

拓扑空间可度量化的充要条件

陈 娟, 高随祥

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 101408)

摘 要: 本文研究了拓扑空间的可度量化的充要条件. 利用可数开覆盖的性质和度量化遗传性及定义, 获得了拓扑空间可度量化的两个充要条件结果, 推广了构造可度量化的拓扑空间和判断拓扑空间是度量空间的依据.

关键词: 拓扑空间; 度量空间; 可度量化; 充要条件

MR(2010) 主题分类号: 54A05

中图分类号: O189.11

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)04-0952-05

1 引言

由于度量空间具有良好的性质, 研究拓扑空间是否可度量化的判定条件具有很重要的意义. 关于拓扑空间可度量化的条件, 在一些拓扑学的重要著作中都作为重要章节进行介绍^[1-7], 其中两个最著名的充要条件 Nagata-Smirnov 度量化定理^[1] 和 Alex-Urysohn 度量化定理^[3]. 这两个重要定理均是从拓扑空间可度量化的定义出发, 通过分析拓扑空间和度量空间的性质而得出的. 后续对拓扑空间可度量化的研究大都是在这两个定理的基础上给出的, 例如文献^[3] 中的 martin 定理和 Bing 度量化定理.

本文主要研究拓扑空间的可度量化问题, 获得拓扑空间可度量化的两个充分必要条件. 首先基于 Nagata-Smirnov 度量化定理和 Alex-Urysohn 度量化定理, 利用可数开覆盖的性质和度量化的遗传性, 获得可度量化的一个充要条件; 其次从拓扑空间可度量化的定义出发, 得到了拓扑空间可度量化的另一个充要条件.

2 预备知识

为了方便后面结论的叙述和证明, 我们需要给出一些相关的概念和定义. 度量空间和拓扑空间是本文的研究对象, 其定义如下:

定义 2.1^[1] 设 X 是一个集合, $\rho: X \times X \rightarrow R$, 如果对于任何 $x, y, z \in X$, 有

(1) (正定性) $\rho(x, y) \geq 0$, 并且 $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(2) (对称性) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(3) (三角不等式) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(z, y)$,

则称 ρ 是集合 X 的一个度量, 称 (X, ρ) 是一个度量空间.

定义 2.2^[1] 设 (X, ρ) 是一个度量空间, $x \in X$ 对于任意给定的实数 $\varepsilon > 0$, 集合 $\{y \in X | \rho(x, y) < \varepsilon\}$ 称为一个以 x 为中心, 以 ε 为半径的球形领域, 简称 x 的一个球形领域,

*收稿日期: 2013-11-14

接收日期: 2014-05-19

基金项目: 国家重点基础研究发展计划 (973) 项目基金资助 (2011CB706901); 国家自然科学基金项目基金资助 (11331012).

作者简介: 陈娟 (1988-), 女, 甘肃金昌, 硕士, 主要研究方向: 通信网络优化.

记作 $B(x, \varepsilon)$. 设 A 是度量空间 X 的一个子集, 如果 A 中的每一个点都有一个球形领域包含于 A , 则称 A 是度量空间 X 中的一个开集.

定义 2.3^[1] 设 X 是一个集合, $\mathcal{F}$ 是 X 的一个子集族. 如果 $\mathcal{F}$ 满足如下条件:

- (1) $X, \emptyset \in \mathcal{F}$;
- (2) 若 $A, B \in \mathcal{F}$, 则 $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- (3) 若 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$, 则 $\bigcup_{A \in \mathcal{F}_1} A \in \mathcal{F}$,

则称 $\mathcal{F}$ 是 X 的一个拓扑, 而称偶对 $(X, \mathcal{F})$ 是一个拓扑空间, $\mathcal{F}$ 的每个元素都叫做拓扑空间 $(X, \mathcal{F})$ 的一个开集. 对任意集合 $Y \in X$, 称拓扑空间 $(Y, \mathcal{F}|_Y)$ 是 $(X, \mathcal{F})$ 的一个拓扑子空间, 其中 $\mathcal{F}|_Y = \{Y \cap A | A \in \mathcal{F}\}$.

本文主要探讨拓扑空间可度量的条件, 可度量的概念如下:

定义 2.4^[1] 设 (X, ρ) 是一个度量空间, 令 $\mathcal{F}_\rho$ 为由 X 的所有开集构成的集族, 则称 $\mathcal{F}_\rho$ 是由度量 ρ 诱导出来的拓扑. 设 $(X, \mathcal{F})$ 是一个拓扑空间, 如果存在的一个度量 ρ 使得拓扑 $\mathcal{F}$ 即是由度量诱导出来的拓扑, 则称 $(X, \mathcal{F})$ 是一个可度量空间.

基和局部有限族是拓扑空间的重要的子集, 也是本文两个结论的证明中使用的重要工具.

定义 2.5^[1] 设 $(X, \mathcal{F})$ 是一个拓扑空间, $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一子族. 如果 $\mathcal{F}$ 的每一个元素是 $\mathcal{A}$ 中某些元素的并, 即对于每一个 $U \in \mathcal{F}$, 存在 $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ 使得 $U = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_1} A$, 则称 $\mathcal{A}$ 是拓扑 $\mathcal{F}$ 的一个基, 或称 $\mathcal{A}$ 是拓扑空间 $(X, \mathcal{F})$ 的一个基.

定义 2.6^[1] 设 $(X, \mathcal{F})$ 是一个拓扑空间, $x \in X$. 如果 U 是 X 的一个子集, 满足条件: 存在一个开集 $V \in \mathcal{F}$ 使得 $x \in V \subset U$, 则称 U 是点 x 的一个领域. 点 x 的所有领域构成的子集族称为点 x 的领域系. 记 U_x 为 x 的领域系, U_x 的子族 V_x 如果满足条件: 对每一个 $U \in U_x$, 存在 $V \in V_x$ 使得 $V \subset U$, 则称 V_x 是点 x 的领域基.

定义 2.7^[1] 若拓扑空间 $(X, \mathcal{F})$ 存在一个可数基, 则称 $(X, \mathcal{F})$ 具有第二可数性.

定义 2.8^[1] 设 X 是一个拓扑空间, 如果 X 中的任何一个点和任何一个不包含这个点的闭集都各有一个开领域, 它们互不相交, 则称拓扑空间 X 是一个正则空间; 如果 X 中的任意两个不相同的点中每一个点都有一个开领域不包含另一个点, 则称拓扑空间 X 是一个 T_1 空间.

定义 2.9^[3] X 的一个集族 $\mathcal{U}$ 称为局部有限族, 如果对于任意 $x \in X$, 都存在 x 的一个领域 $U(x)$ 使 $U(x)$ 与 $\mathcal{U}$ 中有限个元素交集非空; 进一步若集族 $\mathcal{U}$ 是 X 的基, 则称 $\mathcal{U}$ 为 X 的一个局部有限基. 若集族 $\mathcal{A}$ 是 X 的可数个局部有限族的并, 则称集族 $\mathcal{A}$ 为 X 的一个 σ 局部有限族; 进一步若 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个基, 则称 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个 σ 局部有限基.

定义 2.10^[1] 设 $\mathcal{A}$ 是一个集族, B 是一个集合, 如果 $B \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, 则称集族 $\mathcal{A}$ 是集合 B 的一个覆盖, 当且仅当 $\mathcal{A}$ 是可数族或者有限族时, 分别称集族 $\mathcal{A}$ 是集合 B 的一个可数覆盖和有限覆盖. 若 $\mathcal{A}$ 是可数 (有限) 的开集族, 则称 $\mathcal{A}$ 是集合 B 的一个可数 (有限) 的开覆盖.

下面列出的定理是后面结论证明的重要依据.

定理 2.11^[1] 拓扑空间 $(X, \mathcal{F})$ 是可度量空间, 则 $(X, \mathcal{F})$ 必是正则空间.

定理 2.12^[1] 具有第二可数性的拓扑空间的任何一个子空间都具有第二可数性.

定理 2.13^[3] (Nagata-Smirnov 可度量定理) 拓扑空间 $(X, \mathcal{F})$ 可度量, 当且仅当 $(X, \mathcal{F})$ 是正则的且具有 σ 局部有限基.

3 主要结果

引理 3.1 (遗传性) 若拓扑空间 $(X, \mathcal{F})$ 是可度量化空间, 则 X 的任意拓扑子空间 $(Y, \mathcal{F}|_Y)$ 也是可度量化空间.

证 设 ρ 是 $(X, \mathcal{F})$ 的度量, 则对应的 $\rho|_Y$ 是 Y 的一个度量, 另设 Y 的由 $\rho|_Y$ 诱导出的拓扑为 $\mathcal{F}_\rho|_Y$. 现证明 $\mathcal{F}|_Y = \mathcal{F}_\rho|_Y$: 记度量空间 $X(Y)$ 中以 $x(y)$ 为中心, $\varepsilon > 0$ 为半径的球形领域为 $B_X(x, \varepsilon)$ ($B_Y(y, \varepsilon)$) 则对任意 $y \in Y, \varepsilon > 0$, 有 $B_Y(y, \varepsilon) = B_X(y, \varepsilon) \cap Y$. 因为 Y 的所有球形领域构成的族是 Y 的一个基, 对任意 $U \in \mathcal{F}_\rho|_Y$, 存在 Y 的一族球形领域 (设其为 $\mathcal{A}$), 使 U 为这些领域的并, 所以

$$U = \bigcup_{B_Y(y, \varepsilon) \in \mathcal{A}} B_Y(y, \varepsilon) = \bigcup_{B_Y(y, \varepsilon) \in \mathcal{A}} (B_X(y, \varepsilon) \cap Y) = \left(\bigcup_{B_X(y, \varepsilon) \in \mathcal{A}} B_X(y, \varepsilon) \right) \cap Y,$$

显然 $V = \bigcup_{B_X(y, \varepsilon) \in \mathcal{A}} B_X(y, \varepsilon)$ 是 X 的一个开集, 所以 $U = V \cap Y \in \mathcal{F}|_Y$, 所以 $\mathcal{F}_\rho|_Y \subset \mathcal{F}|_Y$.

另一方面对任意 $U \in \mathcal{F}|_Y$, 存在 $V \in \mathcal{F}$, 使 $U = V \cap Y$. 则对任意 $y \in U$ 有 $y \in V$ 且 $y \in Y$, 因为 V 中存在球形领域 $B_X(y, \varepsilon) \subset V$, 可得球形领域 $B_Y(y, \varepsilon) = B_X(y, \varepsilon) \cap Y \subset U$. 又 $B_Y(y, \varepsilon) \subset B_X(y, \varepsilon) \subset V$, 所以 $B_Y(y, \varepsilon) \subset U$, 即对任意 $y \in U$, 都存在球形领域 $B_Y(y, \varepsilon)$ 使 $B_Y(y, \varepsilon) \subset U$, 所以 U 是度量 $\rho|_Y$ 诱导出的开集, 即 $U \in \mathcal{F}_\rho|_Y$. 所以 $\mathcal{F}|_Y \subset \mathcal{F}_\rho|_Y$.

综上所述即得 $\mathcal{F}|_Y = \mathcal{F}_\rho|_Y$, 所以 $\mathcal{F}|_Y$ 即为 Y 的由度量 $\rho|_Y$ 诱导出的拓扑, 所以 $(Y, \mathcal{F}|_Y)$ 也是可度量化空间, 证毕.

定理 3.2 拓扑空间 $(X, \mathcal{F})$ 可度量化当且仅当 $(X, \mathcal{F})$ 是正则的且存在一个可数开覆盖 $\mathcal{A} = \{A_n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ 使对每一个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 子空间 $(A_n, \mathcal{F}|_{A_n})$ 是一个可度量化空间.

证 必要性: 易知对任意可度量的拓扑空间, 可数开覆盖是存在的. 事实上, 对任意可度量化拓扑空间 (X, ρ) , 令子集族 $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n$, 其中 $U_n = \{y | \rho(x, y) < n\}$, x 是 X 的一固定点. 则 $\mathcal{U}$ 即为 (X, ρ) 的一个可数开覆盖. 另由定理 2.11 和引理 3.1 即可知必要性成立.

充分性: 因为对每一个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 子空间 $(A_n, \mathcal{F}|_{A_n})$ 是一个可度量化空间, 所以由定理 2.13 知 $(A_n, \mathcal{F}|_{A_n})$ 存在一个 σ 局部有限基 (可数个局部有限基的并), 设其为 $\mathcal{B}_n$, 令 $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{B}_n$. 下面将证明 $\mathcal{U}$ 为 X 的一个 σ 局部有限基.

对任意 $U \in \mathcal{F}$, 因为 $\mathcal{A} = \{A_n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 $(X, \mathcal{F})$ 的开覆盖, 所以 $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} (U \cap A_n)$. 而易知对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, $U \cap A_n \in \mathcal{F}|_{A_n}$, 所以 $U \cap A_n$ 可表示为 $\mathcal{B}_n$ 中一些元素的并. 则当然也可表示成 $\mathcal{U}$ 中一些元素的并, 所以易知 U 可表示为 $\mathcal{U}$ 中一些元素的并. 所以 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个基. 又因为对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{B}_n$ 是一个 σ 局部有限族, 即可数个局部有限基的并, 所以显然可数个 σ 局部有限族的并 $\mathcal{U}$ 也是一个 σ 局部有限族, 所以 $\mathcal{U}$ 为 $(X, \mathcal{F})$ 的一个 σ 局部有限基. 又 $(X, \mathcal{F})$ 是正则空间, 所以由定理 2.13 得 $(X, \mathcal{F})$ 是可度量化空间, 证毕.

由定理 3.2 和定理 2.12 不难得出以下推论.

推论 3.3 拓扑空间 $(X, \mathcal{F})$ 是具有第二可数性的可度量化空间当且仅当 $(X, \mathcal{F})$ 是正则的且存在一个可数开覆盖 $\mathcal{A} = \{A_n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ 使对每一个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 子空间 $(A_n, \mathcal{F}|_{A_n})$ 是一个具有第二可数性的可度量化空间.

引理 3.4 拓扑空间的所有元素的开领域基的并构成拓扑空间的一个基.

证 设 $(X, \mathcal{F})$ 是一个拓扑空间, 对任意 $x \in X$, 记 x 的开领域基为 $\mathcal{A}(x)$, 令 $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}(x)$. 对任意 $U \in \mathcal{F}$, U 是它内部所有元素的领域, 所以对每个 $x \in U$, 都存在 $A(x) \in \mathcal{A}(x) \subset \mathcal{F}$, 使 $A(x) \subset U$, 所以 $U = \bigcup_{x \in U} \mathcal{A}(x)$, 所以 $\mathcal{F}$ 的任意元素都可以表示成 $\mathcal{U}$ 中一些元素的并, 所以 $\mathcal{U}$ 是 $(X, \mathcal{F})$ 的一个基, 证毕.

定理 3.5 拓扑空间 $(X, \mathcal{F})$ 可度量化当且仅当 $(X, \mathcal{F})$ 是 T_1 的且对任意 $x \in X$ 存在 x 的可数领域基 $\{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 满足

- (i) 对每个 $x \in X$ 和每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, $U_{n+1}(x) \subset U_n(x)$;
- (ii) 对任意 $x, y \in X$ 和任意 $n \in \mathbb{Z}_+$, 若 $x \in U_n(y)$, 则 $y \in U_n(x)$;
- (iii) 对任意 $x \in X$ 令 $U_0(x) = X$, 则对任意 $x, y, z \in X$, 若 $y \notin U_n(x)$, $z \notin U_n(x)$ 则 $y \notin U_{\lfloor mn/(m+n) \rfloor}(z)$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

证 必要性: 设度量空间 $(X, \mathcal{F})$ 的度量是 ρ 且对任意 $x \in X$, 设 $U_n(x) = B(x, 1/n)$, 则易知 $\{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 是 x 的可数领域基. 事实上, 由引理 3.4 知 x 的所有球形领域构成 x 的领域基, 而对任意 $\varepsilon > 0$, 必存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使 $1/k \leq \varepsilon$, 所以对任意球形领域 $B(x, \varepsilon)$ 存在 $B(x, 1/k) \in \{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 使 $B(x, 1/k) \subset B(x, \varepsilon)$. 显然 $B(x, 1/(n+1)) \subset B(x, 1/n)$, 所以 $\{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 满足条件 (i). 又由度量的定义知对任意 $x, y \in X$, 若 $\rho(x, y) < 1/n$, 则 $\rho(y, x) = \rho(x, y) < 1/n$, 所以 $\{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 满足条件 (ii). 另外对任意 $x, y, z \in X$, 若 $y \notin U_n(x)$, $z \notin U_n(x)$, 则 $\rho(x, y) \geq 1/n$, $\rho(x, z) \geq 1/n$, 所以由三角不等式得

$$\rho(z, y) \geq \rho(x, y) + \rho(x, z) \geq 1/n + 1/n = 2/n = 1/(mn/(m+n)),$$

所以

$$y \notin U_{\lfloor mn/(m+n) \rfloor}(z),$$

即 $\{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 满足条件 (iii).

充分性: 对任意 $x \in X$ 令 $U_0(x) = X$, 则对任意 $y \in X$, 因为 $(X, \mathcal{F})$ 是 T_1 空间, 所以若 $y \neq x$ 则必存在 x 的开领域不包含 y , 即必存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使 $y \in U_{k-1}(x)$ 但 $y \notin U_k(x)$, 所以对每一个 $x \in X$ 可以设映射 $f_x: X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对任意 $y \in X$, 若 $y \in X - U_1(x)$, 则 $f_x(y) = 1$; 若 $y = x$, 则 $f_x(y) = 0$; 若 $y \in U_{n-1}(x)$ 且 $y \notin U_n(x)$, 则 $f_x(y) = 1/n$. 对任意 $x, y \in X$ 由条件 (ii) 知, 若 $x \in U_n(y)$ 且 $x \notin U_{n+1}(y)$, 则 $y \in U_n(x)$ 且 $y \in U_{n+1}(x)$, 所以有 $f_x(y) = f_y(x)$. 所以对任意 $x, y \in X$ 可以定义 $\rho(x, y) = f_x(y)$. 显然 $\rho(x, y) = f_x(y) = f_y(x) = \rho(y, x)$ (对称性), 且当且仅当 $y = x$ 时 $\rho(x, y) = f_x(x) = 0$ (正则性). 对任意 $x, y, z \in X$, 设 $\rho(x, y) = 1/n$, $\rho(x, z) = 1/m$, 则 $y \notin U_n(x)$, $z \notin U_n(x)$ 所以由条件 (iii) 知 $y \notin U_{\lfloor mn/(m+n) \rfloor}(z)$, 所以

$$\rho(y, z) \geq 1/\lfloor mn/(m+n) \rfloor \geq 1/(mn/(m+n)).$$

所以

$$\rho(x, z) + \rho(y, z) \geq 1/m + 1/(mn/(m+n)) \geq 1/n * (m+2n)/m \geq 1/n = \rho(x, y)$$

(三角不等式). 所以 ρ 是 X 的一个度量. 下面证明由 ρ 诱导的 X 的拓扑 $\mathcal{F}_\rho$ 即为 $\mathcal{F}$. 事实上由 ρ 的定义知对任意 $x \in X$ 和任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 有

$$B(x, 1/n) = \bigcup_{y, z \in X} \{\rho(x, y) < 1/n\} = \bigcup_{y \in X} \{y \in U_n(x)\} = U_n(x),$$

而必要性中的讨论和引理 3.4 可知 $\bigcup_{x \in X} \{B(x, 1/n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 是 $\mathcal{F}_\rho$ 的一个基, $\bigcup_{x \in X} \{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个基, 所以 $\mathcal{F}_\rho$ 和 $\mathcal{F}$ 存在相同的基, 所以 $\mathcal{F}_\rho = \mathcal{F}$, 即 $(X, \mathcal{F})$ 是可度量化空间, 证毕.

参 考 文 献

- [1] 熊金城. 点集拓扑讲义 (第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [2] 高国士. 拓扑空间论 (第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [3] 亚当斯 (Adams C). 拓扑学基础及应用 (美)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.
- [4] Armstrong M A. 基础拓扑学 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.
- [5] Engelking R. General topology[M]. Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1977.
- [6] 儿玉之宏, 永见起应. 拓扑空间论 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [7] John L. Kelley. 普通拓扑学 [M]. 北京: 世界图书出版公司, 2000.

THE NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION OF TOPOLOGICAL SPACE BEING METRIZABLE

CHEN Juan, GAO Sui-xiang

(School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences,
Beijing 101408, China)

Abstract: In this paper, we study the necessary and sufficient condition that a topological space is metrizable. By using the properties of countable open cover and metric space's hereditary and definition, we give two necessary and sufficient conditions that a topological space is metrizable, which promote the foundation of structuring metrizable space and determining whether a topological space is metrizable.

Keywords: topological space; metric space; metrizable; necessary and sufficient condition

2010 MR Subject Classification: 54A05