

可数对一映射及相关问题

王 培

(玉林师范学院数学与信息科学院, 广西 玉林 537000)

摘 要: 本文研究了 $\aleph_0$ - sn -度量空间与度量空间之间的关系. 利用特殊映射, 获得了在序列空间中下述命题等价: (1) 空间 X 是 $\aleph_0$ - sn -度量空间; (2) 存在从度量空间 M 到 X 可数对一、序列商、 σ 映射 f ; (3) 存在从度量空间 M 到 X 可数对一、序列商、 σ 映射 f 使得对每一个 $x \in X, \partial f^{-1}(x)$ 是 σ -紧. 推广了参考文献 [3, 4] 中的一些结果.

关键词: $\aleph_0$ - sn -度量空间; 可数对一; 序列商映射

MR(2010) 主题分类号: 54D70; 54D55; 54E35; 54E40

中图分类号: O189.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)04-0983-04

1 引言

广义度量空间理论在一般拓扑学的研究中占据重要位置^[1]. 而映射又是处理广义度量空间问题的重要手段之一. 本文在刘川等讨论了具有 $\aleph_0$ -弱基^[2]的空间的基础上讨论了 $\aleph_0$ - sn -度量空间, 并得到了关于 $\aleph_0$ - sn -度量空间及 $\aleph_0$ - sn -弱第一可数空间的一些刻画^[3]. 该空间是 $\aleph_0$ -弱第一可数空间的推广, 该推广很好的建立了 $\aleph_0$ -弱基与 cs^* -网之间的联系. 从 $\aleph_0$ - sn -网的定义中不难看出当 $n=1$ 时, $\aleph_0$ - sn -网就是 sn -网, 同时作者也在文 [3] 中给出了例子说明 $\aleph_0$ - sn -网不是 sn -网. 作者在文 [3] 中给出了 $\aleph_0$ - sn -网的相关刻画, 在文 [4] 中给出了关于 $\aleph_0$ - sn -度量空间的等价刻画. 本文将对该空间与度量空间之间的关系做进一步的刻画.

本文所述空间均为正则 T_1 的, 所有映射都是连续到上的. N 表示自然数, 对本文中沒有提及的概念和术语请参考参考文献 [5-8]. 首先回忆一些定义.

定义 1 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个映射. f 称为序列商映射^[9], 若对 Y 中的收敛序列 $\{y_n\}$, 则存在 X 中收敛于序列 $\{x_n\}$, 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_{n_k})$.

定义 2 空间 X 的子集族 $\mathcal{B}$ 称为 X 的一个 $\aleph_0$ -弱基^[2], 如果 $\mathcal{B} = \bigcup \{B_x(n) : x \in X, n \in N\}$ 满足:

- (1) 对每一个 $x \in X, n \in N, B_x(n)$ 对有限交封闭并且 $x \in \bigcap B_x(n)$;
- (2) U 是空间 X 的开集当且仅当对任意的 $x \in X, n \in N$, 存在 $B_x(n) \in \mathcal{B}_x(n)$ 使得 $B_x(n) \subset U$.

定义 3 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的集族, $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k -网^[10], 如果对 X 的紧集 $K \subset U \in \tau$, 则存在有限集 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, 使得 $K \subset \bigcup \mathcal{P}' \subset U$.

*收稿日期: 2014-02-20

接收日期: 2014-06-09

基金项目: 地区基金资助 (11061004); 广西青年自然科学基金资助 (2014GXNSFBA118015); 玉林师范学院重点项目基金资助 (2012YJZD20).

作者简介: 王培 (1980-), 男, 山东滕州, 讲师, 主要研究方向: 一般拓扑学及粗糙集.

定义 4 空间 X 的子集族 $\mathcal{B}$ 称为 X 的 $\aleph_0$ - sn -网, 如果 $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}_x(n) : x \in X, n \in N\}$ 满足:

- (1) 对每一个 $x \in X, n \in N, \mathcal{B}_x(n)$ 对有限交封闭并且 $x \in \bigcap \mathcal{B}_x(n)$;
- (2) L 是空间 X 的收敛于 $x \notin L$ 的序列, 则存在 L 的子序列 L' 及 $n_0 \in N$ 对任意的 $B_x(n_0, m) \in \mathcal{B}_x(n_0)$ 使得 L' 终留于 $B_x(n_0)$.

类比 Sirois-Dumais^[11] 的定义, 我们定义 X 称为 $\aleph_0$ - sn -弱第一可数空间, 若空间 X 有一个 $\aleph_0$ - sn -网 $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}_x(n) : x \in X, n \in N\}$, 对任意的 $x \in X, n \in N, \mathcal{B}_x(n)$ 是可数的.

空间 X 称为 $\aleph_0$ - sn -度量空间, 若空间 X 有 σ -局部有限 $\aleph_0$ - sn -网.

若对每一个 $n \in N$ 有 $\mathcal{B}_x(n) = \mathcal{B}_x(1)$, 有 sn -网的定义知 $\mathcal{B}$ 是 sn -网.

2 主要结果

在文 [3] 中我们证明了空间 X 具有点可数 $\aleph_0$ - sn -网当且仅当它是度量空间的可数到一、序列商映像. 在文 [4] 中我们讨论了 $\aleph_0$ - sn -网与可分度量空间之间的关系, 我们还讨论了 $\aleph_0$ - sn -度量空间与 $\aleph_0$ - sn -弱第一可数空间、 $\aleph_0$ -空间及 $\aleph$ -空间之间的关系. 本文中我们将在文 [3] 的基础上讨论更加一般性的问题并给出它们之间的一些刻画.

定义 2.1^[1] 映射 $f : X \rightarrow Y$ 称为有可数边界, 若对任意的 $y \in Y, \partial f^{-1}(y)$ 是可数集.

引理 2.2^[3] 在拓扑空间 X 中下述条件等价:

- (1) X 是 $\aleph_0$ - sn -度量空间;
- (2) X 有 σ -离散的 $\aleph_0$ - sn -网;
- (3) X 有 σ -局部有限的 $\aleph_0$ - sn -网;
- (4) X 是 $\aleph_0$ - sn -弱第一可数的 $\aleph$ -空间.

引理 2.3^[3] 令 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 σ -遗传闭包保持子集族, 若 $\mathcal{P}$ 是 cs^* -网, 则 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 k -网.

引理 2.4^[12] 设 $f : X \rightarrow Y$, 若 Y 是序列空间且 f 是序列商映射, 则 f 是商映射.

引理 2.5 拓扑空间 X 是 $\aleph_0$ - sn -弱第一可数空间当且仅当它是度量空间的序列商映像且对任意的 $x \in X, \partial f^{-1}(x)$ 是可数集

证 设拓扑空间 X 是 $\aleph_0$ - sn -弱第一可数空间.

令 $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}_x(n) : x \in X, n \in N\}$ 是空间 X 的 $\aleph_0$ - sn -网. 对每一个 $x \in X, n \in N, \mathcal{B}_x(n)$ 是可数集, 不妨设 $\mathcal{B}_x(n) = \{B_x(n, m) : m \in N\}$. 令 $Y_x(n)$ 是拓扑空间 X 中除了点 x 外其它点都是开集构成的集合, 因此 $Y_x(n)$ 有邻域基 $\{B_x(n, m) : m \in N\}$, 进而 $Y_x(n)$ 是度量空间 (例如很容易证明下面度量空间的拓扑和 $Y_x(n)$ 的拓扑是一致的).

当 m 是使得 $y \in B_x(n, m)$ 成立的最小整数时, 定义 $d(y, x) = 1/m$; 当 $y_1 \neq x$ 且 $y_2 \neq x$ 时, 定义 $d(y_1, y_2) = d(y_1, x) + d(y_2, x)$.

我们定义空间 Y 是互不相交的 $Y_x(n)$ 的全体构成的集合, 则 Y 是可数度量空间. 令 f 是 Y 到 X 的自然映射 (即把每一个点映为自身), 容易证明 f 是连续映射, 我们采用文 [3] 定理 2.4 的方法证明 f 是序列商映射. 因为当 n 跑遍所有的自然数 N 时, $\partial f^{-1}(x)$ 是由每一个 $Y_x(n)$ 中的点 x 构成的, 所以 $\partial f^{-1}(x)$ 是可数集.

反之, 令 $f : M \rightarrow X$ 是序列商映射且对任意的 $x \in X, \partial f^{-1}(x)$ 是可数集. 由于 M 是度量空间. 取 $\partial f^{-1}(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. 取 $\{C_x(n, m) : m \in N\}$ 是点 x_n 的邻域基. 取 $B_x(n, m) = f(C_x(n, m))$, 令 $\mathcal{B}_x(n) = \bigcup \{B_x(n, m) : m \in N\}$, 我们可以采用文 [4] 中定理 1 的证

明方法证明 $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x(n) : x \in X, n \in N\}$ 是 $\aleph_0$ -sn - 网, 并且 $\mathcal{B}_x(n) = \cup\{B_x(n, m) : m \in N\}$ 是可数集.

同样利用引理 2.5 的方法, 我们不难证明:

引理 2.6 拓扑空间 X 是 $\aleph_0$ -sn - 弱第一可数空间当且仅当它是度量空间的序列商映像且对任意的 $x \in X$, $\partial f^{-1}(x)$ 是 σ -紧集.

定理 2.7 在序列空间 X 中下述条件等价:

- (1) 空间 X 是 $\aleph_0$ -sn - 度量空间;
- (2) 存在从度量空间 M 到 X 可数对一、序列商、 σ 映射 f ;
- (3) 存在从度量空间 M 到 X 可数对一、序列商、 σ 映射 f 使得对任意的 $x \in X$, $\partial f^{-1}(x)$ 是 σ -紧.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 令 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_x(n) : x \in X, n \in N\}$ 是空间 X 的 σ -局部有限的 $\aleph_0$ -sn - 网. 对每一个 $m \in N$, $\mathcal{P}_x(n) = \{P_x(n, m) : m \in N\}$ 有 $P_x(n, m+1) \subset P_x(n, m)$. 对每一个 $n \in N$, 记 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_i : i \in N\}$, 其中对每一个 $i \in N$, $\mathcal{P}_i$ 是局部有限集且 $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}_{i+1}$. 对每一个 $x \in X$, 选择 $i(x, n, m) \in N$ 使得 $P_x(n, m) \in \mathcal{P}_{i(x, n, m)}$ 且 $i(x, n, m) < i(x, n, m+1)$. 当 $i < i(x, n, 1)$ 时, 取 $B_x(n, m) = X$; 当 $i(x, n, m) \leq i < i(x, n, m+1)$ 时, 取

$$\begin{aligned} B_x(n, m) &= P_x(n, m), \\ \mathcal{B}_x(n) &= \{B_x(n, i) : i \in N\}, \\ \mathcal{B} &= \cup\{\mathcal{B}_x(n) : x \in X, n \in N\}, \end{aligned}$$

则对每一个 $x \in X, n \in N$, 及 $i \in N$, $\mathcal{B}$ 是空间 X 的 $\aleph_0$ -sn - 网满足 $B_x(n, i+1) \subset B_x(n, i)$ 且 $B_x(n, i) \in \mathcal{P}_i$.

再记 $\mathcal{P}_i = \{B_\alpha : \alpha \in I_i\}$. 对每一个 $i \in N$, 赋予 I_i 离散拓扑, 根据文 [5] 拓扑空间中的两个子集族 $\{R_n : n \in N\}$ 和 $\{Q_m : m \in N\}$ 称为共尾的, 若对每一个 $i \in N$, 存在 $n_0 \in N$ 及 $m_0 \in N$ 使得 $R_{n_0+i} = Q_{m_0+i}$. 令 $M = \{\alpha = (\alpha_i) \in \prod_{i \in N} I_i : \text{存在 } x_\alpha \in X, n \in N \text{ 使得 } \{B_{\alpha_i} : i \in N\} \text{ 共尾于 } \mathcal{B}_{x_\alpha}(n) \text{ 且 } \{B_{\alpha_i} : i \in N\} \text{ 是 } x_\alpha \text{ 的网}\}$. 定义 $f : M \rightarrow X$ 如下 $f(\alpha_i) = x_\alpha$. 因为对每一个 $n \in N$, $\mathcal{B}_x(n)$ 是点 x 的网, 则不难验证 f 定义合理且 f 是到上映射, 容易验证 M 是度量空间且 f 是连续的. 因为每一个 $\mathcal{P}_i$ 是局部有限的, 故 f 是可数对一映射.

对每一个 $i \in N$, $\alpha_i \in I_i$, 令 $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \{\beta = (\beta_i) \in M : \beta_i \in \alpha_i, i \leq n\}$ 和 $\mathcal{D} = \{D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in I_i, i \leq n, n \in N\}$, 则容易证明 $\mathcal{D}$ 是空间 M 的基且 $f(D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) = \cap B_\alpha$.

我们将证明 f 是序列商映射.

令 $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x(n) : x \in X, n \in N\}$ 是 $\aleph_0$ -sn - 网. L 是 X 中收敛到点 $x \notin L$ 的序列. 则对任意的 $m \in N$, 存在 L 的子列 L' 及 $n_0 \in N$ 使得 L' 终留于 $B_x(n_0, m)$. 对每一个 $i \in N$ 取 $\alpha_i \in I_i$ 使得 $B_{\alpha_i} = B_x(n_0, i)$. 令 $\alpha = (\alpha_i)$, 则 $\alpha \in M$. 对每一个 $k \in N$, 令 $n_k = \min\{m \in N : x_k \notin B_x(n_0, m)\}$. 按如下的方式定义 $z_k = (\beta_i(k)) \in \prod_{i \in N} I_i$ 当 $i < n_k$, 取 $\beta_i(k) \in I_i$ 使得 $B_{\beta_i(k)} = B_x(n_0, i)$; 否则取 $\beta_i(k) \in I_i$ 使得 $B_{\beta_i(k)} = B_{x_k}(1, i - n_k + 1)$. 则 $\{B_{\beta_i(k)} : i \in N\}$ 共尾于 $\mathcal{B}_{x_k}(1)$, 从而 $z_k \in M$ 且 $f(z_k) = x_k$, 也就是说, 对每一个 $i \in N$ 存在 $k_0 \in N$, 对任意的 $k \geq k_0$ 有 $x_k \in B_x(n_0, i)$ 因为 L' 终留于 $B_x(n_0, i)$. 当 $k \geq k_0$ 及 $i < n_k$,

由 n_k 的定义, 有 $\beta_i(k) = \alpha_i$, 也就是说在离散空间 I_i 中 $\{B_{\beta_i}(k) : i \in N\}$ 收敛于 α_i , 因此 z_k 在 M 收敛于 α . 因此, f 是序列商映射.

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然成立.

(3) $\Rightarrow$ (1) 由引理 2.6 知 X 是 $\aleph_0$ - sn - 若第一可数空间, 又因为 X 是序列空间, 故由引理 2.5 知 f 是商映射, 因为度量空间的商、 σ - 像是 $\aleph$ - 空间^[14], 再有引理 2.2 知 X 是 $\aleph_0$ - sn - 度量空间.

参 考 文 献

- [1] 林寿. 广义度量空间与映射 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.
- [2] Liu C, Lin S. On countable-to-one maps[J]. Topology Appl., 2007, 154: 449–454.
- [3] 王培. 关于 $\aleph_0$ - sn - 度量空间 [J]. 广西科学, 2010, 17(1): 32–35.
- [4] 王培, 葛洵. $\aleph_0$ - sn - 网的注记 [J]. 山东大学学报理学版, 2011, 4: 118–120.
- [5] Arhangel'skii A V. Mapping and spaces[J]. Russian Math. Surveys, 1966, 21: 115–162.
- [6] Foged L. Characterizations of $\aleph$ -spaces[J]. Pacific J. Math., 1984, 110: 59–63.
- [7] Ge Y. Space with countable sn -network[J]. Comments. Math. Univ. Carolinae, 2004, 45(1): 169–176.
- [8] Ge Y. Space with a σ -locally finite universal cs -network[J]. Questions and Answers in general topology, 2000, 18(1): 93–96.
- [9] Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient maps[J]. Czech Math. J., 1976, 26: 174–182.
- [10] O'Meara P. A new class of topological spaces[J]. University of Alberta dissertation, 1966, 4: 23–40.
- [11] Sirois-Dumais R. Quasi-weakly and quasi-first-countable spaces[J]. Topology Appl., 1980, 11(3): 223–230.
- [12] 葛英. 关于 sn - 度量空间 [J]. 数学学报, 2002, 45: 355–360.
- [13] Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mappings[J]. Czech. Math. J., 1976, 26: 174–182.
- [14] Tanaka Y, Li Z. Certain covering-maps and k -networks, and related matters[J]. Topology Proc, 2003, 27: 317–334.

COUNTABLE TO ONE MAPS AND RELATED MATTERS

WANG Pei

(Department of Math. and Information Science, Yulin Normal University, Yulin 537000, China)

Abstract: In this paper, the connection between $\aleph_0$ - sn -metric spaces and metric spaces is discussed by special mapping. The following results are equivalent in a sequential space: (1) X is an $\aleph_0$ - sn -metric spaces; (2) There is a metric spaces M and countable to one、sequentially quotient、 σ map $f: M \rightarrow X$; (3) There is a metric spaces M and countable to one、sequentially quotient、 σ map $f: M \rightarrow X$ such that $\partial f^{-1}(x)$ is σ -compact for each $x \in X$. It is the generalization of references [3, 4].

Keywords: $\aleph_0$ - sn -metric space; countable to one; sequentially quotient map

2010 MR Subject Classification: 54D70; 54D55; 54E35; 54E40