

## MKdV 和 FPU 方程的李点对称

白永强<sup>1,2</sup>, 薛红梅<sup>2</sup>

(1. 河南大学现代数学研究所, 河南 开封 475004)

(2. 河南大学数学与统计学院, 河南 开封 475004)

**摘要:** 本文研究了离散微分方程的李对称问题. 利用差分方程的延拓方法和交换流方法, 我们求得了若干重要的差分方程、微分差分方程的李对称, 推广了对称性分析法在连续微分方程讨论时的结果.

**关键词:** 对称性; 延拓; 微分差分方程; 差分方程

MR(2010) 主题分类号: 58D19; 39A14

中图分类号: O175.7

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)04-0995-10

### 1 引言

偏微分方程主要来源于物理学、力学等自然科学及工程技术. 如由牛顿引力理论推导出的描述引力势的拉普拉斯 (Laplace) 方程和泊松 (Poisson) 方程、描述波传播的波动方程 (wave equation)、描述热传播和扩散的热传导方程 (heat equation) 等. 这些方程在偏微分方程理论的研究中发挥了重要的作用, 时至今日, 它们仍然是偏微分方程的基础和必学内容之一. 自 19 世纪开始, 随着科学技术的发展, 相继出现了大量新的偏微分方程, 其中最基本的有描述电磁场变化的麦克斯韦方程 (组)、描述微观粒子的薛定谔方程, 以及爱因斯坦方程、杨 - 米尔斯方程、反应扩散方程等. 而随着现代科技的进步, 还将会不断涌现出新的越来越多的偏微分方程, 尤其是非线性偏微分方程或方程组. 其中, 非线性波方程是描述自然现象的一类重要数学模型, 也是非线性数学物理特别是孤立子理论最前沿的研究课题之一. 通过对非线性波方程的求解和解性质的定性分析, 有助于人们弄清楚系统非线性作用下的运动变化规律, 合力解释相关的自然现象, 更加深刻地描述系统的本质特征, 极大地推动相关学科如物理学、力学、应用数学以及工程技术的发展.

19 世纪末, 在 Galois 和 Abel 工作的启发下, Sophus Lie 引进了李群理论, 其无穷小分析理论已经被广泛地应用到各种数学物理和力学学科之中, 它的主要用途在于使较难处理的微分方程 (尤其是偏微分方程) 得到了统一的求解方法<sup>[1-6]</sup>.

对称性理论在非线性科学及偏微分方程的研究中起着非常重要的作用, 而李对称群方法是研究微分方程对称性的有力工具. 所谓微分方程系统的对称群就是将方程的解仍变成该方程的解的变换群. 对于给定的微分方程, 一旦得到其所对应的对称群, 往往就有相应的守恒律、可积性和 Hamilton 结构. 同样利用对称可以构造偏微分方程的相似解, 即从已知解出发经过对称群的作用而得到的新解. 从对称出发还可以直接将偏微分方程约化为常微分方程,

\*收稿日期: 2014-10-05

接收日期: 2015-02-26

基金项目: 国家自然科学基金资助 (10801045).

作者简介: 白永强 (1975-), 男, 河南辉县, 副教授, 主要研究方向: 数学物理.

从而为求偏微分方程的精确解创造条件. 而一个最直接的应用就是利用对称求得方程的群不变解.

要想利用李对称群理论来研究微分方程, 其基本思想就是先求出方程的对称, 即先求出使所要研究的微分方程保持形式不变的变换群, 然后利用对称使方程降维降阶, 进而求得精确解. 至于如何求方程的对称, 其主要思想是先设定方程对称的向量场形式, 这里含有几个待定函数, 然后根据对称的定义, 即使原方程形式保持不变的变换群, 可以得到关于待定函数的决定方程组, 求解该方程组即可得到原方程对称的具体形式.

本文的结构如下: 在第 2 节中, 我们简单介绍了微分方程李对称的延拓方法. 第 3 节中, 我们介绍了微分方程李对称的延拓方法在差分方程对称研究中的推广. 在第 4 节中, 在差分方程延拓的基础上, 借助于连续思想将延拓方法推广到微分差分方程上, 并介绍了求决定方程的一种简便方法即交换流方法. 之后在第 5 和第 6 节中, 我们分别利用这一理论求得了半离散  $MKdV$  方程和  $FPU$  方程的李点对称.

## 2 微分方程的李点对称

考虑微分方程系统

$$F_{\alpha}(x, u, u_1, u_2, \cdots, u_s) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, m, \quad (2.1)$$

这里  $x \in R^n, u \in R^m, u_s$  是  $s$  阶偏导数的集合.

我们把方程 (2.1) 看作是对应延拓空间中的方程. 由于寻找对称群等价于寻找无穷小生成元. 我们写出包含至  $u_s$  的各阶导数至  $u_s$  的生成元, 它们具有下列形式

$$prX = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \phi^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \eta_i^k \frac{\partial}{\partial u_i^k} + \cdots + \eta_s^k \frac{\partial}{\partial u_s^k}, \quad (2.2)$$

则微分方程组 (2.1) 的不变量的准则为

$$prXF_{\alpha}(x, u, u_1, u_2, \cdots, u_s)|_{(2.1)} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, m. \quad (2.3)$$

方程组 (2.3) 的解形成了一个  $r$  维向量空间  $L_r$ . 方程组 (2.3) 称为对称元的决定方程.

因此, 给定微分方程的对称可由无穷小算子的向量空间所描述. 另外通过这些无穷小算子的加法和数乘, 我们可以得到这个空间里更多的算子.

**定义 2.1** 算子  $X_1 = \xi_1^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  和  $X_2 = \xi_2^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  的交换子定义为

$$[X_1, X_2] = X_1 \circ X_2 - X_2 \circ X_1 = (X_1 \xi_2^i - X_2 \xi_1^i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

易证交换子具有如下性质:

- (1) 双线性:  $[aX_1 + bX_2, X_3] = a[X_1, X_3] + b[X_2, X_3]$ ,  $a, b$  为常数,
- (2) 反对称性:  $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$ ,
- (3) Jacobi 恒等式:  $[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0$ .

微分方程李对称的生成元按上述乘法所生成的线性空间称为算子的李代数.

## 3 差分方程的李点对称

为了求解离散方程, 除了需要知道函数关系外, 还应该清楚格点是如何定义的. 本文中我们仅考虑具有两个独立格点变量的差分方程. 由于阶数为  $N_i$  的离散变量  $x_{m,n}^{(i)}, i = 1, 2$  所确定的离散方程是变量  $x_{m,n}^{(i)}$  所在的格点上  $N_i + 1$  个点间的函数关系. 这意味着我们需要一个关于函数关系的方程以及关于两个独立变量的四个方程. 事实上, 如果格点是正交的或者是常值空间, 那么这些方程中的一些将会是平凡的, 但仍然有必要求解出差分方程组的对称及其解 [7].

因此有如下五个方程:

$$\Delta(x_{m+i,n+j}^{(k)}, u_{m+i,n+j}) = 0, \quad k = 1, 2; \quad (3.1)$$

$$E_a(x_{m+i,n+j}^{(k)}, u_{m+i,n+j}) = 0, \quad 1 \leq a \leq 4; \quad (3.2)$$

$$u_{m,n} = u(x_{m,n}^{(1)}, x_{m,n}^{(2)}), \\ -i_1 \leq i \leq i_2; \quad -j_1 \leq j \leq j_2; \quad i_1, i_2, j_1, j_2 \in Z^+.$$

这里  $\Delta$  表示差分方程,  $E_a$  是决定 2 个独立格点变量的四个方程, 指标  $m, n$  是格点上的参考点. 方程组 (3.1), (3.2) 必须满足一些明显的条件才有可能计算所有格点平面上的变量.

我们假定系统的对称群所对应的无穷小生成元的系数为  $\xi^{(i)}(x_{m,n}^{(k)}, u_{m,n}), \phi(x_{m,n}^{(k)}, u_{m,n})$ , 因此系统的李点对称可由下列形式的向量场生成

$$X_{m,n}^D = \xi^{(i)}(x_{m,n}^{(k)}, u_{m,n}) \partial_{x_{m,n}^{(i)}} + \phi(x_{m,n}^{(k)}, u_{m,n}) \partial_{u_{m,n}} \quad (3.3)$$

(上标 D 代表离散), 其延拓为

$$pr X_{m,n}^D = \sum_{j=-j_1}^{j_2} \sum_{i=-i_1}^{i_2} X_{m+i,n+j}^D, \quad (3.4)$$

且满足下列无穷小准则

$$pr X_{m,n}^D \Delta |_{\Delta=0} = 0, \quad (3.5)$$

$$pr X_{m,n}^D E_a |_{E_a=0} = 0. \quad (3.6)$$

方程 (3.5), (3.6) 是关于  $\xi^{(i)}$  和  $\phi$  的一系列方程. 这里  $\xi^{(i)}$  和  $\phi$  将出现在网格的不同点处, 当方程  $\Delta = 0$  和  $E_a = 0$  考虑在内时, 所有点都是相互独立的. 因此我们得到五个关于  $\xi^{(i)}$  和  $\phi$  的函数方程. 出现在这五个方程中的变量都是相互独立的, 它们要么明确的出现在方程中, 要么隐含于未知无穷小的系数中. 由于无穷小生成元的系数都是解析函数, 因此我们可以通过对独立变量求微分而将决定方程转化一系列微分方程. 由此我们可以得到超定方程, 即一系列非线性偏微分方程. 求解这些方程并将它们的解代入函数方程中, 便可以求得无穷小系数  $\xi^{(i)}$  和  $\phi$ .

由此可见求差分方程李对称和连续方程李对称的求法本质的不同在于延拓公式的求法 [8,9].

#### 4 微分差分方程的李点对称

在本节中我们考虑微分差分方程<sup>[10]</sup>的李对称. 将全差分方程转变成微分差分方程所需要的就是对一个格点变量施行连续极限. 令  $x_{m,n}^{(2)} = t_{m,n}$ , 当沿着这个方向时点与点之间的距离为 0 且格点指标趋于无穷. 此时关于变量  $t_{m,n}$  的格点方程为

$$t_{m+1,n} - t_{m,n} = \tau, \quad t_{m,n+1} - t_{m,n} = 0,$$

即

$$t \equiv t_{m,n} = \tau m + t_0. \quad (4.1)$$

这里  $\tau$  表示步长. 一般情况下, 取  $t_0 = 0$ . 另一个不变的网格变量  $x_{m,n}^{(1)} = x_{m,n}$ , 在时间变量上不发生改变, 即

$$x_{m+1,n} - x_{m,n} = 0 \quad (4.2)$$

沿着  $n$  的方向依赖于  $u_{m,n}$  并可由方程 (3.2) 中的一个来表达, 记为  $E_1 = 0$ .

在连续极限中, 考虑当  $\tau \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$  时变量  $t$  连续, 变量  $x_{m,n}, u_{m,n}$  不再依赖于  $m$ . 方程 (3.1) 将约化为关于  $u_n = u(x_n, t)$  的微分差分方程. 方程 (3.2) 约化为一个关于格点变量  $x_n$  的方程  $E_1 = 0$ . 方程 (4.1), (4.2) 仍然成立. 假定关于格点变量  $x_n$  的方程  $E_1 = 0$  可由具体的函数如  $x_n = f(n)$  表达, 那么  $x_n$  上的依赖性可由整数  $n$  上的依赖性来代替. 此时方程 (3.1) 就约化为微分差分方程 ( $D\Delta E$ )

$$\Delta_n(t, u_j, \dot{u}_j, \ddot{u}_j, \dots, u_j^{(K)}) = 0, \quad n - L \leq j \leq n + M. \quad (4.3)$$

这里点表示关于  $t$  的导数,  $K, L$  和  $M$  是一些非负整数. 方程既决定了网格又决定了函数关系. 方程 (4.3) 定义在“半离散射流空间”上且其局部坐标表示为

$$\{t, u_j, \dot{u}_j, \ddot{u}_j, \dots, u_j^{(K)}\}, \quad (4.4)$$

这里  $j$  跑遍一维网格中的所有值.

方程 (4.3) 的李点对称由下列形式的向量场生成

$$X^{SD} = \tau_n(t, u_n) \partial_t + \phi_n(t, u_n) \partial_{u_n}. \quad (4.5)$$

(上标  $SD$  表示半离散) 且其延拓同样定义在半离散射流空间 (4.4) 上.

现利用差分方程组向量场的延拓公式 (3.3) 来得到微分差分方程向量场 (4.5) 的延拓公式.

考虑最简单的不平凡的情况, 即差分系统 (4.3) 仅涉及 3 个点  $(m, n), (m+1, n)$  和  $(m, n+1)$ , 也就是涉及的变量  $x_{jk}, t_{jk}$  和  $u_{jk}$  在下列 3 点所在的方程中:

$$\Delta_n(x_{mn}, x_{m+1,n}, x_{m,n+1}, t_{mn}, t_{m+1,n}, t_{m,n+1}, u_{mn}, u_{m+1,n}, u_{m,n+1}) = 0. \quad (4.6)$$

选取网格中的点  $(m, n)$  作为参考点, 用下面的式子来表示变量  $t$  和  $x$ :

$$t_{m+a,n+b} \equiv t + \varepsilon_{ab}, \quad x_{m+a,n+b} \equiv f(n+b) + \theta(\varepsilon_{ab}),$$

这里  $f(n+b)$  是给定的函数, 且  $\theta(\varepsilon_{ab})$  是解析函数. 我们用函数  $v_n(t)$  来代替  $u_{m+j,n+k}$ ,

$$v_{n+b}(t + \varepsilon_{ab}) \equiv u_{m+a,n+b}(x_{m+a,n+b}, t_{m+a,n+b}),$$

并且假定关于  $t$  的依赖性解析的. 对于参考点  $x_{mn}, t_{mn}$  取  $\varepsilon_{00} = 0, \theta(\varepsilon_{00}) = 0$ , 因此当  $\varepsilon_{ab} \rightarrow 0$  变量  $t_{mn}$  趋于连续函数  $t$ , 而当  $\varepsilon_{ab} \rightarrow 0$  时变量  $x$  仍离散, 且其上的依赖性由标记  $n+b$  上的依赖性代替.

因此, 对于这 3 个点  $(m, n), (m+1, n)$  和  $(m, n+1)$  我们有

$$\begin{aligned} t_{mn} &\equiv t, \quad t_{m+1,n} \equiv t + \varepsilon_{10}, \quad t_{m,n+1} \equiv t + \varepsilon_{01}, \\ x_{mn} &\equiv f(n), \quad x_{m+1,n} \equiv f(n) + \theta(\varepsilon_{10}), \quad x_{m,n+1} \equiv f(n+1) + \theta(\varepsilon_{01}), \\ u_{mn} &\equiv v_n(t), \quad u_{m+1,n} \equiv v_n(t + \varepsilon_{10}) \equiv v_n(t) + \varepsilon_{10}v_{n,t}(t), \\ u_{m,n+1} &\equiv v_{n+1}(t + \varepsilon_{01}) \equiv v_{n+1}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{01}^j}{j!} v_{n+1}^{(j)}(t). \end{aligned}$$

这里  $v_{n+1}^{(j)}(t) = \frac{d^j v_{n+1}(t)}{dt^j}$  且  $v_{n,t}(t) = \frac{u_{m+1,n} - u_{m,n}}{\varepsilon_{10}}$  是  $v_n(t)$  的“离散导数”.

由于  $v_n(t)$  是解析的, 故上式中的泰勒系数是收敛的. 通过上述方程, 我们可以用  $\{\partial_t, \partial_{\varepsilon_{10}}, \partial_{\varepsilon_{01}}, \partial_{v_n}, \partial_{v_{n,t}}, \partial_{v_{n+1}}\}$  来表达导数  $\{\partial_{t_{mn}}, \partial_{t_{m+1,n}}, \partial_{t_{m,n+1}}, \partial_{u_{mn}}, \partial_{u_{m+1,n}}, \partial_{u_{m,n+1}}\}$ . 因此变换向量场的延拓 (3.3) 式, 我们可得

$$\begin{aligned} prX^D &= \tau_{mn}\partial_t + \phi_{mn}\partial_{v_n} + (\tau_{m+1,n} - \tau_{mn})\partial_{\varepsilon_{10}} + (\tau_{m,n+1} - \tau_{mn})\partial_{\varepsilon_{01}} \\ &\quad + [(\phi_{m+1,n} - \phi_{mn}) + (\tau_{mn} - \tau_{m+1,n})v_{n,t}] \frac{1}{\varepsilon_{10}} \partial_{v_{n,t}} \\ &\quad + [\phi_{m,n+1} + (\tau_{mn} - \tau_{m,n+1})] \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(t_{m,n+1} - t_{mn})^{j-1}}{(j-1)!} v_{n+1}^{(j)} \partial_{v_{n+1}}. \end{aligned}$$

另外, 让

$$\tau_{mn} \equiv \tau_n(t, v_n), \quad \phi_{mn} \equiv \phi_n(t, v_n),$$

且

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_{10} \rightarrow 0} \frac{\phi_{m+1,n} - \phi_{m,n}}{\varepsilon_{10}} &= D_t \phi_n, \quad \lim_{\varepsilon_{10} \rightarrow 0} \frac{\tau_{m+1,n} - \tau_{m,n}}{\varepsilon_{10}} = D_t \tau_n, \\ \lim_{\varepsilon_{01} \rightarrow 0} \frac{\phi_{m,n+1} - \phi_{m,n}}{\varepsilon_{01}} &= D_t \phi_{n+1}, \quad \lim_{\varepsilon_{01} \rightarrow 0} \frac{\tau_{m,n+1} - \tau_{m,n}}{\varepsilon_{01}} = D_t \tau_{n+1}. \end{aligned}$$

方程 (4.6) 取极限以后变成

$$\Delta_n = \Delta_n(t, v_n, v_{n+1}, v_{n,t}). \quad (4.7)$$

在半连续极限中取  $\varepsilon_{10} \rightarrow 0, \varepsilon_{01} \rightarrow 0$  我们得到

$$\lim_{(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{01}) \rightarrow (0,0)} prX^D = prX^{SD} = \tau_n \partial_t + \phi_n \partial_{v_n} + \phi_n^{[t]} \partial_{v_{n,t}} + \phi_n^{[n+1]} \partial_{v_{n+1}}, \quad (4.8)$$

$$\phi_n^{[t]} = D_t \phi_n - (D_t \tau_n) \dot{v}_n, \quad (4.9)$$

$$\phi_n^{[n+1]} = \phi_{n+1} + (\tau_n - \tau_{n+1}) v_{n+1}^{(1)}. \quad (4.10)$$

系数  $\phi_n^{[t]}$  的表达式 (4.9) 是常微分方程一阶延拓的推广, 即向量场  $X^{SD}$  在导数上的延拓和微分方程的一样. 而 (4.10) 式中第二项在微分方程延拓中没有出现过, 且在网络上其它点  $x_n$  处的延拓并不能仅通过移动  $\phi_n$  中的  $n$  来得到.

接下来我们讨论向量场的调优形式, 并引出另外一种在固定网格上计算微分差分方程对称的等价的方法, 即在两个变量上构造交换流. 我们再次考虑方程 (4.7), 这一次求出一阶导数, 并把  $\dot{u}_n$  改写成  $u_{n,t}$  表示一般的时间导数

$$\dot{u}_n \equiv u_{n,t} = F_n(t, u_n, u_{n+1}). \quad (4.11)$$

我们先给出调优向量场

$$X_E = Q_n(t, u_n, \dot{u}_n, \dots) \partial_{u_n} \quad (4.12)$$

和它的延拓

$$pr X_E = Q_n \partial u_n + Q_{n+1} \partial u_{n+1} + (D_t Q_n) \partial \dot{u}_n + \dots, \quad (4.13)$$

其中  $Q_n$  称为向量场  $X$  的特征, 且满足

$$Q_n(t, u_n, \dot{u}_n, \dots) = \phi_n(t, u_n) - \tau_n(t, u_n) \dot{u}_n. \quad (4.14)$$

这时把延拓场作用到方程 (4.11) 上, 并要求

$$pr X_E[\dot{u}_n - F_n(t, u_n, u_{n+1})]|_{(\dot{u}_n=F_n, \ddot{u}_n=D_t F_n)} = 0.$$

得到

$$D_t Q_n = F_{n,u_n} Q_n + F_{n,u_{n+1}} Q_{n+1},$$

即

$$Q_{n,t} + Q_{n,u_n} F_n + Q_{n,\dot{u}_n} (F_{n,t} + F_{n,u_n} F_n + F_{n,u_{n+1}} F_{n+1}) = F_{n,u_n} Q_n + F_{n,u_{n+1}} Q_{n+1}. \quad (4.15)$$

根据向量场与调优向量场延拓之间的关系, 即

$$pr X = pr X_E + \tau_n(t, u_n) D_t. \quad (4.16)$$

这里全导数  $D_t$  本身就是微分差分方程的一个广义对称. 将式 (4.13) 和 (4.14) 代入 (4.16) 式我们可得到方程 (4.8), (4.10).

接下来引入另外一个变量即群参数  $\lambda$ , 并用如下变量来考察  $u_n(t, \lambda)$  上的流

$$u_{n,\lambda} = Q_n(t, u_n, \dot{u}_n). \quad (4.17)$$

现在我们要要求流 (4.11) 和 (4.17) 是相容的, 也就是说是可交换的. 我们有下面的关系

$$u_{n,t\lambda} = u_{n,\lambda t}. \quad (4.18)$$

用方程 (4.16) 来代替  $u_{n,\lambda}$ , 用方程 (4.11) 和它的微分形式分别来代替  $\dot{u}_n$  和  $\ddot{u}_n$ . 计算 (4.18) 式可得到方程 (4.15).

微分差分方程 (4.3) 的李点对称由向量场 (4.5) 生成. 我们讨论系数  $\tau_n(t, u_n)$  仅依赖于  $t$  的两种重要情况. 给出微分差分方程的两种类型:

$$\dot{u} = f_n(t, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}), \quad (4.19)$$

$$\ddot{u}_n = f_n(t, \dot{u}, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}). \quad (4.20)$$

方程 (4.19) 和 (4.20) 的李点对称对应的交换流的形式为方程 (4.12) 且其中的  $Q_n$  由 (4.14) 式给出.

如果方程 (4.19, 4.20) 对所有的整数  $n$  至少满足下列条件中的一个

$$\frac{\partial f_n}{\partial u_{n+1}} \neq 0, \quad \frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}} \neq 0. \quad (4.21)$$

那么我们就有如下两个定理.

**定理 4.1** 如果方程 (4.19) 满足条件 (4.21) 中至少一个, 且 (4.12) 式表示方程 (4.19) 的一个李点对称, 那么我们就有

$$\tau_n(t, u_n) = \tau(t). \quad (4.22)$$

**定理 4.2** 如果方程 (4.20) 满足条件 (4.21) 中至少一个, 且 (4.12) 式表示方程 (4.20) 的一个李点对称, 那么我们就有方程 (4.14) 中的  $\tau_n(t, u_n)$  满足方程 (4.22), 即  $\tau_n(t, u_n)$  仅仅依赖于  $t$ .

## 5 MKdV 方程的李点对称

在本节中, 我们将研究一类在理论和应用中都非常重要的非线性偏微分方程, 就是著名的非线性波方程的一个修正的情况, 即半离散的 MKdV 方程. 众所周知, KdV 方程是非常著名的浅水波方程, 它起源于对浅水的曲面上波的传播的研究, KdV 方程可以描述各种浅水波的运动, 在流体力学中有着广泛的应用. 而对于修正的 KdV 方程, 近期的研究发现它可用于描述宇宙环境中超新星周围以及土星环的尘埃离子的波动规律, 对于天体力学和大气物理的研究有着重要的意义. 对于该微分差分方程, 我们将利用李群的方法研究其对称性.

半离散的 MKdV 方程可写作

$$u_{n,t} = (u_{n+1} - u_{n-1})(1 + u_n^2), \quad (5.1)$$

其中  $u_{n,t}$  是依赖变量  $(n, t)$  的函数,  $n$  表示格点上的位置,  $t$  是连续的时间变量.

令

$$u_{n,t} = f_n(u_n, u_{n+1}, u_{n-1}). \quad (5.2)$$

方程的李点对称可由下列形式的向量场生成

$$X = \tau_n(t, u_n) \partial_t + \phi_n(t, u_n) \partial_{u_n}.$$

由于  $\frac{\partial f_n}{\partial u_{n+1}} = 1 + u_n^2 \neq 0$ , 且  $\frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}} = -1 - u_n^2 \neq 0$ . 故根据定理 4.1, 有  $\tau_n(t, u_n) = \tau(t)$ , 引入另外一个群参数  $\lambda$ , 用如下变量考察  $u_n(t, \lambda)$  上的流

$$u_{n,\lambda} = \phi_n(t, u_n) - \tau(t) u_{n,t}. \quad (5.3)$$

根据两个流可交换, 即

$$u_{n,t\lambda} = u_{n,\lambda t}. \quad (5.4)$$

用方程 (5.2) 来代替  $u_{n,t}$ , 用方程 (5.3) 来代替  $u_{n,\lambda}$ , 此时 (5.4) 式转化为

$$\sum_{l=-1}^1 f_{n,u_{n+l}}(\phi_{n+l} - \tau u_{n+l,t}) = \phi_{n,t} + (\phi_{n,u_n} - \tau_t) u_{n,t} - \tau \sum_{l=-1}^1 f_{n,u_{n+l}} u_{n+l,t}.$$

整理此式得到

$$\sum_{l=-1}^1 f_{n,u_{n+l}} \phi_{n+l} = \phi_{n,t} + (\phi_{n,u_n} - \tau_t) u_{n,t}.$$

将  $f_{n,u_{n+l}}, u_{n,t}$  代入上式, 整理得

$$\begin{aligned} & -\phi_{n-1} - u_n^2 \phi_{n-1} + 2u_n u_{n+1} \phi_n - 2u_{n-1} u_n \phi_n + \phi_{n+1} + u_n^2 \phi_{n+1} \\ = & \phi_{n,t} + (u_n^2 u_{n+1} - u_{n-1} u_n^2 + u_{n+1} - u_{n-1})(\phi_{n,u_n} - \tau_t). \end{aligned} \quad (5.5)$$

通过观察此式可得  $\phi_n$  不依赖于  $t$ ,  $\tau$  是  $t$  的一次函数. 此时假定

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 t, \quad \phi_n = a_n + b_n u_n + c_n u_n^2,$$

代入 (5.5) 式可得

$$\tau = a - 2bt, \quad \phi_n = b + (-1)^n \hat{b},$$

其中  $a, b, \hat{b}$  是任意常数. 因此 MKdV 方程的李点对称的向量场为

$$X = (a - 2bt) \partial_t + (b + (-1)^n \hat{b}) \partial_{u_n},$$

故 MKdV 方程的李代数  $g$  由下列三个向量场生成

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = -2t \partial_t + \partial_{u_n}, \quad X_3 = (-1)^n \partial_{u_n}.$$

## 6 FPU 方程的李点对称

FPU 方程可写作

$$\omega^{-2} u_{n,tt} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + a(u_{n+1} - u_n)^2 - a(u_n - u_{n-1})^2, \quad (6.1)$$

整理可得

$$u_{n,tt} = \omega^2 u_{n+1} - 2\omega^2 u_n + \omega^2 u_{n-1} + a\omega^2 (u_{n+1} - u_n)^2 - a\omega^2 (u_n - u_{n-1})^2. \quad (6.2)$$

记方程为

$$u_{n,tt} = f_n(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}). \quad (6.3)$$

方程的李点对称可由下列形式的向量场生成

$$X = \tau_n(t, u_n) \partial_t + \phi_n(t, u_n) \partial_{u_n}. \quad (6.4)$$

由于  $\frac{\partial f_n}{\partial u_{n+1}} = \omega^2 + 2a\omega^2(u_{n+1} - u_n) \neq 0$ , 且  $\frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}} = \omega^2 + 2a\omega^2(u_n - u_{n-1}) \neq 0$ . 根据定理 4.2 有  $\tau_n(t, u_n) = \tau(t)$ . 引入另外一个群参数  $\lambda$ , 用如下变量考察  $u_n(t, \lambda)$  上的流

$$u_{n,\lambda} = \phi_n(t, u_n) - \tau(t) u_{n,t}, \quad (6.5)$$



根据两个流可交换, 即

$$u_{n,tt\lambda} = u_{n,\lambda tt}. \quad (6.6)$$

用方程 (6.3) 来代替  $u_{n,tt}$ , 用方程 (6.5) 来代替  $u_{n,\lambda}$ , 此时 (6.6) 式转化为

$$\begin{aligned} \sum_{l=-1}^1 f_{n,u_{n+l}}(\phi_{n+l} - \tau u_{n+l,t}) &= \phi_{n,tt} + (2\phi_{n,tu_n} - \tau_{tt})u_{n,t} + \phi_{n,u_n}u_{n,t}^2 \\ &\quad + (\phi_{n,u_n} - 2\tau_t)f_n - \tau \sum_{l=-1}^1 f_{n,u_{n+l}}u_{n+l,t}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

整理此式得到

$$\sum_{l=-1}^1 f_{n,u_{n+l}}\phi_{n+l} = \phi_{n,tt} + (2\phi_{n,tu_n} - \tau_{tt})u_{n,t} + \phi_{n,u_n}u_{n,t}^2 + (\phi_{n,u_n} - 2\tau_t)f_n. \quad (6.8)$$

比较  $(u_{n,t})^k (k = 0, 1, 2)$  的系数得到一系列的确定方程, 求解这些方程我们得到

$$\tau = c_1 - ac_4t, \quad \phi_n = c_2 + c_3t + c_4n,$$

其中  $c_1, c_2, c_3, c_4$  是任意常数. 因此 FPU 方程的李点对称的向量场为

$$X = (c_1 - ac_4t)\partial_t + (c_2 + c_3t + c_4n)\partial_{u_n}.$$

因此 FPU 方程的李代数  $g$  由下列四个向量场生成

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_{u_n}, \quad X_3 = t\partial_{u_n}, \quad X_4 = -at\partial_t + n\partial_{u_n}.$$

这些向量场之间的交换关系如下

$$[X_1, X_3] = X_2, \quad [X_1, X_4] = -aX_1, \quad [X_3, X_4] = -aX_3.$$

由李代数  $g$  的基生成的单参数对称群  $G_i$  如下

$$\begin{aligned} G_1 : (t, u_n) &= (t + \lambda, u_n), \\ G_2 : (t, u_n) &= (t, u_n + \lambda), \\ G_3 : (t, u_n) &= (t, u_n + t\lambda), \\ G_4 : (t, u_n) &= (e^{-a\lambda}t, u_n + n\lambda). \end{aligned}$$

由于每一个群  $G_i$  都是 FPU 方程的李点对称群, 那么当  $u_n = f(t)$  是 FPU 方程的解时, 下列函数也是 FPU 方程的解

$$\begin{aligned} u_n^{(1)} &= f(t - \lambda), \\ u_n^{(2)} &= f(t) + t\lambda, \\ u_n^{(3)} &= f(t) + \lambda, \\ u_n^{(4)} &= f(e^{a\lambda}t) + n\lambda. \end{aligned}$$

由上述四个向量场的线性组合  $c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4$ , 我们可以得到更一般的对称群.

## 参 考 文 献

- [1] Peter J Olver. Applications of Lie groups to differential equations (2nd ed.)[M]. New York: Springer, 1998.
- [2] Vladimir Dorodnitsyn. Applications of Lie groups to difference equations[M]. New York: CRC Press, 2010.
- [3] 凌旭东. 李对称方法及其在微分方程中的应用 [D]. 江苏: 江苏大学硕士学位论文, 2006.
- [4] 李洪景. 求解微分差分方程李对称的几何方法 [D]. 北京: 首都师范大学硕士学位论文, 2008.
- [5] 李汉泽. 基于李对称分析的偏微分方程精确解的研究 [D]. 云南: 昆明理工大学博士学位论文, 2009.
- [6] Bluman G W, Anco S C. Symmetry and integration methods for differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 2002.
- [7] Levi D, Peter J Olver, Thomova Z, Winternitz P. Symmetries and integrability of difference equations[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [8] Levi D, Tremblay S, Winternitz P. Lie point symmetries of difference equations and lattices[J]. J. Phys. A: Math. Gen., 2001, 33: 521–554.
- [9] Levi D, Tremblay S, Winternitz P. Lie symmetries of multidimensional difference equations[J]. J. Phys. A: Math. Gen., 2001, 34: 9507–9524.
- [10] 莫嘉琪, 姚静荪. 一类微分 – 差分反应扩散方程的渐近解 [J]. 数学杂志, 2011, 31: 133–137.

## THE LIE SYMMETRY OF MKDV AND FPU EQUATIONS

BAI Yong-qiang <sup>1,2</sup>, XUE Hong-mei <sup>2</sup>*(1. Institute of Contemporary Mathematics, Henan University, Kaifeng 475004, China)**(2. School of Mathematics and Statistics, Henan University, Kaifeng 475004, China)*

**Abstract:** In this paper, we discuss the Lie symmetry of discrete differential equations. By means of the prolonging method and the commuting flows method, we obtain the Lie symmetry of some important different equations and differential-difference equations, which extends the results in the case of continuous differential equations.

**Keywords:** symmetry; prolongation; differential-difference equation; difference equation

**2010 MR Subject Classification:** 58D19; 39A14