\}}+c,\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $\chi_{\{\cdot\}}$ 表示适性函数, 即

$$\chi_{\{M<N\}}=\begin{cases}1, & M<N;\\ 0, & \text{其它};\end{cases}\quad \chi_{\{M=N^-\}}=\begin{cases}1, & M=N^-;\\ 0, & \text{其它};\end{cases}\quad \chi_{\{M=N^+\}}=\begin{cases}1, & M=N^+;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(6) 系统更换前的工作时间的期望

$$\begin{aligned}E[T(R,N)]=&E[E(T(R,N)|M)]=\sum_{k=0}^{N}E[T(R,N)|M=k]P\{M=k\}\\ =&E[Z_1](1-R)+\sum_{k=1}^{N-1}[\frac{a^k-1}{a^k-a^{k-1}}\cdot L_1+E(Z_{k+1})]\cdot R^k(1-R)\\ &+[\frac{a^N-1}{a^N-a^{N-1}}\cdot L_1+E(Z_{N+1})]\cdot R^N(1-R)+\frac{a^{N+1}-1}{a^{N+1}-a^N}L_1R^{N+1}\\ =&\sum_{k=1}^{N}[\frac{a^k-1}{a^k-a^{k-1}}\cdot L_1+\frac{1}{F_{k+1}(L_{k+1})}\int_0^{L_{k+1}}tdF_{k+1}(t)]\cdot R^k(1-R)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{F(L_1)}\int_0^{L_1} tdF(t)(1-R)+\frac{a^{N+1}-1}{a^{N+1}-a^N}L_1R^{N+1}\\
=&\sum_{k=1}^{N}[\frac{a^k-1}{a^k-a^{k-1}}\cdot L_1+\frac{1}{(1-R)a^k}\int_0^{L_1} tdF(t)]\cdot R^k(1-R)\\
&+\int_0^{L_1} tdF(t)+\frac{a^{N+1}-1}{a^{N+1}-a^N}L_1R^{N+1},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

其中

$$
E(Z_i)=E(X_i|X_i<L_i)=\frac{1}{F(a^{i-1}L_i)}\int_0^{L_i} tdF_i(t)=\frac{1}{(1-R)a^{i-1}}\int_0^{L_1} tdF(t).
$$

(7) 总预防维修时间的期望

$$
\begin{aligned}
E[S(R,N)]=&E[E(S(R,N)|M)]=\sum_{k=0}^{N}E[S(R,N)|M=k]P\{M=k\}\\
=&\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{k}E(Y_i)R^k(1-R)+\sum_{i=1}^{N}E(Y_i)P\{M=N^-\}+\sum_{i=1}^{N}E(Y_i)P\{M=N^+\}\\
=&\sum_{k=1}^{N}R^k(1-R)\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu}{b^{i-1}}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu}{b^{i-1}}R^{N+1},
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

其中 $E(Y_1)=\mu$.

(8) 总费用的期望

$$
\begin{aligned}
E[\Phi(R,N)] =& E[E(\Phi(R,N)|M)]=\sum_{k=0}^{N}E[\Phi(R,N)|M=k]P\{M=k\}\\
=& \{-c_wE[X_1|X_1<L_1]+E(\eta)\}F(L_1)+c_p\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{k}E(Y_i)R^k(1-R)\\
&+\sum_{k=1}^{N-1}[E(\eta)-c_w(\frac{(a^k-1)L_1}{a^k-a^{k-1}}+E(X_{k+1}|X_{k+1}<\frac{L_1}{a^k}))]R^k(1-R)\\
&+[c_p\sum_{i=1}^{N}E(Y_i)-c_w(\frac{(a^N-1)L_1}{a^N-a^{N-1}}+E(X_{N+1}|X_{N+1}<\frac{L_1}{a^N}))+E(\eta)]\\
&\times R^N(1-R)+[c_p\sum_{k=1}^{N}E(Y_k)-c_w\frac{(a^{N+1}-1)L_1}{a^{N+1}-a^N}]R^{N+1}+c\\
=& -c_w[\sum_{k=1}^{N}(\frac{a^k-1}{a^k-a^{k-1}}\cdot L_1+\frac{1}{(1-R)a^k}\int_0^{L_1} xdF(x))R^k(1-R)]\\
&-c_w\int_0^{L_1} xdF(x)+E(\eta)F(L_1)+\sum_{k=1}^{N}(c_p\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu}{b^{i-1}}+E(\eta))R^k(1-R)\\
&-c_w\frac{a^{N+1}-1}{a^{N+1}-a^N}L_1\cdot R^{N+1}+c_p\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu}{b^{k-1}}R^{N+1}+c.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

(9) 由更新报酬定理 [4,5] 可得系统经长期运行单位时间内的平均费用:

$$\begin{aligned} C(R,N) &= \frac{E(C_T)}{E(L_T)} \\ &= \frac{E[\Phi(R,N)]}{E[T(R,N)]+E[S(R,N)]} \\ &= \frac{-c_w\varphi_1+c_p\varphi_2+(E\eta)\varphi_3+c}{\varphi_1+\varphi_2}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中 C_T 表示一个更新周期内的花费, L_T 表示一个更新周期的长度, $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 分别满足下列各式:

$$\begin{aligned} \varphi_1 =& \sum_{k=1}^{N}(\frac{a^k-1}{a^k-a^{k-1}}\cdot L_1+\frac{1}{(1-R)a^k}\int_0^{L_1}xdF(x))R^k(1-R) \\ &+\int_0^{L_1}xdF(x)+\frac{a^{N+1}-1}{a^{N+1}-a^N}\cdot L_1R^{N+1}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^{N}[R^k(1-R)\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu}{b^{i-1}}]+\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu}{b^{i-1}}R^{N+1}, \tag{3.11}$$

$$\varphi_3 = F(L_1)+\sum_{k=1}^{N}R^k(1-R). \tag{3.12}$$

4 最优策略及数值例子

我们将在这小节讨论上述维修策略的最优策略, 即寻找 (3.9) 式的最小值点. 另一方面, 我们注意到 (3.9) 式关于 N 的最小值点是一个整数规划问题, 关于 R 的最小值点是一个非线性优化问题. 因此要获得精确的解析解几乎是不可能的. 文中采用图像化的搜索方法, 寻求尽可能准确的数值解, 这也是类似问题通行的解决方案, 详见文献 [8, 9]. 最后, 本文通过一具体例子说明了对应维修策略的确定 (即确定相应的 R 和 N) 过程, 表明了方法是可行的.

假定 X_n 服从韦布尔分布, 即

$$F_n(t)=F(a^{n-1}t)=1-\exp[-(\frac{a^{n-1}t}{\beta})^{\alpha}]. \tag{4.1}$$

令 $a=1.1, b=0.95, \mu=8, E\eta=10000, c_p=5, c_w=35, c=2000, \beta=1000, \alpha=2$, 代入 (3.9)–(3.12) 式得

$$C(R,N) = \frac{-35\varphi_1+5\varphi_2+10000\varphi_3+2000}{\varphi_1+\varphi_2}, \tag{4.2}$$

$$\varphi_1 = \int_0^{L_1}e^{-(\frac{t}{1000})^2}dt+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1.1^k}e^{-k(\frac{L}{1000})^2}\int_0^{L_1}e^{-(\frac{t}{1000})^2}dt, \tag{4.3}$$

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{k}\frac{8}{0.95^{i-1}}e^{-k(\frac{L_1}{1000})^2}-\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{k}\frac{8}{0.95^{i-1}}e^{-(k+1)(\frac{L_1}{1000})^2}, \tag{4.4}$$

$$\varphi_3 = 1+\sum_{k=2}^{N}e^{-k(\frac{L_1}{1000})^2}-\sum_{k=1}^{N}e^{-(k+1)(\frac{L_1}{1000})^2}. \tag{4.5}$$

通过 MATLAB 编程与画图, 分别得到了本文预防维修策略 (R, N) 下的最小费用、最优策略, 具体见图 1、表 1.

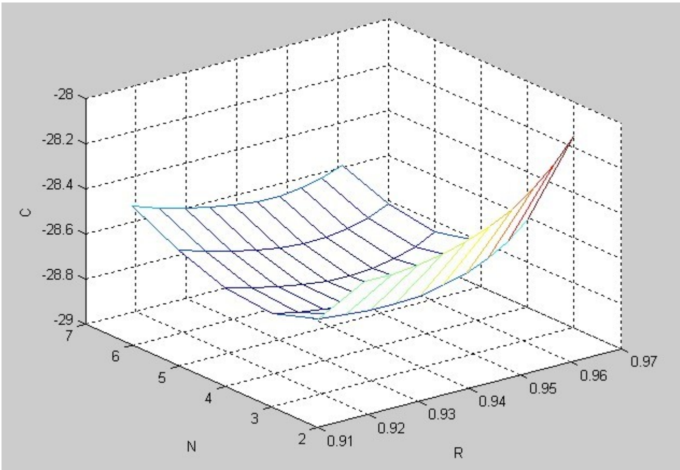

图 1: (R,N) 的最小费用

本文的最优策略 $(R, N)^* = (0.9440, 5)$, 即最小费用: $C(0.9440, 5) = -28.8001$.

表 1: 本文维修策略的数据结果

R(L)/N	2	3	4	5	6	7	8	9
0.9608(200)	-28.0024	-28.4661	-28.6545	-28.7041	-28.6734	-28.5915	-28.4747	-28.333
0.9569(210)	-28.1051	-28.5378	-28.7088	-28.748	-28.711	-28.6258	-28.5079	-28.3669
0.9528(220)	-28.1887	-28.593	-28.7478	-28.7773	-28.7346	-28.6463	-28.5275	-28.3872
0.9485(230)	-28.2558	-28.6338	-28.7737	-28.7941	-28.7461	-28.655	-28.5354	-28.3959
0.9440(240)	-28.3084	-28.662	-28.788	-28.8001	-28.747	-28.6534	-28.5331	-28.3944
0.9394(250)	-28.3482	-28.6792	-28.7922	-28.7964	-28.7388	-28.6429	-28.522	-28.3843
0.9346(260)	-28.3767	-28.6865	-28.7874	-28.7843	-28.7224	-28.6244	-28.5032	-28.3666
0.9297(270)	-28.3952	-28.6853	-28.7748	-28.7649	-28.699	-28.5992	-28.4777	-28.3423
0.9246(280)	-28.4048	-28.6763	-28.7552	-28.7389	-28.6694	-28.5679	-28.4464	-28.3124
0.9193(290)	-28.4065	-28.6606	-28.7294	-28.7071	-28.6342	-28.5313	-28.41	-28.2774

5 结论

将上述数据代入文献 [8] 的预防维修策略, 得到了其最优策略为 $(L, N)^* = (210, 4)$, 即最小费用: $C(210, 4) = -28.6648$, 具体如表 2.

表 2: 文献 [8] 中维修策略的数据结果

L/N	2	3	4	5	6	7	8	9
160	-27.6208	-28.2432	-28.4875	-28.5309	-28.4488	-28.2798	-28.0468	-27.7667
170	-27.7972	-28.3589	-28.5629	-28.5762	-28.4702	-28.282	-28.0347	-27.7457
180	-27.941	-28.4478	-28.6149	-28.6006	-28.4729	-28.2679	-28.0088	-27.7138
190	-28.0574	-28.5139	-28.6473	-28.6076	-28.4604	-28.2408	-27.9723	-27.674
200	-28.1504	-28.5609	-28.6631	-28.6002	-28.4354	-28.2032	-27.9276	-27.6286
210	-28.2235	-28.5914	-28.6648	-28.5807	-28.4001	-28.1574	-27.877	-27.5797
220	-28.2792	-28.6079	-28.6546	-28.551	-28.3564	-28.105	-27.822	-27.5287
230	-28.32	-28.6121	-28.6341	-28.5127	-28.3058	-28.0477	-27.7639	-27.4769
240	-28.3478	-28.6058	-28.6049	-28.4672	-28.2496	-27.9865	-27.704	-27.425
250	-28.3641	-28.5903	-28.5681	-28.4157	-28.189	-27.9226	-27.6432	-27.3737

由表 2 可知在相同数据情况下文献 [8] 最小费用为 $C(210,4) = -28.6648$. 然而本文最小费用为 $C(0.9440,5) = -28.8001$, 故本文的维修策略优于文献 [8].

参 考 文 献

[1] Barlow R E, Hunter L C. Optimum preventive maintenance policy[J]. Oper. Res., 1960, 8: 90–100.

[2] Zhang Y L, Yam R C M, Zuo M J. Optimal replacement policy for a deteriorating production system with preventive maintenance[J]. Int. J. Syst. Sci., 2001, 32(10): 1993–1998.

[3] Zhang Y L. A geometric process repair model with good-as-new preventive repair[J]. IEEE Trans. Reliab., 2002, 51(2): 223–228.

[4] Cao J H, Cheng K. Introduction to reliability mathematics (revised edition in Chinese)[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.

[5] Sun H X. Stochastic processes (in Chinese)[M]. Beijing: China Machine Press, 2007.

[6] Stanley A D J. On geometric processes and repair replacement problems[J]. Microelectronic and Reliability, 1993, 33: 489–491.

[7] Tan Lin, Cheng Tong, Guo Bo. Optimal maintenance strategy for the repairable system consisting of one component based on geometric process[J]. Systems Engineering, 2008, 26(6): 88–92.

[8] Wang G J, Zhang Y L. Optimal periodic preventive repair and replacement policy assuming geometric process repair[J]. IEEE Trans. Reliab., 2006, 55(1): 118–122.

[9] Wang G J, Zhang Y L. A bivariate mixed policy a simple repairable system based on preventive repair and failure repair[J]. IEEE Trans. Reliab., 2009, 33: 3354–3359.

[10] Brown M, Proschan F. Imperfect repair[J]. Appl. Probab., 1983, 20: 851–859.

[11] Lam Y. A note on the optimal replacement problem[J]. Adv. Appl. Probab., 1988, 20: 479–482.

[12] Lam Y. Geometric processes and replacement problem[J]. Acta. Math. Appl., 1998, 4: 366–377.

BIVARIATE PREVENTIVE REPAIR POLICY ON THE CRITICAL RELIABILITY AND NUMBER OF PREVENTIVE REPAIRS

SHEN Jie-qiong[1], HE Ping[2], LI Hai-yan[1]

(*1.Dpt. of Math., Jincheng College, Sichuan University, Chengdu 611731, China*)

(*2.College of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*)

Abstract: In this paper, a bivariate preventive repair policy is studied, which assumes that preventive repair does not return the system to a “good as new” condition, with the critical reliability R and number of preventive repairs N. Our aim is to determine an optimal mixed policy $(R, N)^*$ such that the long-run average cost per unit time is minimized. Finally, an appropriate numerical example is given, which shows that our new policy possesses better performance than the policy given in [8].

Keywords: bivariate preventive repair policy; geometric process; critical reliability; average cost rate

2010 MR Subject Classification: 90B25; 60K10; 62N05