

比例保本约束下的最优投资组合选择

罗 葵¹, 周 旋¹, 赵洪雅¹, 王思敏²

(1. 深圳职业技术学院工业中心, 广东 深圳 518055)

(2. 武汉大学经济与管理学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文研究了幂效用函数下带有比例保本约束的最优投资组合选择问题. 利用拉格朗日乘子和投资组合复制方法, 得到最优财富过程和最优投资组合, 推广了带有限制的投资组合的相关结果.

关键词: 最优投资组合; 拉格朗日乘子; 幂效用函数; 保本约束

MR(2010) 主题分类号: 60F10; 60G50

中图分类号: O211.6

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)01-0167-06

1 引言

经典的连续时间投资组合管理一般被当作动态规划问题来研究, 其任务是实现各种各样的目标, 寻找其最优动态投资组合策略. 众多学者在此领域取得了很多有意义的结果, 如 Merton^[1], Fleming^[2], Karatzas^[3] 等.

近年来, 基于现实投资中的各种约束是客观存在的, 越来越多的研究集中在带有各类限制的投资组合优化问题. 如 Lakner^[4] 研究了消费率和财富过程终值都有常数下限的情况下的投资组合问题, 运用 Clark-Ocone 公式求得了最优投资组合策略. Jun^[5] 研究了考虑带风险价值限制的最优均值方差投资组合策略, 将经典的均值方差最优投资组合问题加入风险价值限制来进行研究, 运用动态规划理论求得最优投资组合策略. Luo^[6] 利用拉格朗日乘子和 HJB 方法研究了带有流动性限制的追踪目标财富过程的投资组合选择问题. Bielecki^[7] 利用风险中性方法研究了带有禁止破产约束的连续时间模型下均值方差投资组合选择问题. 本文进一步考虑另一类带有限制的投资组合问题, 研究在幂效用函数下, 带有比例保本约束的最优投资组合选择问题. 考虑在要求财富过程不低于比例保本过程的基准前提下, 如何来寻找最优投资策略.

本文首先把问题分解成两个子问题来研究, 首先利用一组方程来求解拉格朗日乘子, 进而得到最优财富过程; 然后利用投资组合来复制该过程, 从而得到最优投资策略. 通过本文的讨论, 我们解决了幂效用函数下, 带有比例保本约束的最优投资组合选择问题, 求得了最优财富过程和最优投资组合选择的表达式.

2 定义和模型

*收稿日期: 2014-02-19

接收日期: 2014-06-04

基金项目: 国家自然科学基金项目 (31100958); 深圳职业技术学院自然科学基金项目 (2213K3170021; 2213K3170022).

作者简介: 罗葵 (1981-), 女, 湖北京山, 博士, 主要研究方向: 金融数学.

通讯作者: 周旋.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一完备的概论空间, $W(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上规范的 n 维布朗运动. $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 是 $W(\cdot)$ 生成的自然 σ -域. T 为一预设的时间终值. $L^2_{\mathcal{F}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 是满足 $\mathbb{E} \int_0^T |x(t)|^2 dt < +\infty$ 的 $\mathbb{R}^d$ -值, $\mathcal{F}_t$ 可适, 循序可测的随机过程 $x(\cdot) = \{x(t); 0 \leq t \leq T\}$ 组成的集合. $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 是满足 $\mathbb{E}(|\eta|^2) < +\infty$ 的 $\mathbb{R}^d$ -值, $\mathcal{F}_T$ 可适的随机变量组成的集合.

假设市场上有 $n+1$ 种资产, 其中无风险资产的价格过程满足如下常微分方程:

$$\begin{cases} dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt, & t \in [0, T], \\ P_0(0) = p_0 > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

这里, 利率 $r(t)$ 是一个 $\mathcal{F}_t$ 可适的一致有界随机过程.

n 个风险资产的价格过程 $P(t) = (P_1(t), \dots, P_n(t))^T$ (T 为转置因子), 满足下述随机微分方程:

$$\begin{cases} dP(t) = \text{diag}(\mu(t))P(t)dt + \sigma(t)dW(t), & t \in [0, T], \\ P(0) = p_0 = (p_1, \dots, p_n)^T, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中, 增长率 $\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_n(t))$ 和波动率 $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{n \times n}$ 都是 $\mathcal{F}_t$ -可适的一致有界随机过程, “diag” 表示对角矩阵.

本文要求财富过程满足 $x(t) \in L^2_{\mathcal{F}}([0, T]; \mathbb{R})$, 可容许的投资组合满足

$$\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_n(t))^T \in L^2_{\mathcal{F}}([0, T]; \mathbb{R}^n).$$

不失一般性, 我们这里假设 $n=1$, 则财富过程 $x(t)$ 满足随机微分方程 (SDE):

$$\begin{cases} dx(t) = [r(t)x(t) + B(t)\pi(t)]dt + \pi(t)\sigma(t)dW(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \geq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 $B(t) = (\mu(t) - r(t))$.

定义 1 本文研究在幂效用函数下, 财富过程带有比例保本约束的条件下的最优投资组合选择问题:

$$\begin{aligned} & \max_{\pi(\cdot)} \mathbb{E}[U(x(T))], \\ \text{s.t. } & \begin{cases} x(t) \geq \underline{x}(t), & \text{a.s.}, \\ (x(t), \pi(t)), & \text{满足 SDE(2.3)}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

这里 $U(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$ ($0 < \gamma < 1$), 假设保本比例为 α ($0 < \alpha < 1$), 则此比例保本下的无风险投资收益过程 $\underline{x}(t) = \alpha x_0 \exp(\int_0^t r(s)ds)$ 是 α 比例保本约束过程.

3 若干引理

引理 1 假设 $x(t)$ 为可容许投资组合 $\pi(t)$ 下的财富过程, $\underline{x}(t) = \alpha x_0 \exp(\int_0^t r(s)ds)$ 为比例保本约束过程. 则对于任意 $t \in [0, T]$, 有 $x(T) \geq \underline{x}(T)$ a.s. $\Leftrightarrow x(t) \geq \underline{x}(t)$ a.s. $t \in [0, T]$.

证 i) 必要性, $\forall t \in [0, T]$, $x(t) \geq \underline{x}(t)$ a.s., $t \in [0, T]$, 显然 $x(T) \geq \underline{x}(T)$ a.s. 成立.

ii) 充分性, 假设 $\pi(\cdot)$ 是可容许的投资组合, $x(\cdot)$ 是满足 $x(T) \geq \underline{x}(T)$ a.s. 条件下的随机微分方程 (2.3) 的唯一财富过程. 记 $\xi := x(T)$ 为一个 $\mathcal{F}$ 平方可积的随机变量, 则 $(x(\cdot), z(\cdot)) := (x(\cdot), \sigma(\cdot)\pi(\cdot))$ 满足下述倒向随机微分方程 (BSDE):

$$\begin{cases} dx(t) &= [r(t)x(t) + \theta(t)z(t)]dt + z(t)dW(t), \quad t \in [0, T], \\ x(T) &= \xi, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $\theta(t) = B(t)[\sigma(t)]^{-1}$.

应用 Karoui^[8] 命题 2.2, 方程 (3.1) 存在唯一解:

$$x(t) = \rho(t)^{-1} \mathbb{E}[\rho(T)\xi | \mathcal{F}_t] \quad \text{a.s.} \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

其中

$$\rho(t) = \exp\left\{-\int_0^t [r(s) + \frac{1}{2} \|\theta(s)\|^2] ds - \int_0^t \theta(s) dW(s)\right\} \quad \text{a.s.} \quad t \in [0, T]. \quad (3.3)$$

若定义 $\xi := x(T)$ 或 $\xi := \underline{x}(T)$, 得到

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho(t)^{-1} \mathbb{E}[\rho(T)x(T) | \mathcal{F}_t] \quad \text{a.s.} \quad t \in [0, T], \text{ 或} \\ \underline{x}(t) &= \rho(t)^{-1} \mathbb{E}[\rho(T)\underline{x}(T) | \mathcal{F}_t] \quad \text{a.s.} \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

因此, 如果 $x(T) \geq \underline{x}(T)$ a.s., 则 $x(t) \geq \underline{x}(t)$ a.s. $t \in [0, T]$.

引理 2 设 $D \subseteq L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathbb{R})$ 为一凸集, f 为 $\mathbb{R}$ 上的标量值凸函数, 且 $a \in \mathbb{R}$, 对于任意给定的 $\xi \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathbb{R})$, 研究如下两个问题 (3.4) 和 (3.5):

$$\min_Y \mathbb{E}[f(Y)], \quad \text{s.t.} \begin{cases} \mathbb{E}[\xi Y] = a_i, \\ Y \in D. \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\min_Y \mathbb{E}\{f(Y) - \lambda \xi Y\}, \quad \text{s.t.} \quad Y \in D. \quad (3.5)$$

如果 Y^* 是问题 (3.4) 的解, 则存在拉格朗日乘子 λ 使得 Y^* 也是问题 (3.5) 的解; 相反的, 对于某个拉格朗日乘子 λ , 如果 Y^* 是 (3.5) 的解, 则 Y^* 也是问题 (3.4) 的解 (这里 $a = \mathbb{E}[\xi Y^*]$).

证 参见文献 Bielecki^[7] 命题 4.1.

4 主要结果

由引理 1, 我们可用终点约束 $x(T) \geq \underline{x}(T)$ 替代逐点约束 $x(t) \geq \underline{x}(t)$. 因此, (2.4) 式问题可简化为如下问题 ($0 < \gamma, \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} \max_{\pi(\cdot)} \quad & \mathbb{E}\left[\frac{1}{\gamma}(x(T))^\gamma\right], \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x(T) \geq \alpha x_0 \exp\left(\int_0^T r(s) ds\right) \quad \text{a.s.}, \\ (x(\cdot), \pi(\cdot)), \quad \text{满足} \quad \text{SDE}(2.3). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

下面我们将证明问题 (4.1) 分解为如下两个子问题来求解. 第一个子问题是在所有可容许的投资组合下的财富过程终值 $x(T)$ 中寻找效用最优的财富终值 X^* , 即

$$\begin{aligned} \max_X \quad & \mathbb{E}\left[\frac{1}{\gamma}(X)^\gamma\right], \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} X \geq \alpha x_0 \exp(\int_0^T r(s)ds) \quad \text{a.s.}, \\ \mathbb{E}[\rho(T)X] = x_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

第二个子问题是寻找最优投资组合策略 $\pi^*(\cdot)$ 来复制最优财富终值 X^* , 即假设 X^* 是子问题 (4.2) 的解, $\pi^*(\cdot)$ 满足如下随机微分方程:

$$\begin{cases} dx(t) = [r(t)x(t) + B(t)\pi(t)]dt + \pi(t)'\sigma(t)dW(t), & t \in [0, T], \\ x(T) = X^*. \end{cases} \quad (4.3)$$

定理 1 如果 $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$ 是问题 (4.1) 的最优解, 则 $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$ 满足方程 (4.3) 且 $x^*(T)$ 是问题 (4.2) 的最优解. 相反的, 如果 X^* 是问题 (4.2) 的最优解, 则问题 (4.3) 有一个解 $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$, 其也是问题 (4.1) 的最优解.

证 i) 假设 $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$ 是问题 (4.1) 的最优解. 则 $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$ 满足方程 (4.3), 由 (3.2) 式得 $\mathbb{E}[\rho(T)x^*(T)] = x_0$. 因此 $x^*(T)$ 是问题 (4.2) 的可行解. 我们假设问题 (4.2) 有另一可行解 Y , 满足 $\mathbb{E}[\frac{1}{\gamma}(Y)^\gamma] > \mathbb{E}[\frac{1}{\gamma}(x^*(T))^\gamma]$.

事实上, 以 $x(T) = Y$ 为财富终值的随机微分方程 (3.1) 有唯一解 $(x(\cdot), z(\cdot))$. 令 $\pi(t) = (\sigma(t))^{-1}z(t)$, 则 $(x(\cdot), \pi(\cdot))$ 满足方程 (2.3). 进一步, 由 (3.2) 式和 Y 是问题 (4.2) 的可行解, 得 $x(0) = \mathbb{E}[\rho(T)Y] = x_0$. 因此我们得到 $(x(\cdot), \pi(\cdot))$ 是问题 (4.1) 的可行解. 进而有 $\mathbb{E}[\frac{1}{\gamma}(x(T))^\gamma] = \mathbb{E}[\frac{1}{\gamma}(Y)^\gamma] > \mathbb{E}[\frac{1}{\gamma}(x^*(T))^\gamma]$, 这与 $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$ 是问题 (4.1) 的最优解相矛盾.

ii) 相反的, 假设 X^* 是问题 (4.2) 的最优解. 通过求解方程 (4.3) 得到解 $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$, 显然其是问题 (4.1) 的可行解. 我们假设存在问题 (4.1) 的另一可行解 $(x(\cdot), \pi(\cdot))$ 使得 $\mathbb{E}[\frac{1}{\gamma}(x(T))^\gamma] > \mathbb{E}[\frac{1}{\gamma}(x^*(T))^\gamma]$, 因此 $x(T)$ 是问题 (4.2) 的解且优于 X^* , 这与 X^* 是问题 (4.2) 的最优解相矛盾.

定理 2 考虑如下问题:

$$\begin{aligned} \min_X \quad & \mathbb{E}\left[\frac{1}{\gamma}(X)^\gamma + \lambda \rho(T)X\right], \\ \text{s.t.} \quad & X \geq \alpha x_0 \exp(\int_0^T r(s)ds) \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (4.4)$$

假设 X^* 是问题 (4.2) 的解, 则 $\exists \lambda$, 使得 X^* 也是问题 (4.4) 的解. 相反的, 对于某个 λ , 如果 X^* 是问题 (4.4) 的解, 则 X^* 也是问题 (4.2) 的解, 其中 $x_0 = \mathbb{E}[\rho(T)X^*]$.

证 将引理 2 应用于子问题 (4.2) 可直接证得结论.

定理 3 假设存在 λ 满足 $\mathbb{E}\{\rho(T)f(\lambda\rho(T))\} = x_0$, 其中

$$f(\lambda\rho(T)) = \max((\lambda\rho(T))^{1-\gamma}, \alpha x_0 \exp(\int_0^T r(s)ds)) \quad (0 < \gamma < 1),$$

则 λ 是唯一存在解.

证 令 $F(\lambda\rho(T)) := \mathbb{E}\{\rho(T)f(\lambda\rho(T))\}$. 由于 $x^{1-\gamma}$ 是 $(0, +\infty]$ 上的一个单调减函数, 进而得到 $F(\lambda\rho(T))$ 是一个关于 λ 的单调减函数. 因此 $F(\lambda\rho(T)) = x_0$ 存在唯一解.

定理 4 存在唯一的拉格朗日乘子 λ 使得 $(x^*(t), \pi^*(t))$ 是问题 (4.1) 的最优解. 即最优财富过程为

$$x^*(t) = x(t, S_t), \quad (4.5)$$

最优投资组合选择为

$$\pi^*(t) = -(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1}B(t)' \frac{\partial x(t, S_t)}{\partial S_t} S_t, \quad (4.6)$$

其中

$$S_t = \lambda \rho(t) = \lambda \exp \left\{ - \int_0^t [r(s) + \frac{1}{2} |\theta(s)|^2] ds - \int_0^t \theta(s) dW(s) \right\},$$

$$x(t, S_t) = \mathbb{E} \left\{ f \left(S_t e^{-\int_t^T [r(s) + \frac{1}{2} |\theta(s)|^2] ds - \int_t^T \theta(s) dW(s)} \right) e^{-\int_t^T [r(s) + \frac{1}{2} |\theta(s)|^2] ds - \int_t^T \theta(s) dW(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right\}.$$

证 i) 首先由定理 2 和定理 3 得, 存在唯一的拉格朗日乘子 λ , 其满足

$$\mathbb{E}\{\rho(T)f(\lambda\rho(T))\} = x_0,$$

其中

$$f(\lambda\rho(T)) = \max((\lambda\rho(T))^{1-\gamma}, \alpha x_0 \exp(\int_0^T r(s)ds)), (0 < \gamma < 1).$$

令 $X^* = f(\lambda\rho(T))$, 则 X^* 为问题 (4.4) 的解, 进而为问题 (4.2) 的解.

ii) 利用定理 1, 我们知道要求解问题 (4.1) 只要求解问题 (4.2), 然后将 (4.2) 的解带入方程 (4.3) 即可求得最优解. 因此, 我们只需求解下述随机微分方程 $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$ 满足如下 SDE:

$$\begin{cases} dx(t) &= [r(t)x(t) + B(t)\pi(t)]dt + \pi(t)'\sigma(t)dW(t), \quad t \in [0, T], \\ x(T) &= f(\lambda\rho(T)). \end{cases} \quad (4.7)$$

令 $S_t = \lambda\rho(t)$, 利用文献 El Karoui^[8] 的结论, 得到

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \rho(t)^{-1} \mathbb{E}\{f(\lambda\rho(T))\rho(T) | \mathcal{F}_t\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ f(\lambda\rho(T)) \frac{\rho(T)}{\rho(t)} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ f(\lambda\rho(T)) \frac{\rho(T)}{\rho(t)} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ f \left(\lambda\rho(t) e^{-\int_t^T [r(s) + \frac{1}{2} |\theta(s)|^2] ds - \int_t^T \theta(s) dW(s)} \right) e^{-\int_t^T [r(s) + \frac{1}{2} |\theta(s)|^2] ds - \int_t^T \theta(s) dW(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ f \left(S_t e^{-\int_t^T [r(s) + \frac{1}{2} |\theta(s)|^2] ds - \int_t^T \theta(s) dW(s)} \right) e^{-\int_t^T [r(s) + \frac{1}{2} |\theta(s)|^2] ds - \int_t^T \theta(s) dW(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &:= x(t, S_t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

这样求得了问题 (4.1) 最优财富过程 $(x^*(t))$, 接下来我们求解最优投资组合策略 $\pi^*(t)$.

对 (4.8) 式中的 $x(t, S_t)$ 应用 Ito 公式, 并将其漂移项和发散项与 (4.7) 式比较可得

$$\pi^*(t) = -(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1}B(t)' \frac{\partial x(t, S_t)}{\partial S_t} S_t. \quad (4.9)$$

通过本文的讨论, 我们解决了幂效用函数下, 带有比例保本约束的最优投资组合选择问题 (2.4), 求得了最优财富过程和最优投资组合选择的表达式.

参 考 文 献

- [1] Robert C Merton. Continuous-time finance[M]. Oxford: Blackwell, 1990.
- [2] Fleming W H, Hernández-Hernández D . An optimal consumption model with stochastic volatility[J]. Finance and Stochastics, 2003, 7: 245–262.
- [3] Karatzas I , Shreve S E . Methods of mathematical finance[M]. New York: Springer Verlag, 1998.
- [4] Lakner P, Nygren L M. Portfolio optimization with downside constraints[J]. Math. finance, 2006, 16(2): 283–299.
- [5] Ye J, Li T T. The optimal mean–variance investment strategy under value-at-risk constraints[J]. Insurance: Math. Economics, 2012, 51(2): 344–351.
- [6] Luo K, Wang G M, Hu Y J. Optimal portfolio on tracking the expected wealth process with liquidity constraints[J]. Acta Math. Scientia, 2011, 31B(2): 483–490.
- [7] Bielecki T R, Jin H Q, Pliska S R, Zhou X Y. Continuous-time mean-variance portfolio selection with bankruptcy prohibition[J]. Mathematical Finance, 2003, 15(2): 213–244.
- [8] El Karoui N , Peng S, Quenez M C . Backward stochastic differential equations in finance[J]. Math. Finance, 1997, 7: 1–71.

OPTIMAL PORTFOLIO SELECTION UNDER PRINCIPAL
GUARANTEEDLUO Kui¹ , ZHOU Xuan¹ , ZHAO Hong-ya¹, WANG Si-min ²*(1. Industrial Training Centre, Shenzhen Polytechnic, Shenzhen 518055, China)**(2. Economics and Management School, Wuhan University, Wuhan 430072, China)*

Abstract: In this article, we consider an optimal portfolio selection problem with power utility function under principal guaranteed. By Lagrange multiplier and portfolio replicating approach, we obtain the optimal wealth process and the optimal portfolio, which extends the results of optimal portfolio selection with constraint.

Keywords: optimal portfolio; Lagrange multiplier; power utility funtion; principal guaranteed

2010 MR Subject Classification: 60F10; 60G50